УДК 519.7

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА

А.В. Келлер

NUMERICAL SOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR DEGENERATE LINEAR SYSTEM OF EQUATIONS WITH SHOWALTER – SIDOROV INITIAL CONDITIONS

A.V. Keller

Предложены алгоритм и пример численного решения задачи оптимального управления вырожденной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Использованы начальные условия Шоуолтера–Сидорова для расширения спектра практического применения модели. На примере Леонтьева проведено сравнение с численным решением задачи оптимального управления системой леонтьевского типа с начальным условием Коши.

Ключевые слова: численное решение, оптимальное управление, система леонтьевского типа, метод фазового пространства.

The article proposes algorithm and example of numerical solution of the optimal control problem for degenerate linear system of ordinary differential equations with constant coefficients. By using the initial condition of Showalter – Sidorov we extend the range of practical applicability of this model. By example of Leontief we compare the results with the numerical solution of optimal control problem for Leontief type system with initial condition of Cauchy.

Keywords: numerical solution, optimal control problem, Leontief type system, method of phase space

Введение

В [1] предложен численный алгоритм решения задачи Коши

$$x(0) = x_0 \tag{1}$$

для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Sx + g, \tag{2}$$

основанный на идеях теории полугрупп операторов, здесь S – квадратная матрица порядка n. В [2], [3] этот подход был распространен на задачу (1) для вырожденной системы уравнений

$$L\dot{x} = Mx + f \tag{3}$$

с использованием идей теории вырожденных полугрупп операторов [4]. (Здесь L и M – квадратные матрицы, порядка n, причем $\det L = 0$). Одним из важных случаев системы

(3) является хорошо известная система В.В. Леонтьева «затраты-выпуск» с учетом запасов (см. в [5]), поэтому в [2] был предложен термин «система леонтьевского типа». Простота применяемого в [2], [3] алгоритма обеспечивает высокое качество получаемого программного продукта, что выгодно отличает данный алгоритм от использовавшихся ранее методов Эйлера, Рунге – Кутта, итерационных и других методов (см. библиографию в [6]).

В [7] рассмотрены задачи оптимального управления

$$J(v) = \min_{u \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}} J(u) \tag{4}$$

задачи Коши (1) для системы уравнений

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t), \tag{5}$$

где операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, функции $u : [0;T] \to \mathcal{U}$, $y : [0;T) \to \mathcal{Y}$, $T \in R_+$, $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}$ – непустое выпуклое подмножество пространства управлений $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}$, функционал качества $J = J(u)$ имеет вид

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} \left\| z^{(q)}(t) - z_0^{(q)} \right\|_N^2 dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^{\tau} \left\langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle_N dt. \tag{6}$$

В [8] рассмотрена задача оптимального управления (4) для уравнения (5) с обобщенным условием Шоуолтера – Сидорова

$$Px(0) = P(x_0). \tag{7}$$

В [9] представлен алгоритм численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\alpha L - M)^{-1} L\right]^p (x(0) - x_0) = 0 \tag{8}$$

для системы (3).

Основная цель данной статьи – нахождение численного решения задачи оптимального управления (4) для системы леонтьевского типа (3) с начальным условием Шоуолтера – Сидорова (8). Статья кроме введения и списка литературы содержит две части. В первой дается краткое теоретическое обоснование алгоритма и приводятся основные его этапы, во второй рассмотрено численное решение примера Леонтьева.

