УДК 517.958:52, 517.95

# ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА И ЕЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

*Г.А. Закирова, А.И. Седов*

# AN INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR LAPLACE OPERATOR AND IT'S APPROXIMATE SOLUTION

*G.A. Zakirova, A.I. Sedov*

Исследуются обратные спектральные задачи для математических моделей с оператором Лапласа. Построен алгоритм численного нахождения приближенного решения.

*Ключевые слова: оператор Лапласа, обратная спектральная задача, приближенное решение*

The authors consider inverse spectral problems for mathematical models with Laplace operator. They obtain a numerical algorithm for the approximate solution founding.

*Keywords: Laplace operator, inverse spectral problem, approximate solution*

## Введение

Пусть

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \ : \ 0 \le x_j \le a_j, j = 1, \dots, N\}, \ a_j > 0.$$

В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим дискретный самосопряженный оператор $T_0$, определенный краевой задачей Дирихле

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа, $\partial\Pi$ — граница $\Pi$.

В настоящей работе исследуется обратная задача для степени оператора $T_0$, порожденного краевой задачей (1). Основным методом исследования является так называемый резольвентный метод, теоретически обоснованный в работах [1, 2]. Применяя идеи этого метода, мы доказываем теоремы существования решения поставленной обратной задачи. Впервые рассматривается случай, когда оператор Лапласа имеет непростой спектр. В работе также описывается процедура численного нахождения приближенного решения.

Отметим, что обратные спектральные задачи в различных постановках играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют множество приложений в естествознании. Большинство работ в этом направлении связаны с обыкновенными дифференциальными операторами. Что касается операторов в частных производных, то здесь, в основном, рассматривается степень оператора Лапласа с простым спектром. Так, в работах [1 – 6] решена обратная задача для степени оператора Лапласа больше 2 на прямоугольнике. В работах [7 – 8] поставленная задача решена для степени больше 3/2, в работах [9 – 10] – для степени больше единицы. Обратная задача для оператора Лапласа с кратным спектром раннее не исследовалась.

## 1. Постановка обратной задачи

Рассмотрим оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, являющийся степенью оператора $T_0$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора $T_0$, $\beta \geq 1$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$.

Очевидно, спектр $\sigma(T)$ оператора $T$ неоднократный. Иногда, для удобства будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1,m_2,\dots,m_N)}$ оператора $T$ и связанные с ними спектральные объекты одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет отвечать за кратность $\nu_t$ собственного числа $\lambda_t$, т.е. $\lambda_t = \lambda_t^k = \lambda_t^j$, $k = \overline{1, \nu_j}$.

Пусть $P$ — оператор умножения на вещественную функцию $p \in L_2(\Pi)$, называемую потенциалом.

Обозначим через $\mu_t$ собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности, а через $u_t$ — соответствующие им ортонормированные в $L_2(\Pi)$ собственные функции.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа.

*Пусть дана последовательностью комплексных чисел $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$, близкая к спектру оператора $T$. При различных степенях $\beta \geq 1$ требуется доказать существование оператора $P$, такого что спектр $\sigma(T + P)$ совпадает с последовательностью $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$.*

## 2. Основные спектральные тождества

Сформулируем вспомогательные утверждения, на которых базируется доказательства основных результатов данной статьи. Доказательства самих вспомогательных утверждений приведены в работе [11].

Обозначим:

$R_0(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1}$, $R(\lambda) = (T + P - \lambda E)^{-1}$;

$a_t = \{\lambda : \text{Re}\,\lambda = \frac{\lambda_{t+1} + \lambda_t}{2}\}$, $\Gamma_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}\lambda \in a_t\}$, $\gamma_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda_t - \lambda| = r_0\}$,

$r_t = \frac{1}{2}\min\{\lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1}\}$, $r_0 = \inf_t r_t$;

$\Omega_t = \{\lambda : |\lambda_t - \lambda| \geq r_0\}$, $\Omega = \bigcap_{t=1}^{\infty} \Omega_t$, $V = \prod_{j=1}^{n} a_j$.

