УДК 532.529.5

НОВЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

В.С. Суров, И.В. Березанский

Разработка математически корректных и физически непротиворечивых моделей много-фазных сред является актуальной задачей, поскольку не все существующие к настоящему времени модели гетерогенных сред являются таковыми. В данной работе для многокомпонентной среды предлагаются две новые модели - в одно- и многоскоростном приближениях. Модели основаны на законах сохранения. Учитываются вязкие и теплопроводящие свойства смеси. Для приведенных моделей строятся автомодельные решения типа бегущей волны. На примере бинарной смеси расчеты, произведенные в одно- и многоскоростном приближениях. Показывается, что при использовании релаксационных законов для диссипативных процессов системы уравнений относятся к гиперболическому типу.

Ключевые слова: многокомпонентные вязкие теплопроводные смеси, одно- и многоскоростные среды, гиперболические системы уравнений в частных производных, автомодельные решения.

Введение

Односкоростные модели многокомпонентной среды используются при моделировании волновых процессов во вспененных жидкостях и полимерах [1], в пузырьковых жидкостях [2], для локализации контактных поверхностей в многожидкостной гидродинамике [3]. Включение в уравнения смеси сил вязкого трения и теплопроводности расширяет сферу приложения модели и дает возможность проводить расчеты течений, например, углеводородных смесей, биологических жидкостей и т.д. В литературе, помимо использованной в настоящей работе модели односкоростной смеси из [4], имеются и другие гиперболические модели, описывающие течения бинарных смесей (см. [5–7]), которые, в отличие от [4], не распространяются на случай с произвольным числом фракций в смеси.

Если при рассмотрении явления распространения тепла в односкоростных гетерогенных средах воспользоваться законом Фурье, то тепловые волны будут перемещаться с бесконечными скоростями. Если же вместо закона Фурье применить закон Максвелла – Каттанео [8–9], учитывающий релаксацию теплового потока, то движение волн происходит с конечными скоростями, что в свою очередь связано с принадлежностью системы уравнений к гиперболическому типу [10].

Включение сил вязкого трения в уравнения модели односкоростной многокомпонентной среды из [4] также приводит к появлению волн с бесконечно большими скоростями распространения. В настоящей работе представлена модель среды, свободная от этого парадокса, в которой по аналогии с подходом Максвелла – Каттанео в теплопередаче также учтена релаксация вязких напряжений.

Вязкие напряжения вводятся в уравнения модели односкоростной многокомпонентной среды из [4] на уровне смеси в целом, которые по виду совпадают с газодинамическими. В газовой динамике широко используется упрощенная формула для расчета вязких напряжений [11], которая для одномерных течений имеет вид

$$\sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

где μ – коэффициент вязкости. Но применение этого соотношения приводит к потере гиперболичности исходной системы уравнений. Чтобы остаться в рамках гиперболической системы, вместо выражения (1) предлагается использовать соотношение

$$\tau_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

Подобный прием впервые использовался в теплопередаче для исключения парадокса, связанного с бесконечной скоростью распространения тепловых волн. С точки зрения физики это означает, что силы вязкости начинают действовать не мгновенно, а в прошествии времени релаксации τ_σ.

Отметим также, что уравнение (2) есть упрощенный вариант реологического выражения для жидкости Максвелла [12]. С этой точки зрения смесь в целом может рассматриваться как вязкоупругая среда. Для вязкоупругих жидкостей время релаксации может быть найдено из соотношения $\tau_\sigma = \mu/\mathrm{G}$, где G – модуль упругости смеси.

При рассмотрении многоскоростных сред в работе использовалась модель гетерогенной среды из [13], основанная на законах сохранения. Особенность этой модели состоит в том, что в ней вводится такое состояние среды как смесь в целом, характеризуемая осредненными значениями скорости, плотности и т.д., уравнения для которых по виду совпадают с газодинамическими. К этим уравнениям добавляются соотношения, выражающие законы сохранения для отдельных компонентов смеси. Давление полагалось общим для всех фракций смеси.

В настоящей работе использована модификация модели из [13], учитывающая вязкие и теплопроводящие свойства смеси.

1. Гиперболическая модель односкоростной вязкой теплопроводной среды

Рассмотрим n-компонентную смесь с первыми m сжимаемыми фракциями [4], в уравнения которой включены эффекты вязкости и теплопроводности

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\, \mathbf{u}) = 0, \quad \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] + \nabla (p - \sigma) = \mathbf{F}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \right] + \mathrm{div} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \frac{p - \sigma}{\rho} \right) \mathbf{u} + \mathbf{W} \right] = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \\
\tau_W \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{W} \right) + \chi \nabla T + \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad \tau_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \sigma \right) - \mu\, \mathrm{div}\, (\mathbf{u}) + \sigma = 0; \\
\frac{\partial \alpha_i \rho_i^0}{\partial t} + \mathrm{div} \left(\alpha_i \rho_i^0 \mathbf{u} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} J_{ik}, \\
\rho_i \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon_i \right) + \frac{\alpha_i p}{\rho_i} \left[\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} J_{ik} - \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho_i \right) \right] = \\
= \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} Q_{ik} - \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} J_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m - 1; \\
\frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + \mathrm{div} \left(\alpha_j \mathbf{u} \right) = \frac{1}{\rho_j^0} \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} J_{jk}, \quad j = m + 1, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{3}$$