1. Задача оптимального управления с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n, причем $\det L = 0$. Пучок матриц $\mu L - M$ назовем регулярным, если существует число $\lambda \in C$ такое, что $\det(\lambda L - M) \neq 0$. Условие регулярности пучка матриц эквивалентно условию L-регулярности матрицы M [2], [3]. Поэтому, как показано в [4], гл. 4, при условии регулярности пучка существуют единственным образом определяемые матрицы H, S, M_0, L_1, Q порядка n, такие, что L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ матрицы M разлагается в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{l=0}^{p} \mu^l H^l M_0 (I - Q) + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{-l} S^{l-1} L_1 Q \tag{4}$$

в окрестности бесконечно удаленной точки, причем H – нильпотентная матрица со степенью нильпотентности p, Q – идемпотентная матрица, MM_0, M_0M, L_1L и LL_1 – диагональные матрицы с нулями и единицами на главной диагонали. Поскольку $\det(\lambda L - M) \neq 0$, то многочлен $\det(\lambda L - M) = 0$ имеет не более n различных нулей, которые расположены в круге радиуса a, а значит, при $|\mu| > a$ разложение (4) имеет место. Точка ∞ называется устранимой особой точкой L-резольвенты матрицы M , если $p = 0$ в (4); и полюсом порядка $p \in N$ в противном случае. В дальнейшем, немного отходя от классического стандарта, будем называть устранимую особую точку полюсом порядка нуль. Итак, пусть пучок $\mu L - M$ регулярен, и ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup N$; тогда можно выбрать число α и рассмотреть начальное условие Шоуолтера – Сидорова

$$\left[R_{\alpha}^{L}(M)\right]^{p}(x(0) - x_0) = 0 \tag{9}$$

для задачи оптимального управления (4) системой уравнений леонтьевского типа (5). Здесь $R_{\alpha}^{L}(M) = (\alpha L - M)^{-1} L$ – правая L-резольвента матрицы M , в отличие от ее левой L -резольвенты $L_{\alpha}^{L}(M) = L(\alpha L - M)^{-1}$.

Воспользуемся результатом, изложенным в [8]. При любых $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y}), x_0 \in \mathfrak{W}_y$ ($\mathfrak{W}_y$ – фазовое пространство уравнения (3)) и $u \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}(\mathcal{U})$ существует единственное решение $x \in H^1(\mathcal{X})$ задачи Коши с начальными условиями (2) для уравнения (3), имеющего вид

$$x(t) = (A_1 + A_2)(y + Bu)(t) + X^t x_0. \tag{10}$$

Зафиксируем в последнем уравнении $y = y(t)$ и x_0 и рассмотрим его как отображение

$$D : u \to x(u). \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть матрица M L-регулярна, $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, и $x_0 \in \mathfrak{W}_y$ фиксированы. Тогда отображение $D : \overset{\circ}{H}{}^{p+1}(\mathcal{U}) \to H^1(\mathcal{X})$, определенное в (11), непрерывно.*

Рассмотрим множество вектор-функций, зависящее от $n \times m + 1$ параметров

$$u(t) = \Phi(t, a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm}) \tag{12}$$

и такое, что при всех значениях параметров вектор-функции множества принадлежат $\overset{\circ}{H}{}_{\partial}^{p+1}$. Пусть множество (12) всюду плотно в $\overset{\circ}{H}{}_{\partial}^{p+1}$. Ограничив множество допустимых управлений фектор-функциями множества (12), найдем среди них ту, которая минимизирует функционал качества (6). Подставив в него (12) вместо u, выполнив необходимые преобразования, получим зависимость функционала от $n \times m$ переменных $J = J(a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm})$. После этого получаем значения параметров $\widehat{a_{11}}, \widehat{a_{12}}, ..., \widehat{a_{nm}}$, дающие минимум функции $J(a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm})$. Выбрав из множества (12) вектор-функцию, отвечающую именно этим значениям параметров, мы получим требуемое приближенное решение

$$\widehat{u(t)} = \Phi(t, \widehat{a_{11}}, \widehat{a_{12}}, ..., \widehat{a_{nm}}).$$

Введем в рассмотрение ряд множеств функций

$$u_m(t) = \Phi_m(t, a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm}),\ m = 1, 2, ...,$$

каждое из которых шире предыдущего в результате добавления дополнительных параметров. Через $\widehat{u}_m(t)$ обозначим m-ое приближение – вектор-функцию, дающую из всех вектор-функций m-го множества наименьшее значение функционала J.