**Лемма 1.**

*Если $\|P\| < r/2$, где $0 < r \leq r_0$, то оператор $T + P$ — дискретен, причем*

*(i) если $R_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, то $R(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, $1 \leq q < \infty$,*

*(ii) если $\lambda_t \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, то $\mu_t^s \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, $s = \overline{1, \nu_t}$, $\nu_t$—кратность собственного числа $\lambda_t$.*

**Теорема 1.** *Если $\beta \geq N/2$, $\|P\| < r/2$, где $0 < r \leq r_0$, то для любого $t \in \mathbb{N}$ имеет место спектральное тождество:*

$$\sum_{s=1}^{\nu_t} \mu_t^{(s)} = \nu_t\lambda_t - \sum_{s=1}^{\nu_t}(Pv_t^{(s)}, v_t^{(s)}) + \alpha_t(p), \tag{2}$$

*где* $\alpha_t(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_t}} \lambda \text{Sp}\left[R(\lambda)\Big(PR_0(\lambda)\Big)^2\right] d\lambda$.

## 3. Степень оператора Лапласа с потенциалом на N-мерном параллелепипеде

В данном разделе доказывается теорема существования решения обратной спектральной задачи для оператора Лапласа на многомерном параллелепипеде. Приводятся условия, налагаемые на произвольную последовательность, при соблюдении которых спектр возмущенного оператора будет совпадать с данной последовательностью.

**Лемма 2.**

*Если* $\beta > \dfrac{3N}{4}$, *то ряд* $\sum\limits_{t=1}^{\infty} r_t^2 \max\limits_{\lambda\in\gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^4$ *сходится.*

*Если* $\beta > N$, *то ряд* $\sum\limits_{t=1}^{\infty} r_t \max\limits_{\lambda\in\gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2$ *сходится.*

Обозначим сумму первого ряда через $s^2$, а второго через $s_\infty$.

Основные результаты данного раздела выражают следующие утверждения.

**Теорема 2.** *Пусть* $\beta > \dfrac{3N}{4}$, $r \in (0, \min\{r_0, \dfrac{1}{s\sqrt{2^N}}\})$. *Если для комплексной последовательности* $\{\xi_t^k\}$ *выполняется неравенство:*

$$\sqrt{2^N V}\left(\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu_t}|\xi_t^k-\lambda_t|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1-\omega),$$

*где* $\omega = \sqrt{2^N} s r < 1$, *то существует потенциал* $p \in L_2(\Pi)$ *такой, что для любого* $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t}\xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu}\mu_t^k, \tag{3}$$

*где* $\sigma(T+P) = \{\mu_t^k\}$.

**Теорема 3.** *Пусть* $\beta > N$, $r < \min\{r_0, \dfrac{1}{s_\infty 2^N}\}$, $\omega = 2^N s_\infty r$. *Если для комплексной последовательности* $\{\xi_t^k\}$ *выполняется неравенство:*

$$2^N\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu_t}|\xi_t^k-\lambda_t| < \frac{r}{2}(1-\omega),$$

*то существует потенциал* $p \in L_\infty(\Pi)$, *такой, что для любого* $t \in \mathbb{N}$ *выполняется*

$$\sum_{k=1}^{\nu_t}\xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu}\mu_t^k, \tag{4}$$

*где* $\sigma(T+P) = \{\mu_t^k\}$.

Введем в рассмотрение следующую систему функций:

$$\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2^{N+q}}{V}}\prod_{j=1}^{N}\cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right),$$

где $m = (m_1, \dots, m_N)$, $m_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $q$ – число ненулевых индексов в мультииндексе $m$. При $m_j \in \mathbb{N}$ эту систему будем нумеровать нижним и верхним индексами так же, как и систему $\{v_m\}$, т.е. в соответствии с нумерацией собственных чисел $\lambda_t^k$.