Поведение сжимаемых фракций описывается калорическими уравнениями состояния $\varepsilon_i = \varepsilon_i(p, \rho_i^0)$, поэтому выражение для удельной внутренней энергии смеси, учитывая равенства $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i$, может быть записано как

$$\varepsilon = \varepsilon\,(\rho, p, \alpha_1, \rho_1^0, \ldots, \alpha_{m-1}, \rho_{m-1}^0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n). \tag{4}$$

Среднюю температуру определим в соответствии с формулой

$$T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i, \tag{5}$$

где T_i – локальная температура i-й фракции, которая находится из термического уравнения состояния $T_i = T_i(p,\rho_i^0)$. Формулу (5) перепишем так

$$T = T\,(\rho, p, \alpha_1, \rho_1^0, \;\ldots\;, \alpha_{m-1}, \rho_{m-1}^0, \alpha_{m+1}, \;\ldots\;, \alpha_n). \tag{6}$$

Можно показать, что система уравнений (3) при отсутствии массовых сил, фазовых и химических превращений для одномерных плоских течений приводится к виду

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2\frac{\partial u}{\partial x} + H\frac{\partial W}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial W}{\partial t} + u\frac{\partial W}{\partial x} + k_\rho\frac{\partial\rho}{\partial x} + k_p\frac{\partial p}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m-1}\left(k_{\alpha_i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x} + k_{\rho_i^0}\frac{\partial\rho_i^0}{\partial x}\right) + \sum_{j=m+1}^{n} k_{\alpha_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x} + \frac{W}{\tau_W} = 0\\
\frac{\partial\sigma}{\partial t} + u\frac{\partial\sigma}{\partial x} - \frac{\mu}{\tau_\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma}{\tau_\sigma} = 0;\\
\frac{\partial\rho_i^0}{\partial t} + u\frac{\partial\rho_i^0}{\partial x} + \rho_i^0 G_i\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial\alpha_i}{\partial t} + u\frac{\partial\alpha_i}{\partial x} + \alpha_i(1-G_i)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad i = 1,\ldots,m-1;\\
\frac{\partial\alpha_j}{\partial t} + u\frac{\partial\alpha_j}{\partial x} + \alpha_j\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad j = m+1,\ldots,n,
\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$k_\rho = \frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial\rho}, \quad k_p = \frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial p}, \quad k_{\alpha_1} = \frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial\alpha_1}, \quad k_{\rho_1^0} = \frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial\rho_1^0}, \quad \ldots, \quad k_{\alpha_n} = \frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial\alpha_n}.$$

Соответствующие выражения для H, G_i и адиабатической скорости звука c имеют вид

$$H = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial p} + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial p}\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\rho_i^0}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha_i}{\rho_i^0}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_i} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_i^0}\right)\right]^{-1}, \quad G_i = \frac{1}{\rho_i^0}\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\rho_i^0}\right)^{-1}\left(\frac{p}{\rho_i^0} - \rho c^2\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial p}\right),$$

$$c = \sqrt{\frac{\frac{p-\sigma}{\rho} - \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} - \sum\limits_{i=1}^{m-1}\left[\frac{p}{\rho_i^0}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_i^0}\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\rho_i^0}\right)^{-1} + \alpha_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_i}\left(1 - p\left(\left(\rho_i^0\right)^2\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\rho_i^0}\right)^{-1}\right)\right] - \sum\limits_{j=m+1}^{n}\alpha_{\mathrm{j}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_{\mathrm{j}}}}{\rho\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial p} + \sum\limits_{i=1}^{m-1}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial p}\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\rho_i^0}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha_i}{\rho_i^0}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_i} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_{\mathrm{i}}^0}\right)\right]}}.$$

Систему уравнений (7) перепишем в векторной форме

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \mathrm{A}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{U} = \left(\rho,\ u,\ p,\ \sigma, \rho_1^0,\ \alpha_1,\ \dots\ , \rho_{m-1}^0,\ \alpha_{m-1}, \alpha_{m+1},\ \dots\ , \alpha_n,\ W\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{S} = (0,\ 0, 0,\ -\sigma/\tau_\sigma,\ \dots\ ,\ 0,\ -W/\tau_W)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u & 1/\rho & -1/\rho & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \rho c^2 & u & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & H \\ 0 & -\mu/\tau_\sigma & 0 & u & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1^0 G_1 & 0 & 0 & u & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1(1-G_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \rho_{m-1}^0 G_{m-1} & 0 & 0 & 0 & u & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{m-1}(1-G_{m-1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{m+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_n & 0 & 0 & u & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & u & 0 \\ k_\rho & 0 & k_p & 0 & k_{\rho_1^0} & k_{\alpha_1} & \dots & k_{\rho_{m-1}^0} & k_{\alpha_{m-1}} & k_{\alpha_{m+1}} & \dots & k_{\alpha_n} & u \end{pmatrix}.$$

Здесь T – оператор транспонирования. Характеристическое уравнение системы (7) имеет вид

$$\left[\xi - (u - c_1)\right]\left[\xi - (u - c_2)\right](\xi - u)^{n+m-2}\left[\xi - (u + c_2)\right]\left[\xi - (u + c_1)\right] = 0, \tag{9}$$

