УДК 519.63

УСТОЙЧИВЫЕ ЯВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов

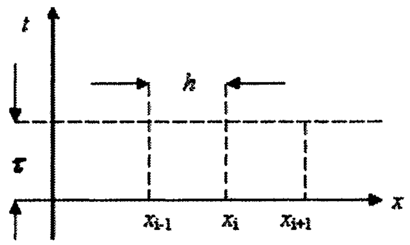
Предлагается численный метод интегрирования уравнения теплопроводности, основанный на комбинации явной и неявной схемы с использованием линейных дифференциальных уравнений первого порядка (обыкновенных или с частными производными – в зависимости от наличия в исходном уравнении производных первого порядка по пространственным переменным).

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, устойчивый, явная схема, дифференциальное уравнение первого порядка.*

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Обозначим через τ шаг по переменной t, через h – шаг по переменной x. Через u_{i-1}, u_i, u_{i+1} обозначим значения функции u при $t = t_0$ (на оси x) в точках x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, через $\overline{u}_{i-1}$, $\overline{u}_i$, $\overline{u}_{i+1}$ обозначим значения функции u при $t = t_0 + \tau$ в тех же точках (см. рисунок). Зная значения u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ нам надо вычислить значения $\overline{u}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.



Расчетная схема

Коэффициенты уравнения (1) и обозначения приведены к безразмерному виду.

Явная схема выглядит так [1, 2]:

$$\overline{u}_i = u_i + \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}\tau. \tag{2}$$

(Значения $\overline{u}_{i-1}$, $\overline{u}_i$, $\overline{u}_{i+1}$ уже вычислены).

Неявная схема выглядит так [1, 2]:

$$\overline{u}_i\left(1 + \frac{2}{h^2}\tau\right) - \frac{\overline{u}_{i-1} + \overline{u}_{i+1}}{h^2}\tau = u_i. \tag{3}$$

Это приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений с так называемой трехдиагональной матрицей. Для одномерного уравнения эта схема предпочтительна, ибо явная схема неустойчива при $\tau > h^2/2$, в то время как неявная схема устойчива при всех значениях τ.

Однако в многомерных случаях неявная схема оказывается не столь удобной. Имея в виду дальнейшие применения численных методов к многомерному уравнению, запишем такую схему

$$\frac{\overline{u}_i - u_i}{\tau} + \frac{2}{h^2}\overline{u}_i = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{h^2} \tag{4}$$

и перейдем к пределу при $\tau \to 0$. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\overline{u}_i}{dt} + \frac{2}{h^2}\overline{u}_i = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{h^2}. \tag{5}$$

Его решение

$$\overline{u}_i = u_i \cdot q + (1 - q)\frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{2}, \tag{6}$$

где $q = \exp\left(-2\tau/h^2\right) < 1$.

С одной стороны, полученная схема явная ($\overline{u}_i$ определяется по значениям u_i на предыдущем временном слое в соседних узлах), с другой стороны, эта схема абсолютно устойчива. Действительно, полагая

$$\overline{u}_i = \lambda u_i e^{j-i\varphi} \quad (j \text{ – мнимая единица}),$$

получаем $\lambda = q + (1 - q)\cos(i\varphi) < 1$.

Это означает, что значения $\overline{u}_i$ убывают со скоростью геометрической прогрессии.

Если в формуле (6) разложить $\exp\left(-2\tau/h^2\right)$ в ряд Тейлора и удержать первые два члена $\exp\left(-2\tau/h^2\right) \approx 1 - 2\tau/h^2\right)$, то получим обычную явную схему (2). Если $2\tau/h^2 > 1$, то схема неустойчива.

Теперь рассмотрим уравнение теплопроводности для двумерного случая в полярной системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{7}$$

Обозначим h – шаг по переменной r, τ – шаг по переменной t, α – шаг по переменной φ. Явная схема выглядит так

$$\overline{u}_{ik} = u_{iu} + \left(\frac{2r_i + h}{2r_i}u_{i+1,k} + \frac{2r_i - h}{2r_i}u_{i-1,k} - 2u_{ik}\right)\frac{\tau}{h^2} + \left(\frac{u_{i,k-1} + u_{i,k+1}}{r_i^2} - \frac{2u_{ik}}{r_i^2}\right)\frac{\tau}{\alpha^2}. \tag{8}$$

Здесь i – номер узла сетки по r, k – номер узла сетки по φ. Повторяя процедуру перемещения u_{ik} в $\overline{u}_{ik}$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\overline{u}_{ik}}{dt} + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{(r_i \cdot \alpha)^2}\right)\overline{u}_{ik} = f_{ik}, \tag{9}$$

где

$$f_{ik} = \left(\frac{2r_i + h}{2r_i}u_{i+1,k} + \frac{2r_i - h}{2r_i}u_{i-1,k}\right)\frac{1}{h^2} + \frac{u_{i,k-1} + u_{i,k+1}}{\left(r_i\alpha\right)^2}. \tag{10}$$

Обозначим

$$\mu = \frac{2}{h^2} + \frac{2}{\left(r_i\alpha\right)^2}. \tag{11}$$

Получаем решение

$$\overline{u}_{ik} = u_{ik}e^{-\mu\tau} + \left(1 - e^{-\mu\tau}\right)\frac{b_{ik}}{\mu}, \tag{12}$$

т.е. опять возникает устойчивая явная схема.

Однако во многих случаях приходится рассматривать вращающуюся систему координат с постоянной угловой скоростью ω [3].

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \omega\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{13}$$

В этом случае для устойчивости схемы приходим к линейному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u}_{ik} - \omega\frac{\partial}{\partial\varphi}\overline{u}_{ik} + \mu\overline{u}_{ik} = f_{ik}. \tag{14}$$

Здесь предполагается, что для каждого значения r правая часть f_{ik} является функцией (разумеется, известной) аргумента φ.

Решение (явная схема) выглядит так:

$$\overline{u}_{ik} = u\big(\varphi+\omega\tau\big)e^{-\mu\tau} + \int\limits_0^\tau e^{-\mu\varphi} f\big(\varphi+\omega s\big)\,d\varphi. \tag{15}$$

Имеется в виду, что $u\big(\varphi+\omega\tau\big)$ означают узлы (i,k) сетки, при которых $u_ik = u\big(\varphi+\omega\tau\big)$, т.е. значение $\varphi+\omega\tau$ попадает в узел (i,k).

Аналогичный смысл имеет выражение $f\big(\varphi+\omega s\big)$.

Таким образом, выражение (15) задает явную устойчивую схему для уравнения теплопроводности во вращающейся с угловой скоростью ω полярной системе координат; интеграл в правой части (15) предполагает численное интегрирование заданных в узлах сетки функции.

Литература

1. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989.
2. Годунов, С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1977.
3. Геренштейн, А.В. Расчет температурных полей в цилиндре при действии поверхностных тепловых источников «Тепло 4.0»/ А.В. Геренштейн, Н. Машрабов, Е.А. Геренштейн / Государственная регистрация в Отраслевом фонде алгоритмов и программ. – М.: ФГНУ ГКЦИТ, 2008. – № 9776, 20.02.2008.

Кафедра прикладной математики,
Южно-Уральский государственный университет

Поступила в редакцию 21 марта 2008 г.