Теорема 1. *Пусть Φ_m всюду плотно в $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}$, тогда $J(\widehat{u}_m(t)) \to J(v)$ при $m \to \infty$.*

Доказательство приведено в [10].

Теорема 2. *Для любого $u_m \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}_m$ справедлива оценка*

$$\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\| u_m^{(q)}(t) - v_t^{(q)} \right\|_{\mathfrak{U}}^2 dt \le \max \left\| \widehat{N}_q(t) \right\|^2 J(u_m),$$

где матрицы N_q из (4) и $\widehat{N}_q$ связаны равенством $N_q = \widehat{N}_q^T \widehat{N}_q$.

Доказательство приведено в [10].

В качестве управлений при построении итерационного процесса будем рассматривать многочлены вида

$$u_m(t) = \sum_{i=p+1}^{m} a_i t^i. \tag{13}$$

В качестве множества допустимых управлений будем расматривать шар

$$\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\| u_m^{(q)}(t) \right\|^2 dt \le d, \tag{14}$$

где m – максимальная степень многочлена, d – неотрицательная постоянная величина, a_i – коэффициенты многочлена.

Теорема 3. *Множество многочленов вида (13) всюду плотно в $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}$.*

Доказательство приведено в [10].

Алгоритм решения задачи оптимального управления состоит из двух основных этапов.

Этап 1 заключается в нахождении чисел $\alpha \in R$ и $p \in \{0\} \cup N$. Рассмотрим многочлен

$$\det(\mu L - M) = a_n \mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + ... + a_1\mu + a_0.$$

Поскольку $a_n = \det L$, то $a_n = 0$. Коэффициент a_l есть сумма слагаемых, каждое их которых есть произведение одного из миноров порядка l матрицы L на число, $l = 1, ..., n-1$ $a_0 = \det(-M)$. Поэтому степень многочлена $\det(\mu L - M)$ не выше ранга матрицы L. Итак,

$$\det(\mu L - M) = a_q \mu^q + a_{q-1}\mu^{q-1} + ... + a_1\mu + a_0,$$

где $q = \deg\det(\mu L - M) \le \mathrm{rankL}$. Поэтому, если взять число $\alpha \in R$ таким, что

$$|\alpha| > \max\left\{1, |a_q|^{-1}\left(\sum_{l=0}^{q} |\alpha_l|\right)\right\},$$

то $\det(\alpha L - M) \ne 0$, и, значит, существует матрица $(\alpha L - M)^{-1}$. Далее, считая, что матрица M обратима, представим $\det(\mu L - M) = \det M \det(\mu M^{-1}L - I)$. Зная, что порядок полюса в точке ∞ резольвенты $(\mu I - M^{-1}L)^{-1}$ равен нулю, легко найти, что порядок полюса L-резольвенты матрицы в точке ∞ равен $n - q$. Итак, числа α и $p = n - q$ найдены.

Тогда, находя значение k, с которого можно начинать считать приближенные проекторы, получим, что при

$$k > \frac{1}{|\alpha|} \sum_{l=q+1}^{n} |\alpha_l| + 1$$

мы не сможем оказаться даже вблизи точки L-спектра оператора M.

Этап 2 заключается в поиске многочлена, минимизирующего функционал. Воспользовавшись результатами [2], перепишем функционал (6) в виде

$$\begin{aligned} J(u) \;=\; & \sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \|C(-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)\tfrac{d^k}{dt^k}(f(t)+B\sum_{i=2}^{m} a_i t^i)+U^t x_0+\\ & +\int_0^\tau R^{t-s}Q(f(s)+B\sum_{i=2}^{m} a_i s^i)ds)^{(q)} - z_0^{(q)}\|^2_{\mathfrak{N}}dt+\\ & +\sum_{q=0}^{p+1}\int_0^\tau \langle N_q(\sum_{i=2}^{m} a_i t^i)^{(q)}(t), (\sum_{i=2}^{m} a_i t^i)^{(q)}(t)\rangle_{\mathfrak{N}} dt. \end{aligned}$$

Перепишем функционал (6) в виде функций от переменных u_m) – коэффициентов многочлена допустимого управления. Затем воспользуемся минимизацией функции нескольких переменных, взяв за основу методы выпуклого программирования. При его реализации будем учитывать условие принадлежности многочлена управления множеству допустимых управлений.

