УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФИЛЬТРУЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ

Д.Е. Шафранов

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATION OF FREE SURFACE OF FILTERED FLUID ON THE MANIFOLD

D.E. Shafranov

Показано существование единственного решения задачи Коши для уравнения свободной поверхности фильтрующейся жидкости в пространстве k-форм, заданных на гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края.

Ключевые слова: Уравнения соболевского типа, k-формы, риманово многообразие

The author introduces the existence of the unique solution of the Cauchy problem for the equation of free surface of filtered fluid in the k-form spaces defined on the smooth compact oriented Riemannian manifold without boundary.

Keywords: Sobolev type equation, k-forms, Riemannian manifold

Введение

Уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u \tag{1}$$

описывает эволюцию формы свободной поверхности жидкости, фильтрующейся в пласте ограниченной мощности [1]. Здесь действительные параметры α, β и λ характеризуют среду, причем $\alpha, \beta > 0$.

Разрешимость начально-краевых задач для уравнения (1) в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$, где Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, изучалась ранее в различных постановках, например, в [2, 3]. Уравнение свободной поверхности фильтрующейся жидкости относится к обширному классу уравнений соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{2}$$

В данной статье рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) в пространстве гладких k-форм, определенных на Ω – гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края. Редуцируем эту задачу к задаче Коши

$$u(0) = u_0, \tag{3}$$

для уравнения соболевского типа (2) в банаховом пространстве. Для этого воспользуемся теорией гармонических полей Кодаиры и разложением Ходжа [4]. Для исследования разрешимости полученной задачи используем результаты теории вырожденных аналитических полугрупп операторов. Отметим, что в [5] был рассмотрен более узкий класс уравнений соболевского типа, имеющих аналитические разрешающие группы, на многообразиях.

Статья помимо вводной части содержит еще два пункта. В первом пункте вводятся необходимые определения и формулируются, адаптированные для нашей задачи, теоремы теории вырожденных аналитических полугрупп и теории Ходжа – Кодаиры доказанные в [3, 4, 6, 7]. Во втором пункте приведена схема редукции исходной задачи Коши к задаче (2), (3) и сформулирован основной результат статьи.

Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ банаховы пространства и операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ – линейный и ограниченный, $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$ – линейный, замкнутый и плотно определенный. Введем в рассмотрение L-резольвентное множество

$$\rho^L(M) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})\right\}$$

и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Оператор-функцию $(\mu L - M)^{-1}$ будем называть L-резольвентой оператора, а оператор-функции $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L^L_\mu(M) = L\,(\mu L - M)^{-1}$ правой и левой L-резольвентой оператора M соответственно.

Определение 1. *Оператор M называется (L,p)-секториальным, если существуют константы $\nu \in \mathbb{R}$ и $\theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что*

$$S^L_{\nu,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |arg(\mu - \nu)| < \theta, \mu \neq \nu\} \subset \rho^L(M),$$

причем,

$$\exists K > 0 : \max\left\{\left\|R^L_\mu(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}, \left\|L^L_\mu(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}|\mu_k - \nu|}, \forall \mu_k \in S^L_{\nu,\theta}(M), \quad k = 0,1,...,p.$$

Решением уравнения (2) называется вектор-функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{U}))$ удовлетворяющая уравнению (2).

Обозначим через $\mathcal{U}^1$ замыкание множества $\mathrm{im}R^L_{(\mu,p)}(M)$ в норме пространства $\mathcal{U}$.

Теорема 1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда для любого начального значения $u_0 \in \mathcal{U}^1$ существует единственное решение задачи Коши (2), (3).*

Пусть Ω_n – n-мерное ориентированное гладкое (т. е. класса C^∞) компактное связное риманово многообразие без края. Через $\mathbb{H}^k \equiv \mathbb{H}^k(\Omega_n)$, $\mathbb{H}^{-1} = \mathbb{H}^{n+1} = \{0\}$ обозначим линейное пространство гладких k-форм на многообразии Ω_n.

Формулой

$$(\alpha,\beta)_0 = \int\limits_{\Omega_n} \alpha \wedge *\beta, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{H}^k \tag{4}$$

где $*$ – оператор Ходжа, определим скалярное произведение на $\mathbb{H}^k$, $k = 0,1,\dots,n$, а соответствующую норму обозначим через $||\cdot||_0$. Продолжим скалярное произведение на прямую сумму $\bigoplus\limits_{k=0}^{n} \mathbb{H}^k$, требуя чтобы различные пространства $\mathbb{H}^k$ были ортогональны. Пополнение пространства $\mathbb{H}^k$ по норме $||\cdot||_0$ обозначим через $\mathfrak{H}^0_k$.

Теорема 2. *(Теорема Ходжа – Кодаиры). Для произвольного $k = 0, 1, \dots, n$ существует расщепление пространства $\mathfrak{H}_k^0$ в прямую ортогональную сумму*

$$\mathfrak{H}_k^0 = \mathfrak{H}_{kd}^0 \oplus \mathfrak{H}_{k\delta}^0 \oplus \mathfrak{H}_{k\triangle}$$

причем пространство $\mathfrak{H}_{k\triangle}$ конечномерно.