где $\xi = dx/dt$. Значения скоростей c_1 и c_2 рассчитываются по формулам

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{c^2 + \omega^2 + k_p H + Z\right\}},$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{c^2 + \omega^2 + k_p H - Z\right\}},$$

где $\omega^2 = \frac{\mu}{\rho\tau_\sigma}$,

$$Z = \sqrt{c^4 + H\left[k_p\left(2c^2 + 2\omega^2 + k_p H\right) + 4\left(k_\rho + \frac{1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{m-1}\left(k_{\rho_i^0}\rho_i^0 G_i + k_{\alpha_i}\alpha_i(1-G_i)\right) + \sum_{j=m+1}^{n} k_{\alpha_j}\alpha_j\right)\right)\right]}.$$

Корни характеристического уравнения (9) – действительные числа. Кроме того, матрицу A можно представить в виде

$$\mathrm{A} = \Omega^{-1}\Lambda\Omega, \tag{10}$$

поэтому система (7) гиперболическая. Отметим, что система (7) к дивергентному виду не приводится.

Для бинарной смеси идеального газа с несжимаемой второй составляющей газодинамическая часть системы уравнений (7) имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p-\sigma)}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}+H\frac{\partial W}{\partial x}=0, \tag{11}$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+u\frac{\partial\alpha}{\partial x}-(1-\alpha)\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

где $c=\sqrt{\frac{\gamma(p-\sigma)}{\alpha\rho}}$, $H=\frac{\gamma-1}{\alpha}$, α – объемная доля газа в смеси. Выражение для закона Фурье с тепловой релаксацией, учитывая соотношение $T=T(p,\rho,\alpha)$, перепишем как

$$\frac{\partial W}{\partial t}+u\frac{\partial W}{\partial x}+k_p\frac{\partial p}{\partial x}+k_\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}+k_\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{W}{\tau_W}=0, \tag{12}$$

где

$$k_\rho=\frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial\rho},\quad k_p=\frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial p},\quad k_\alpha=\frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial\alpha}.$$

Систему (2), (11) и (12) представим в векторной форме (8), в которой

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\rho\\u\\p\\\sigma\\\alpha\\W\end{pmatrix},\quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix}u&\rho&0&0&0&0\\0&u&1/\rho&-1/\rho&0&0\\0&\rho c^2&u&0&0&H\\0&-\rho\omega^2&0&u&0&0\\0&\alpha-1&0&0&u&0\\k_\rho&0&k_p&0&k_\alpha&u\end{pmatrix},\quad \mathbf{S}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-\sigma/\tau_\sigma\\0\\-W/\tau_W\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Матрица A имеет шесть действительных собственных значений: $u\pm c_1$, u, u, $u\pm c_2$, где

$$c_1=\sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{c^2+\omega^2+k_pH+\sqrt{c^4+H\left[k_p\left[2(c^2+\omega^2)+k_pH\right]+4\left(k_\rho-\tfrac{k_\alpha}{\rho}(1-\alpha)\right)\right]}\right\}},$$
$$c_2=\sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{c^2+\omega^2+k_pH-\sqrt{c^4+H\left[k_p\left[2(c^2+\omega^2)+k_pH\right]+4\left(k_\rho-\tfrac{k_\alpha}{\rho}(1-\alpha)\right)\right]}\right\}}. \tag{14}$$

Отметим, что c_1 определяет скорость распространения газодинамических возмущений, а c_2 – тепловых. Соответствующие матрицы Ω и Λ в представлении (10) имеют вид

$$\Omega=\begin{pmatrix}-\frac{k_\rho}{c_1}&\rho\left(\frac{c_1^2}{H}-k_p\right)&-\frac{c_1}{H}&\frac{1}{c_1}\left(\frac{c_1^2}{H}-k_p\right)&-\frac{k_\alpha}{c_1}&1\\ \frac{k_\rho}{c_1}&\rho\left(\frac{c_1^2}{H}-k_p\right)&\frac{c_1}{H}&-\frac{1}{c_1}\left(\frac{c_1^2}{H}-k_p\right)&\frac{k_\alpha}{c_1}&1\\ -\frac{k_\rho}{c_2}&\rho\left(\frac{c_2^2}{H}-k_p\right)&-\frac{c_2}{H}&\frac{1}{c_2}\left(\frac{c_2^2}{H}-k_p\right)&-\frac{k_\alpha}{c_2}&1\\ \frac{k_\rho}{c_2}&\rho\left(\frac{c_2^2}{H}-k_p\right)&\frac{c_2}{H}&-\frac{1}{c_2}\left(\frac{c_2^2}{H}-k_p\right)&\frac{k_\alpha}{c_2}&1\\ 1&0&0&0&-\frac{\rho}{\alpha-1}&0\\ 0&0&0&1&\frac{\rho\omega^2}{\alpha-1}&0\end{pmatrix},$$
$$\Lambda=\begin{pmatrix}u-c_1&0&0&0&0&0\\0&u+c_1&0&0&0&0\\0&0&u-c_2&0&0&0\\0&0&0&u+c_2&0&0\\0&0&0&0&u&0\\0&0&0&0&0&u\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Подробнее рассмотрим пузырьковую жидкость. Без потери точности можно считать, что температура несжимаемой фракции постоянна, т.е. $T_2 = \text{const}$, поскольку ее доля в смеси значительна. Это предположение снимается при учете сжимаемости жидкости. Выражение для средней температуры (5) дает

$$T = \frac{\alpha^2 p}{\left[\rho - \rho_2^0(1-\alpha)\right] R} + (1-\alpha)T_0, \tag{16}$$