**Лемма 3.** *Множества $M$ вещественных функций $p \in L_2(\Pi)$, обладающих следующими свойствами:*

$$p(a_1 - x_1, x_2, \ldots, x_N) = p(x_1, a_2 - x_2, \ldots, x_N) = \ldots = p(x_1, x_2, \ldots, a_N - x_N) = \\ = p(x_1, x_2, \ldots, x_N) \text{ для почти всех } (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \Pi, \quad (5)$$

$$(p, \varphi_m) = 0, \quad \text{при } \prod_{j=1}^{N} m_j = 0, \ m_j = 0, 1, \ldots, \quad (6)$$

$$\|p\|_{L_2} \leq \frac{r}{2}. \quad (7)$$

*замкнуто в $L_2(\Pi)$.*

**Лемма 4.** *Если $\|P_j\| \leq r/2$, $0 < r \leq r_0$, $j = 1, 2$, то*

$$|\alpha_t(p_1) - \alpha_t(p_2)| \leq r r_t \|P_1 - P_2\| \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2.$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.

*Доказательство.* В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим уравнение относительно $p$:

$$p = \alpha_0 - \alpha(p), \quad (8)$$

где

$$\alpha_0 = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} (\xi_t^k - \lambda_t) \varphi_t^k, \quad (9)$$

$$\alpha(p) = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{\alpha_t(p)}{\nu_t} \varphi_t^k. \quad (10)$$

Из вида уравнения следует, что решение удовлетворяет свойствам (5) и (6).

Введем оператор $A : L_2(\Pi) \to L_2(\Pi)$, определяемый равенством: $Ap = \alpha_0 - \alpha(p)$.

Так как $\|Ap\|_{L_2} \leq \|\alpha_0\| + \|\alpha(p)\| \leq \frac{r}{2}(1 - \omega) + \frac{r}{2}\omega = \frac{r}{2}$, то оператор $A$ отображает замкнутый шар $U(0, \frac{r}{2})$ в себя. Можно показать, что пересечение данного шара с множеством функций, удовлетворяющих свойствам (5) и (6), замкнутое множество. Используя лемму (4) покажем, что оператор $A$ сжимающий в этом подпространстве.

$$\|Ap_1 - Ap_2\|_{L_2} = \|\alpha(p_1) - \alpha(p_2)\| = \sqrt{2^N V} \left( \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{|\alpha_t(p) - \alpha_t(p_2)|^2}{\nu_t} \right)^{1/2} \leq$$

$$\sqrt{2^N} r \|p_1 - p_2\|_{L_2} s = \omega \|p_1 - p_2\|_{L_2}.$$

По принципу С.Банаха уравнение (8) имеет единственное решение $p$.

Определим оператор $P$, действующий в $L_2(\Pi)$, следующим образом: $Pv(x) = p(x)v(x)$, где $p$ — решение уравнения (8). Оператор $T + P$ дискретный, и его собственные числа $\mu_m$ также можно занумеровать одним нижним и одним верхним индексами. Покажем, что решение $p$ и есть искомый потенциал.

Умножим скалярно уравнение (8) на функции $\varphi_t^k$ и просуммируем по $k = \overline{1, \nu_t}$. Получим

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} (p, \varphi_t^k) = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k - \nu_t \lambda_t - (-1)^N \sqrt{2^N V} \alpha_t(p). \quad (11)$$

Используя свойства (5)–(6), преобразуем

$$(Pv_m, v_m) = \frac{2^N}{V}\int_{\Pi} p(x_1,\ldots,x_N)\prod_{j=1}^{N}\sin^2\Big(\frac{\pi m_j x_j}{a_j}\Big)dx_1\ldots dx_N =$$

$$\frac{(-1)^N}{V}\int_{\Pi} p(x_1,\ldots,x_N)\prod_{j=1}^{N}\cos\Big(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\Big)dx_1\ldots dx_N = \frac{(-1)^N}{\sqrt{2^N V}}(p,\varphi_m).$$