Здесь операторы d, δ являются расширением оператора d – (внешнего) дифференцирования k-форм и оператора $\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d*$, а $\Delta = -\delta d - d\delta$ – оператор Лапласа – Бельтрами. Пространство $\mathfrak{H}_{kd}^0$ $(\mathfrak{H}_{k\delta}^0)$ является пополнением линеала $d\delta[\mathbb{H}^k] = d[\mathbb{H}^{k-1}]$ $(\delta d[\mathbb{H}^k] = \delta[\mathbb{H}^{k+1}])$ по соответствующей норме, а пространство $\mathfrak{H}_{k\triangle}$ содержит только гармонические k-формы.

Через $P_{k\triangle}$ обозначим ортопроектор на $\mathfrak{H}_{k\triangle}$. Формулами

$$(\alpha, \beta)_1 = (-\Delta\alpha, \beta)_0 + (\alpha_\triangle, \beta_\triangle)_0,$$

$$(\alpha, \beta)_2 = (\Delta\alpha, \Delta\beta)_0 + (\alpha, \beta)_1,$$

введем скалярные произведения на $\mathbb{H}^k$, где $\omega_\triangle = P_{k\triangle}\omega$. Пополнения линеала $\mathbb{H}^k$ по соответствующим нормам $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ обозначим через $\mathfrak{H}_k^1$ и $\mathfrak{H}_k^2$ соответственно. Аналогичным образом можем построить пространство $\mathfrak{H}_k^4$. Пространства $\mathfrak{H}_k^l$, $l = 1, 2$, – банаховы (их гильбертова структура нас в дальнейшем не интересует), причем имеют место непрерывные и плотные вложения $\mathfrak{H}_k^2 \subset \mathfrak{H}_k^1 \subset \mathfrak{H}_k^0$.

Следствие 1. *Для любого $k = 0, 1, \dots, n$ существуют расщепления пространств $\mathfrak{H}_k^l = \mathfrak{H}_{k\triangle}^{l1} \oplus \mathfrak{H}_{k\triangle}$, где $\mathfrak{H}_{k\triangle}^{l1} = (\mathbb{I} - P_{k\triangle})[\mathfrak{H}_{k\triangle}^l]$, $l = 1, 2$.*

Основные результаты

Спектр оператора Лапласа – Бельтрами $\sigma(\Delta)$ в пространстве k-форм описанном выше неположителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке ∞ (см. [7]). Обозначим через $\{\lambda_l\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа – Бельтрами, занумерованных по невозрастанию с учетом кратности. Через $\{\varphi_l\}$ обозначим ортонормированную (в смысле (4)) последовательность собственных функций. Если $\lambda_l = 0$, то при некотором фиксированном l выполняется $\varphi_l \in \mathfrak{H}_{k\triangle}$.

Зададим операторы L и M формулами $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u, \mathrm{dom}\, M = \mathfrak{H}_k^4$. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M \in Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ действуют из пространства $\mathcal{U} = \mathfrak{H}_k^4$ в пространство $\mathcal{F} = \mathfrak{H}_k^0$. Тем самым задача Коши

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{5}$$

для уравнения (1) редуцирована к задаче Коши (3) для уравнения соболевского типа (2).

Лемма 1. *Для любого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda \neq \frac{\alpha}{\beta}$ оператор M $(L, 0)$-секториален.*

Для данной задачи $\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : (u, \varphi_l)_0 = 0, \lambda_l = \lambda\}$.

Из леммы 1 и теоремы 1 следует

Теорема 3. *При любых $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda \neq \frac{\alpha}{\beta}$ и при любом $u_0 \in \mathcal{U}^1$ существует единственное решение $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{L}(\mathcal{U}^1))$ задачи Коши (1),(5).*

Литература

1. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031 – 1033.
2. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений эволюционного типа / Г.А. Свиридюк, М.В. Суханова // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 3. – С. 508 – 515.
3. Свиридюк, Г.А. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сиб. матем. журнал. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 604 – 616.
4. Морен, К. Методы гильбертова пространства / К.Морен. – М.: Мир, 1965.
5. Шафранов, Д.Е. Задача Коши для уравнений соболевского типа на римановых многообразиях: дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 /Д.Е. Шафранов; СГПА. – Стерлитамак, 2006. – 96 с.
6. Sviridyuk, G.A. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht: VSP, 2003.
7. Уорнер, Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли / Ф. Уорнер. – М.: Мир, 1987.

Кафедра уравнений математической физики,
Южно-Уральский государственный университет
shafr@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 2 сентября 2008 г.

Издательство Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 27.10.2008. Формат 60×84 1/8. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 13,95. Уч.-изд. л. 11,23. Тираж 500 экз. Заказ 406/461.

Отпечатано в типографии Издательства ЮУрГУ. 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.