где T_0 – начальная температура среды, R – газовая постоянная. С использованием (16) коэффициенты k_ρ, k_p и k_α, которые входят в соотношения (14), принимают вид:

$$\begin{gathered} k_\rho = -\frac{\alpha^2 \chi p}{\tau_W [\rho - \rho_2^0(1-\alpha)]^2 R}, \\ k_p = \frac{\alpha^2 \chi}{\tau_W \left[\rho - \rho_2^0(1-\alpha)\right] R}, \\ k_\alpha = \frac{\chi}{\tau_W}\left(\frac{\alpha p(2\rho + \alpha\rho_2^0)}{[\rho - \rho_2^0(1-\alpha)]^2 R} - T_0\right). \end{gathered} \tag{17}$$

В частности, для водно-воздушной смеси при нормальных условиях и объемной доле газовой составляющей $\alpha = 0{,}1$ (ρ_2^0=1000 кг/м^3), значения скоростей c_1, c_2 и c равны 39,38, 2,06 и 39,44 м/с соответственно. В расчетах коэффициент теплопроводности смеси определялся из выражения

$$\chi = \frac{1}{\rho}\left(\rho_1\chi_1 + \rho_2\chi_2\right),$$

где $\chi_1 = 2,58 \times 10^{-2}$ кг·м/(с^3 К) – для воздуха, $\chi_2 = 60,2 \times 10^{-2}$ кг·м /(с^3 К) – для воды, а коэффициент τ_W =10 с [14]. Вязкость смеси полагалась равной вязкости жидкости $\mu = 10^{-3}$ кг/(м с), τ_σ= 0,1 с. Значения определяющих параметров гетерогенной смеси, в отличие от «чистых» газов, существенно зависят от коэффициента тепловой релаксации τ_W и в меньшей степени от μ и τ_σ.

2. Модель многоскоростной вязкой теплопроводной среды

Для бинарной смеси с объемной долей идеального газа α и несжимаемой второй составляющей уравнения многоскоростной модели из [13], в которой дополнительно учтены вязкостные и теплопроводящие свойства смеси, принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(p-\sigma)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2\frac{\partial u}{\partial x} + H\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \tau_\sigma\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} + u\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + \sigma = \mu\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + u\frac{\partial W}{\partial x} + k_p\frac{\partial p}{\partial x} + k_\rho\frac{\partial\rho}{\partial x} + k_\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{W}{\tau_W} = 0, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u_\mathrm{s}\frac{\partial\alpha}{\partial \mathrm{x}} - (1-\alpha)\frac{\partial u_\mathrm{s}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_\mathrm{s}}{\partial t} + u_s\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial p}{\partial x} - G\frac{\partial\alpha}{\partial x} = S, \end{gathered} \tag{18}$$

где

$$c = \sqrt{\frac{\gamma(p-\sigma)}{\alpha\rho}}, \quad H = \frac{\gamma-1}{\alpha}, \quad G = \frac{p}{(1-\alpha)\rho_\mathrm{s}},$$

$$k_\rho = \frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial\rho}, \quad k_p = \frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial p}, \quad k_\alpha = \frac{\chi}{\tau_W}\frac{\partial T}{\partial\alpha}.$$

Характеристическое уравнение системы (18) определяется из соотношения

$$\begin{vmatrix} \xi-u & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi-u & -1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c^2 & \xi-u & 0 & -H & 0 & 0 \\ 0 & \mu/\tau_\sigma & 0 & \xi-u & 0 & 0 & 0 \\ -k_\rho & 0 & -k_p & 0 & \xi-u & -k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi-u_s & 1-\alpha \\ 0 & 0 & -1/\rho_s & 0 & 0 & G & \xi-u_s \end{vmatrix} = 0,$$

или, раскрывая определитель, получим

$$\begin{gathered} \lambda(\xi) = \left[(\xi - u_{\mathrm{s}})^2 - (1-\alpha)G\right](\xi - u)^5 + \\ + \left\{ \frac{(1-\alpha)k_\alpha H}{\rho_s} - \left[(\xi - u_s)^2 - (1-\alpha)G\right]\left(c^2 + k_p H + \frac{\mu}{\rho\tau_\sigma}\right)\right\}(\xi - u)^3 + \\ + \left\{ H\left[(\xi - u_{\mathrm{s}})^2 - (1-\alpha)G\right]\left(\frac{\mu k_p}{\rho\tau_\sigma} - k_\rho\right) - \frac{\mu(1-\alpha)k_\alpha H}{\rho_s\rho}\right\}(\xi - u) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Выписать аналитические выражения для всех корней уравнения (19) не удается. Однако, если в выражении (19) положить $k_\alpha = 0$, то оно преобразуется к виду

$$\begin{gathered} \lambda_1(\xi) = (\xi - u)\left[(\xi - u_{\mathrm{s}})^2 - (1-\alpha)G\right] \times \\ \times \left[(\xi - u)^4 - \left(c^2 + k_p H + \tfrac{\mu}{\rho\tau_\sigma}\right)(\xi - u)^2 - \left(k_\rho - \tfrac{\mu k_p}{\rho\tau_\sigma}\right)H\right] = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