Отсюда, учитывая кратность

$$\sum_{k=1}^{\nu_t}(Pv_t^k, v_t^k) = \frac{(-1)^N}{\sqrt{2^N V}}\sum_{k=1}^{\nu_t}(p,\varphi_t^k). \tag{12}$$

Подставляя (11) в (12) и сравнивая с (2), получаем (3). □

**Замечание 1.** Оператор $T+P$, обладающий свойством (3), неединственен.

Действительно, достаточно поменять местами два члена последовательности $\{\xi_t^k\}_{t=1}^{\infty}$, попадающих в одну сумму $\sum_{k=1}^{\nu_t}|\xi_t^k-\lambda_t|^2$, и мы получим другую последовательность $\{\widetilde{\xi_t^k}\}_{t=1}^{\infty}$.

Объединим в один класс P все операторы, спектр которых обладает свойством (3). Если мы не будем различать представителей этого класса, то можем говорить о единственности решения обратной задачи.

## 4. Возмущенный оператор Лапласа с неядерной резольвентой на $N$-мерном параллелепипеде

Как уже говорилось во введении, чаще всего в обратных задачах рассматривается степень оператора Лапласа, так как в данном случае мы будем иметь ядерную резольвенту. Но в приложениях более важную роль играет сам оператор Лапласа, а не его степени. С помощью специально подобранных аналитических функций в работе[12] удалось получить результат для оператора Лапласа с простым спектром, но формулировался он не для самих собственных чисел, а для значений введенных функций, зависящих от собственных чисел. В данной работе полученный результат обобщен на случай кратного спектра.

Пусть функции $f_t:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ таковы, что $f_t(\lambda_n)=\delta_{tn}$, где $\delta_{tn}$ — символ Кронекера и пусть $\beta_t = \sup\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda>0}(|\lambda|^2\cdot|f_t(\lambda)|)<\infty$. Введем функции $g_t(\lambda)=\int_0^{\lambda}f_t(z)dz$.

Можно показать, что функции

$$f_t(\lambda) = A_t\left(\frac{e^{-\lambda}-1}{\lambda}\right)^2\left(\prod_{k=1}^{\infty}(1-e^{-\lambda}e^{-\lambda_k})\right)\left(\prod_{k=1,k\neq t}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k+\lambda}\right), \mathrm{Re}\lambda>0,$$

где нормирующие множители $A_t$ выбраны из условия $f_t(\lambda_t)=1$, $t\in\mathbb{N}$ удовлетворяют указанным выше условиям.

**Теорема 4.** *Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^{(k)}\}$ существует подпоследовательность $\{c_t\}\subset\{a_t\}$ такая, что выполняются следующие неравенства:*

(i) $\omega = 2^{N-1}r_0\max\limits_{\lambda\in\Omega}\|R_0(\lambda)\|_2^2\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\beta_t}{c_t}<1$,

(ii) $2^N \sum_{t=1}^{\infty} \left| \sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} \left( g_t(\xi_j^{(k)}) - g_t(\lambda_j) \right) \right| < \frac{r_0}{2}(1-\omega),$

*то существует потенциал p, такой, что для любого* $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} g_t(\mu_j^{(k)}) = \sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\nu_j} g_t(\xi_j^{(k)}).$$

Доказательство этой теоремы основывается на тех же идеях, что и теорема(2)

## 5. Степень оператора Лапласа с потенциалом на равнобедренном прямоугольном треугольнике

В данном разделе впервые рассматривается непрямоугольная область.

Пусть $K = \{(x,y) : 0 \le x \le y \le \pi\}$. В пространстве $L_2(K)$ рассмотрим дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор $T_0$, порожденный краевой задачей Дирихле (1).

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, $\beta > 1$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$.

Нетрудно показать, что собственным числам $\lambda_{mn} = (m^2 + n^2)^\beta$ оператора $T$ соответствуют собственные функции $v_{mn} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin mx \sin ny - \sin nx \sin my)$, $m > n > 0$, образующие ортонормированный базис в $L_2(K)$.