2. Пример Леонтьева

Взяв в качестве матриц

$$L = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{21}{20} \\ \frac{1}{100} & \frac{103}{200} & \frac{8}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{5} & \frac{-11}{20} \\ \frac{-7}{25} & \frac{10304189}{11996000} & \frac{-70836357}{119960000} \\ \frac{-4}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{13}{15} \end{pmatrix},$$

рассмотрим динамическую систему Леонтьева

$$L\,\dot{x} = Mx + u. \tag{16}$$

Если переобозначить $L = B$, $M = I - A$, то матрицы B и A почти совпадут с матрицами из классического примера [5]. «Почти»означает, что элементы m_{22} и m_{23} подобраны специально с целью упростить вычисления и отличаются от приведенных в примере чисел $\frac{22}{25}$ и $-\frac{3}{5}$ на величины $-\frac{252291}{11996000}$ и $\frac{1139643}{119960000}$ соответственно.

В.В. Леонтьев рассматривал взаимосвязи между тремя отраслями экономики – сельским хозяйством, промышленностью и домашними хозяйствами. Элемент a_{ij} матрицы A означает количество продукции i-й отрасли, необходимой для производства единицы продукции j-й отрасли. Элемент b_{ij} матрицы B представляет определенный технологический запас особого типа благ, производимой отраслью, который используется в отрасли j для производства единицы ее продукции. Другими словами, каждый столбец матрицы B описывает потребность некоторой отрасли в физическом капитале (в расчете на единицу ее валового выпуска) таким же образом, как соответствующий столбец матрицы A описывает ее затраты. Именно поэтому последняя строка матрицы B содержит только нулевые элементы, так как труд невозможно запасти.

Перейдя к расчетам найдем $q = \deg\det(\mu L - M) = 2$, $p = n - q = 1$, $\alpha = 3$, $k = 100$. Пусть матрица $\widehat{N}_0$ будет диагональной: все элементы ее главной диагонали равны 0,1. То есть 10 процентов средств, собранных в виде налогов, либо направленных на финансирование отраслей, идет на содержание государственного аппарата. Пусть $d = 200$. Возьмем $x_0 \in \mathfrak{W}_y$

$$x_0 = \left[\frac{5}{2};\ 3;\ \frac{28}{13}\right].$$

Тогда наблюдение $z_0(t)$, исходя из условия о равномерном увеличении валового выпуска отраслей за единичный отрезок, времени будет выглядеть так

$$z_0(t) = \left[\frac{5}{2} + 3t;\ 3 + 4t;\ \frac{28}{13} + 4t\right].$$

Так как $p = 1$, в качестве оптимального управления будем рассматривать многочлен второй степени. В качестве функционала получим

$$\begin{aligned} J(u) \;=\;& -28,411031u_{11}u_{12} + 8,9863884u_{12}^2 + 27,586248u_{11}^2 + 2,931559165u_{13}^2 - \\ & -7,526036725u_{21}u_{22} + 1,88479004u_{22}u_{13} + 0,68415325u_{13}u_{11} + \\ & +0,453773u_{21}u_{23} + 30,1913248u_{21}u_{11} + 0,7331647u_{13}u_{21} + \\ & +4,863240111u_{13}u_{23} - 14,6617031u_{22}u_{11} + 2,86544218u_{13}u_{12} + \\ & +2,2858u_{12}u_{23} - 15,234u_{12}u_{21} + 9,73821u_{12}u_{22} + 0,2026811u_{11}u_{23} + \\ & +1,554u_{23}u_{22} - 16,74124801u_{12} - 9,24457347u_{13} - 5,338387u_{11} - \\ & -30,3891247u_{21} + 7,66626u_{22} - 4,7948792u_{23} + 2,715337232u_{11}^2 + \\ & +8,412766u_{21}^2 + 2,473233759u_{23}^2 + 60,03724539. \end{aligned}$$