корни которого

$$u,\ \ u \pm c_1,\ \ u \pm c_2,\ \ u_{\mathrm{s}} \pm c_3,$$

где

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{c^2 + \omega^2 + k_p H + \sqrt{c^4 + H\left(k_p\left[2(c^2+\omega^2) + k_p H\right] + 4k_\rho\right)}\right\}},$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{c^2 + \omega^2 + k_p H - \sqrt{c^4 + H\left(k_p\left[2(c^2+\omega^2) + k_p H\right] + 4k_\rho\right)}\right\}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{p}{\rho_{\mathrm{s}}}}.$$

Отметим, что для газожидкостных систем условие $k_\alpha = 0$ практически не меняет вид характеристического полинома, что видно из рис. 1, где приведены зависимости $\lambda(\xi)$ и $\lambda_1(\xi)$ для водно-воздушной смеси с параметрами: $\alpha = 0,9$, $T_0 = 293$ К, $\rho_1^0 = 1,19$ кг/м^3, γ =1,4, ρ_{s} =1000 кг/м^3, $\chi = 2,58 \times 10^{-2}$ кг·м /(с^3 К), $\chi_{\mathrm{s}} = 60,2 \times 10^{-2}$ кг·м/(с^3 К), $\tau_W = 10^{-2}$ с, μ = 0,01 кг/(м с), τ_σ=0,1 с. С точностью до графического представления полиномы (19) и (20) совпадают. Для других многокомпонентных систем условие $k_\alpha = 0$ может оказаться неприемлемым, в этом случае корни характеристического уравнения необходимо определять численно из (19).

3. Автомодельные решения

Решение системы (7) будем искать в виде $\rho = \rho(\xi)$, $u = u(\xi)$, $p = p(\xi)$, $\sigma = \sigma(\xi)$, $W = W(\xi)$, $\rho_i^0 = \rho_i^0(\xi)$, $\alpha_i = \alpha_i(\xi)$, $\alpha_j = \alpha_j(\xi)$, где $\xi = x - Dt$. При учете соотношений

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -D\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}, \tag{21}$$

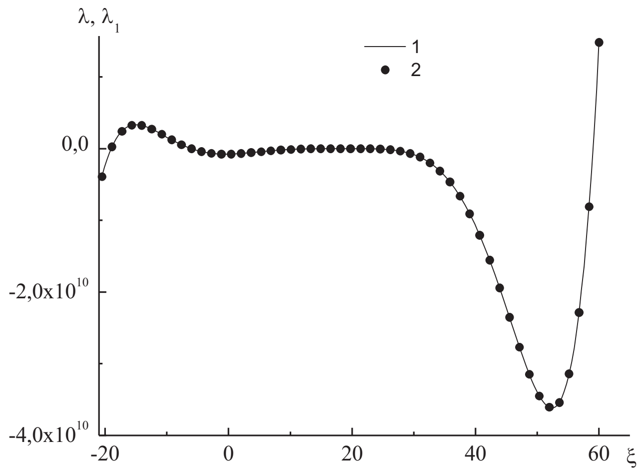

Рис. 1. Зависимости $\lambda(\xi)$ и $\lambda_1(\xi)$ (кривые *1* и *2*) для водно-воздушной смеси

система (7) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(u-D)\frac{d\rho}{d\xi}+\rho\frac{du}{d\xi}=0,\quad (u-D)\frac{du}{d\xi}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\xi}-\frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{d\xi}=0,\quad (u-D)\frac{dp}{d\xi}+\rho c^2\frac{du}{d\xi}+H\frac{dW}{d\xi}=0,$$
$$(u-D)\frac{dW}{d\xi}+k_\rho\frac{d\rho}{d\xi}+k_p\frac{dp}{d\xi}+\sum_{i=1}^{m-1}\left(k_{\alpha_i}\frac{d\alpha_i}{d\xi}+k_{\rho_i^0}\frac{d\rho_i^0}{d\xi}\right)+\sum_{j=m+1}^{n}k_{\alpha_j}\frac{d\alpha_j}{d\xi}+\frac{W}{\tau_W}=0,$$
$$(u-D)\frac{d\sigma}{d\xi}-\frac{\mu}{\tau_\sigma}\frac{du}{d\xi}+\frac{\sigma}{\tau_\sigma}=0,\quad (u-D)\frac{d\rho_i^0}{d\xi}+\rho_i^0G_i\frac{du}{d\xi}=0,$$
$$(u-D)\frac{d\alpha_i}{d\xi}+\alpha_i(1-G_i)\frac{du}{d\xi}=0,\quad i=1,\ldots,m-1;$$
$$(u-D)\frac{d\alpha_j}{d\xi}+\alpha_j\frac{du}{d\xi}=0,\quad j=m+1,\ldots,n.$$