Положим:

1) $s_\Delta = \sum_{m>n>0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{2k}} r_{2^k(m+n),2^k(m-n)} \max_{\lambda \in \gamma_{2^k(m+n),2^k(m-n)}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 + \frac{1}{2^{2k+1}} r_{2^{k+1}m,2^{k+1}n} \max_{\lambda \in \gamma_{2^{k+1}m,2^{k+1}n}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right);$

2) $0 < r_\Delta < \min\left\{ \frac{1}{3\sqrt{2}s_\Delta}; r_0 \right\};$

3) $\phi_{mn} = \frac{2}{\pi}(\cos mx \cos ny + \cos nx \cos my)$, $m, n = 0, 1, \ldots$.

**Теорема 5.** *Пусть* $\beta > 2$, $r \in (0, \min\{r_0, \frac{1}{3\sqrt{2}s_\Delta}\})$. *Если для комплексной последовательности* $\{\xi_{mn}\}$ *выполняется неравенство:*

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m>n>0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} (\xi_{2^k(m+n),2^k(m-n)} - \lambda_{2^k(m+n),2^k(m-n)}) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2^{2k+1}} (\xi_{2^{k+1}m,2^{k+1}n} - \lambda_{2^{k+1}m,2^{k+1}n}) \right| < \frac{r}{2}(1-\omega),$$

*где* $\omega = 3\sqrt{2}s_\Delta r < 1$, *то существует функция* $p \in L_\infty(K)$ *такая, что для любого* $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m^2+n^2=\lambda_t} (\mu_{mn} - \frac{1}{2}\mu_{m+n,m-n}) = \sum_{m^2+n^2=\lambda_t} (\xi_{mn} - \frac{1}{2}\xi_{m+n,m-n}), \tag{4.1}$$

*где* $\sigma(T+P) = \{\mu_{mn}\}$.

## 6. Численные расчеты

В этом разделе описывается процедура получения приближенного решения обратной спектральной задачи. Для этого используется основное уравнение, приведенное в процессе доказательства теоремы (2) существования решения обратной задачи. Для простоты ограничимся изложением двумерного случая.

Поставим задачу найти приближенное решение, существование которого показано в теореме (2).

Введем в рассмотрение следующую систему функций:

$$\varphi_{mn}(x) = \frac{4}{\sqrt{ab}} \cos\frac{2\pi m x}{a} \cos\frac{2\pi n y}{b}.$$

При $m, n > 0$ эту систему будем нумеровать нижним и верхним индексами в соответствии с нумерацией собственных чисел $\lambda_t^k$.

Уравнение $p = \alpha_0 - \alpha(p)$, где

$$\alpha_0 = \sqrt{ab}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu_t}(\xi_t^k - \lambda_t^k)\varphi_t^k, \quad \alpha(p) = \sqrt{ab}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu_t}\frac{\alpha_t(p)}{\nu_t}\varphi_t^k,$$

$$\alpha_t(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_t}\lambda\,\mathrm{Sp}[R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2]d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_t}\lambda\,\mathrm{Sp}[\sum_{k=2}^{\infty}R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k]d\lambda,$$

имеет единственное решение $p$.

Найти его можно методом последовательных приближений.

Пусть $p_0 \equiv 0$, тогда $p_{t+1} = \alpha_0 - \alpha(p_t)$, $\lim_{t\to\infty} p_t = p$.

Найдем приближенное решение $\widetilde{p}$.

$\widetilde{p} = \alpha_0 - \widetilde{\alpha}(\alpha_0)$, где

$$\widetilde{\alpha}(p) = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu_t}\frac{\widetilde{\alpha}_t(p)}{\nu_t}\varphi_t^k, \quad \widetilde{\alpha}_t(p) = \sum_{k=2}^{\infty}\alpha_t^{(k)}(p),$$

здесь

$\alpha_t^{(k)}$— $k$-тая поправка теории возмущений:

$$\alpha_t^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{\gamma_t}\lambda\mathrm{Sp}\left[R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k\right]d\lambda = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i k}\int_{\gamma_t}\mathrm{Sp}[PR_0(\lambda)]^k d\lambda.$$