Приведем значения коэффициентов вектор-функции u, при которых функционал минимален, для чего продифференцируем функционал по каждому из коэффициентов, приравняем полученные производные к нулю и решим систему уравнений.

$$\begin{aligned} u_{01} &= 0, & u_{02} &= 0, & u_{03} &= 0, \\ u_{11} &= 7,406403247, & u_{12} &= 11,66295383, & u_{13} &= -0,9539033784, \\ u_{21} &= -5,631563350, & u_{22} &= -10,14607244, & u_{23} &= -0,08166019352. \end{aligned}$$

При этом функционал равен $J(v) = 4,017151931$.

Приведем решение задачи с использованием алгоритма.

$$\begin{aligned} u_{01} &= 0, & u_{02} &= 0, & u_{03} &= 0, \\ u_{11} &= 7,461857411, & u_{12} &= 11,760767311, & u_{13} &= -0,954971428, \\ u_{21} &= -5,693110356, & u_{22} &= -10,285817347, & u_{23} &= -0,081086317. \end{aligned}$$

Функционал, вычисленный по алгоритму, равен $\widehat{J}(\widetilde{v}) = 3,936587$.

При подстановке в функционал, вычисленный точно, значений коэффициентов, вычисленных приближенно, получаем $J(\widetilde{v}) = 4,0194539019$.

Сравнение результатов, полученных под действием управления v и под действием управления $\widetilde{v}$, вычисленного по алгоритму, показывает незначительные расхождения.

Приведем решение задачи оптимального управления с начальными условиями Коши

$$\begin{aligned} u_{01} &= 0, & u_{02} &= 0, & u_{03} &= 0, \\ u_{11} &= 7,461897495, & u_{12} &= 11,760772705, & u_{13} &= -0,954971313, \\ u_{21} &= -5,692871094, & u_{22} &= -10,285858154, & u_{23} &= -0,081085205. \end{aligned}$$

Функционал, вычисленный по алгоритму, равен $\widehat{J}(\widetilde{v}) = 3,921287$.

При подстановке в функционал, вычисленный точно, значений коэффициентов, вычисленных приближенно, получаем $J(\widetilde{v}) = 4,020573773$.

Таким образом, расхождение численных решений задачи оптимального управления вырожденной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши и Шоуолтера–Сидорова также незначительно. Это позволяет предположить, что экономический смысл начального условия Шоуолтера–Сидорова в рассматриваемых задачах аналогичен условию Коши.

Литература

1. Павлов, Б.В. Об одном методе численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Б.В. Павлов, А.Я. Повзнер // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1973. – Т. 13, № 4.– С. 1056 – 1059.
2. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк , С.В. Брычев // Изв. ВУЗ. Матем. – 2003. – № 8. – С. 46 – 52.
3. Свиридюк, Г.А. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Г.А. Свиридюк, И.В. Бурлачко // ЖВМиМФ. – 2003. – Т. 43, № 11. – С. 1677 – 1683.
4. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semi-groups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.
5. Леонтьев, В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев.– М.: Экономика, 1997.
6. Чистяков, В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003.
7. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Изв. ВУЗ. Матем. – 1996.– № 12.– С. 75 – 83.
8. Федоров, В.Е. Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – Т. 9, № 2.– С. 92 – 102.
9. Келлер, А.В. Алгоритм численного решения обобщенной задачи Шоуолтера-Сидорова для системы уравнений леонтьевского типа // Вычислительная математика: труды XIV Байкальской Междунар. шк.-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск, 2008. – Т. 3. – С. 96 – 102.
10. Келлер, А.В. Об оптимальном управлении системами леонтьевского типа // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск, 2006. – № 1(12). – С. 82 – 89.

Кафедра общеобразовательных дисциплин,
Южно-Уральский государственный университет
alevtinak@inbox.ru

Поступила в редакцию 25 сентября 2008 г.