В частности, для бинарной смеси идеального газа с несжимаемой второй составляющей соответствующая система уравнений запишется как

$$\begin{gathered}(u-D)\frac{d\rho}{d\xi}+\rho\frac{du}{d\xi}=0,\quad (u-D)\frac{du}{d\xi}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\xi}-\frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{d\xi}=0,\\ (u-D)\frac{dp}{d\xi}+\rho c^2\frac{du}{d\xi}+H\frac{dW}{d\xi}=0,\\ (u-D)\frac{dW}{d\xi}+k_\rho\frac{d\rho}{d\xi}+k_p\frac{dp}{d\xi}+k_\alpha\frac{d\alpha}{d\xi}+\frac{W}{\tau_W}=0,\\ (u-D)\frac{d\sigma}{d\xi}-\frac{\mu}{\tau_\sigma}\frac{du}{d\xi}+\frac{\sigma}{\tau_\sigma}=0,\quad (u-D)\frac{d\alpha}{d\xi}-(1-\alpha)\frac{du}{d\xi}=0.\end{gathered}\tag{22}$$

Систему (22) перепишем в удобном для интегрирования виде

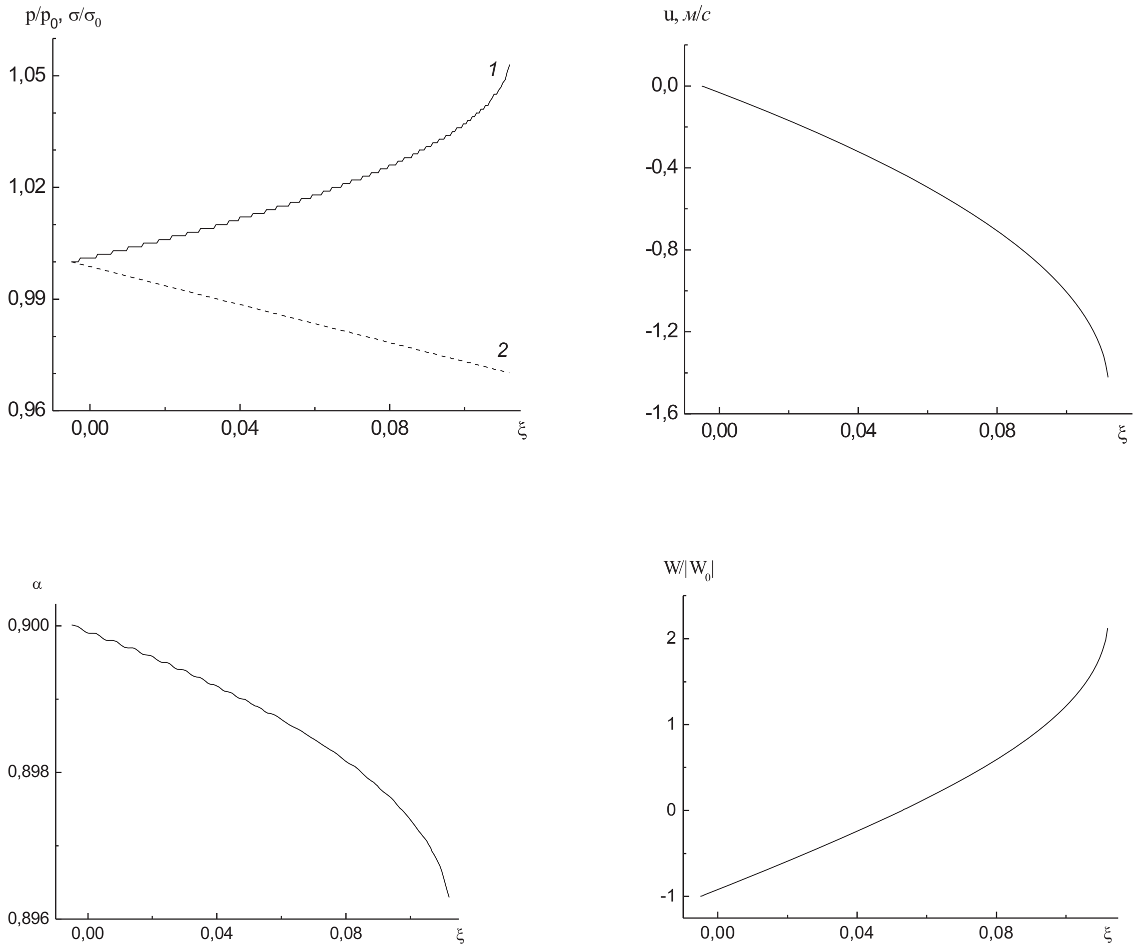

Рис. 2. Зависимости $p(\xi)/p_0$ (кривая *1*), $\sigma(\xi)/\sigma_0$ (*2*), $u(\xi)$, $\alpha(\xi)$, $W(\xi)/|W_0|$ для водно-воздушной смеси (односкоростная модель)

$$\frac{du}{d\xi} = \Psi, \quad \frac{d\rho}{d\xi} = A\Psi, \quad \frac{d\sigma}{d\xi} = E\Psi + F, \quad \frac{d\alpha}{d\xi} = B\Psi,$$
$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{F}{\Phi}\left[H\left(k_\rho A + k_\alpha B - \frac{EW}{\tau_W F}\right) - \rho(u-D)\left(c^2 - \frac{HW}{\tau_W F}\right)\right], \tag{23}$$
$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{1}{\Phi}\left[\rho c^2\left(\frac{W}{\tau_W} + k_p F\right) - (u-D)\left\{\frac{W}{\tau_W}\left[\rho(u-D) - E\right] + F\left(k_\rho A + k_\alpha B\right)\right\}\right],$$