Оценим разности $k$-х поправок, $k \geq 2$.

$$|\alpha_t^{(k)}(p) - \alpha_t^{(k)}(p_1)| = \frac{1}{2\pi k}\left|\int_{\gamma_t}\mathrm{Sp}\left[(PR_0(\lambda))^k - (P_1R_0(\lambda))^k\right]d\lambda\right| \leq$$

$$\frac{r_t}{k}\max_{\lambda\in\gamma_t}\left\|(PR_0(\lambda))^k - (P_1R_0(\lambda))^k\right\|_1 \leq$$

$$\frac{r_t}{k}\max_{\lambda\in\gamma_t}\left\|\sum_{s=0}^{k-1}(P_1R_0(\lambda))^s(P-P_1)R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^{k-s-1}\right\|_1 =$$

$$\frac{r_t}{k}\max_{\lambda\in\gamma_t}\left(\sum_{s=0}^{k-1}\|P-P_1\|\left(\frac{r}{2}\right)^{k-1}\|R_0(\lambda)\|_2^2\,\|R_0(\lambda)\|^{k-2}\right) =$$

$$r_t\|P-P_1\|\left(\frac{r}{2}\right)^{k-1}\max_{\lambda\in\gamma_t}\left(\|R_0(\lambda)\|_2^2\,\|R_0(\lambda)\|^{k-2}\right).$$

Здесь $P_1$— оператор умножения на $p_1$, т.е. на $\alpha_0$. Далее оценим модуль разности:

$$|\alpha_t(p) - \alpha_t(p_1)| \leq r_t\|P-P_1\|\frac{r}{2}\max_{\lambda\in\gamma_t}\|R_0(\lambda)\|_2^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^k\max_{\lambda\in\gamma_t}\|R_0(\lambda)\|^k \leq$$

$$rr_t\|P-P_1\|\max_{\lambda\in\gamma_t}\|R_0(\lambda)\|_2^2 < rr_t(\|P\|+\|P_1\|)\max_{\lambda\in\gamma_t}\|R_0(\lambda)\|_2^2 < \frac{2r^2r_t}{\sqrt{ab}}\max_{\lambda\in\gamma_t}\|R_0(\lambda)\|_2^2.$$

Итак,

$$|\alpha_t(p)-\widetilde{\alpha}_t(\alpha_0)| < \frac{2r^2r_t}{\sqrt{ab}}\max_{\lambda\in\gamma_t}\|R_0(\lambda)\|_2^2.$$

$$\widetilde{\alpha}_t(\alpha_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_t}\lambda\,\mathrm{Sp}[R_0(\lambda)(P_1R_0(\lambda))^2]d\lambda=$$

$$=\sum_{j\neq t}\sum_{k=1}^{\nu_t}\frac{(\alpha_0\varphi_t^k,\varphi_j^k)\cdot(\alpha_0\varphi_j^k,\varphi_t^k)}{\lambda_t^k-\lambda_j^k}=\sum_{j\neq t}\sum_{k=1}^{\nu_t}\frac{(\alpha_0\varphi_t^k,\varphi_j^k)^2}{(\lambda_t^k-\lambda_j^k)}.$$

Таким образом, $\widetilde{p}=\alpha_0-\sqrt{ab}\sum_t(\sum_{j\neq t}\sum_{k=1}^{\nu_t}\frac{(\alpha_0\varphi_t^k,\varphi_j^k)^2}{(\lambda_t^k-\lambda_j^k)})\varphi_t^k$.

На основе полученного результата в среде Maple 6 впервые создан программный продукт, позволяющий численно находить приближенное решение поставленной обратной задачи.

Положим для примера $a=1$, $b=\sqrt[4]{3}$, $\beta=5/2$, $\xi_{mn}=\lambda_{mn}+0.0001$. Тогда приближенное решение, вычисленное по первым четырем членам последовательности $\{\xi_{mn}\}$ имеет вид:

$$\widetilde{p}=0.3999996438cos(25.13274123x)cos(9.548376831y)+0.4006108966+$$

$$+0.3996028571cos(4.774188417y)+0.3999774004cos(9.548376831y)+$$

$$+0.3999955835cos(14.32256525y)+0.3998713899cos(6.283185308x)+$$

$$+0.3999953594cos(19.09675367y)+0.3999939656cos(6.283185308x)cos(9.548376831y)+$$

$$+0.3999665522cos(6.283185308x)cos(4.774188417y)+$$

$$+0.3999990308cos(6.283185308x)cos(19.09675367y)+$$

$$+0.3999987184cos(6.283185308x)cos(14.32256525y)+0.3999958620cos(12.56637062x)+$$

$$+0.4000013739cos(12.56637062x)cos(14.32256525y)+$$

$$+0.3999970936cos(12.56637062x)cos(9.548376831y)+$$

$$+0.3999958348cos(12.56637062x)cos(4.774188417y)+$$

$$+0.4000019328cos(18.84955592x)+0.3999996560cos(12.56637062x)cos(19.09675367y)+$$

$$+0.3999997128cos(18.84955592x)cos(14.32256525y)+$$

$$+0.3999993495cos(18.84955592x)cos(9.548376831y)+$$

$$+0.3999984754cos(18.84955592x)cos(4.774188417y)+$$

$$+0.3999999510cos(18.84955592x)cos(19.09675367y)+$$

$$+0.3999999768cos(25.13274123x)+0.3999999242cos(25.13274123x)cos(19.09675367y)+$$

$$+0.3999998700cos(25.13274123x)cos(14.32256525y)+$$

$$+0.3999995842cos(25.13274123x)cos(4.774188417y).$$

## Литература

1. Дубровский, В.В. К обратной задаче для степени оператора Лапласа с непрерывным потенциалом / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 9. – С. 1563 – 1567.
2. Дубровский, В.В. Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из $L_2$ / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1992. - Т. 28, № 9. – С. 1552 – 1561.
3. Дубровский, В.В. Устойчивость решения обратных задач спектрального анализа / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный А.В. // Дифференц. уравн. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 839 – 843.
4. Дубровский, В.В. Теорема существования в обратной задаче спектрального анализа / В.В. Дубровский // Дифференц. уравн. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1702 – 1703.
5. Дубровский, В.В. Теорема о существовании решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа / В.В. Дубровский, А.С. Великих // Электромагнитные волны & электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 5. – С. 6 – 9.
6. Дубровский, В.В. Обратная задача спектрального анализа и интерполяция по Л. Карлесону / В.В. Дубровский // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, вып. 3. – С. 468 – 471.
7. Садовничий, В.А. Об обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, Е.А, Пузанкова // Докл. Акад. наук. – 1999. – Т. 367, № 3. – С. 307 – 309.
8. Садовничий, В.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, Е.А. Пузанкова // Дифференц. уравн. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1695 – 1698.
9. Садовничий, В.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольнике / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, В.В. Дубровский (мл.) // Докл. Акад. наук. – 2001. – Т. 377, № 3. – С. 310 – 312.
10. О восстановлении потенциала в обратной задаче спектрального анализа / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, В.В. Дубровский (мл.), Е.А. Пузанкова // Докл. Акад. наук. – 2001. – Т. 380, № 4. – С. 462 – 464.
11. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике / А.И. Седов, Г.А. Закирова // Вестн. СамГУ, Естественнонаучная серия. – 2008. – № 2(61). – С. 34 – 42.
12. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для одного дифференциального оператора в частных производных с неядерной резольвентой / А.И. Седов. В.В. Дубровский //Электромагнитные волны & электронные системы. – 2005 – Т. 10, № 1 – 2. – С. 1 – 8.

Кафедра математического анализа,
Магнитогорский государственный университет
zakirova81@mail.ru

*Поступила в редакцию 22 сентября 2008 г.*