где

$$A = -\frac{\rho}{u-D}, \quad B = \frac{1-\alpha}{u-D}, \quad E = \frac{\mu}{\tau_\sigma(u-D)}, \quad F = -\frac{\sigma}{\tau_\sigma(u-D)},$$
$$\Phi = (u-D)\left\{\rho\left[(u-D)^2 - c^2\right] - \rho k_p H - uE\right\} + H\left(k_\rho A + k_\alpha B\right),$$
$$\Psi = \frac{F}{\Phi}\left[(u-D)^2 - H\left(k_p + \frac{W}{\tau_W F}\right)\right].$$

В качестве примера рассмотрена задача о движении волны по неподвижной однородной газожидкостной смеси с параметрами: $\alpha_0 = 0{,}9$, $T_0 = 293$ К, $\rho_{10}^0 = 1,19$ кг/м^3, $\gamma = 1{,}4$, $\rho_{\rm s} = 1000$ кг/м^3, $\chi = 2,58 \times 10^{-2}$ кг·м/(с^3 К), $\chi_{\rm s} = 60,2 \times 10^{-2}$ кг м/(с^3 К), $\tau_W = 10^2$ с, $\mu = 0{,}01$ кг/(м с), $\tau_\sigma = 0{,}1$ с. Скорость перемещения волны полагалась равной $D = -39{,}112$ м/с.

Отметим, что из-за особенностей в системе (23) найти распределение параметров во всем фронте волны не удается. С использованием численного метода Рунге – Кутта решалась задача Коши на отрезке от $\xi_- = 0{,}005$ до ближайшей особой точки. На рис. 2 приведены результаты вычислений для варианта: $p(\xi_-) = 0{,}1$ МПа, $u(\xi_-) = 0$, $W(\xi_-) = -10^3$ Дж/(м^2 с), $\sigma(\xi_-) = 10^4$ Па.

При рассмотрении многоскоростной модели, учитывая соотношения (18), система (17) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
(u-D)\frac{d\rho}{d\xi} + \rho\frac{du}{d\xi} = 0, \quad (u-D)\frac{du}{d\xi} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\xi} = 0, \quad (u-D)\frac{dp}{d\xi} + \rho c^2\frac{du}{d\xi} + H\frac{dW}{d\xi} = 0, \\
(u-D)\frac{dW}{d\xi} + k_\rho\frac{d\rho}{d\xi} + k_p\frac{dp}{d\xi} + k_\alpha\frac{d\alpha}{d\xi} + \frac{W}{\tau_W} = 0, \\
(u_s-D)\frac{d\alpha}{d\xi} - (1-\alpha)\frac{du_s}{d\xi} = 0, \quad (u_\mathrm{s}-D)\frac{du_\mathrm{s}}{d\xi} + \frac{1}{\rho_\mathrm{s}}\frac{dp}{d\xi} - G\frac{d\alpha}{d\xi} = S.
\end{gathered} \tag{24}
$$

Перепишем (24) в удобном для интегрирования виде

$$
\begin{gathered}
\frac{du}{d\xi} = \Phi, \quad \frac{d\rho}{d\xi} = A\Phi, \frac{d\alpha}{d\xi} = B\Psi, \quad \frac{dp}{d\xi} = M\Phi + L, \\
\frac{d\sigma}{d\xi} = K\Phi + L, \quad \frac{dW}{d\xi} = P\Phi + R, \\
\frac{du_\mathrm{s}}{d\xi} = \Psi,
\end{gathered} \tag{25}
$$

где

$$
\begin{gathered}
A = -\frac{\rho}{u-D}, \quad B = \frac{1-\alpha}{u_\mathrm{s}-D}, \quad K = \frac{\mu}{\tau_\sigma(u-D)}, \quad L = -\frac{\sigma}{\tau_\sigma(u-D)}, \\
M = K - \rho(u-D), \quad P = -\frac{M\,(u-D) + \rho c^2}{H}, \quad R = -\frac{L\,(u-D)}{H}, \\
X = (u-D)P + k_\alpha A + k_p M, \quad Y = -k_p L - (u-D)R - W/\tau_W. \\
\Phi = \frac{\rho_\mathrm{s} Y(u_\mathrm{s} - D - BG) + k_\alpha B(L - \rho_\mathrm{s} S)}{\rho_\mathrm{s} X(u_\mathrm{s} - D - BG) - k_\alpha BM}, \quad \Psi = -\frac{MY + X(L - \rho_\mathrm{s} S)}{\rho_\mathrm{s} X(u_\mathrm{s} - D - BG) - k_\alpha BM}.
\end{gathered}
$$

Как и в предыдущей задаче решалась задача Коши на отрезке от $\xi_- = -0{,}005$. На рис. 3 представлены результаты интегрирования системы (25) для вариантов с коэффициентом k_α, равным нулю и рассчитанным по формуле (17). Исходные данные для задачи следующие: $D = -39{,}178$ м/с, $p(\xi_-) = 0{,}1$ МПа, $u(\xi_-) = 0$, $u_\mathrm{s}(\xi_-) = 0$, $W(\xi_-) = -10^3$ дж/(м^2 с), $\sigma(\xi_-) = 10^4$ Па, $S = 0$. Параметры водно-воздушной смеси те же, что и в первом примере.

Полученные решения автомодельных задач могут быть использованы при тестировании численных методов, разрабатываемых для интегрирования общих уравнений моделей (3) и (18).

Заключение

Представлены модифицированные модели одно- и многоскоростной многокомпонентной среды, учитывающие вязкостные и теплопроводящие свойства смеси. Показано, что при использовании релаксационных законов для диссипативных процессов системы уравнений относятся к гиперболическому типу. Для рассматриваемых моделей среды исследованы автомодельные решения типа бегущих волн, которые в дальнейшем могут быть использованы при конструировании решателей задачи Римана, используемых в численных схемах годуновского типа.

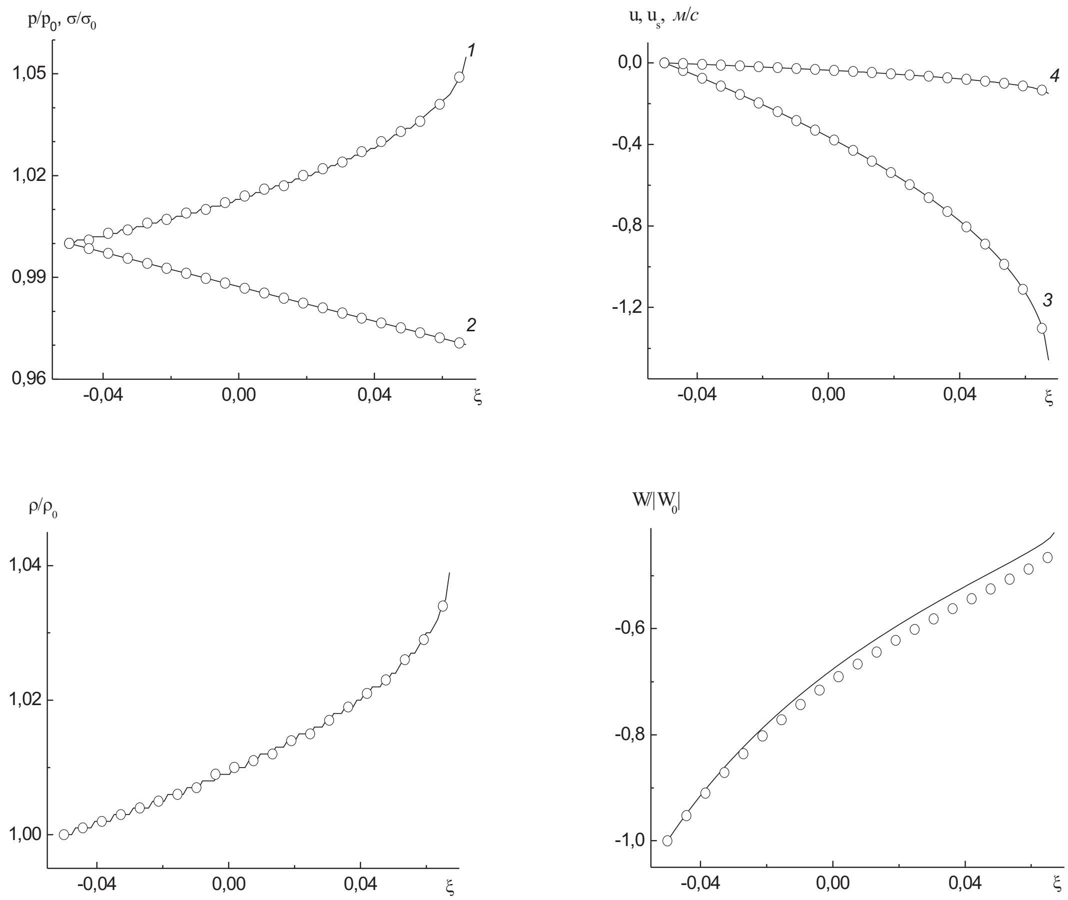

Рис. 3. Зависимости $p(\xi)/p_0$ (кривая *1*), $\sigma(\xi)/\sigma_0$ (*2*), $u(\xi)$ (*3*), $u_s(\xi)$ (*4*), $\rho(\xi)/\rho_0$, $W(\xi)/|W_0|$ для водно-воздушной смеси (многоскоростная модель). k_α из (17) – сплошные кривые;$k_\alpha = 0$ – кружочки

Обозначения

c – скорость звука в смеси; c_{*i}, γ_i, ρ_{*i} – константы уравнения состояния; D – скорость перемещения волны; m – число сжимаемых фракций в смеси; n – общее количество фракций; p – давление; $\mathbf{u}$ – вектор скорости; $\mathbf{F}$ – плотность массовой силы; J_{ij} – интенсивность превращения массы из i-й фракции в j-ю на единицу объема смеси; Q_{ij} – тепловыделение в единицу времени на единицу объема смеси вследствие превращения i-й фракции в j-ю; T и $\mathbf{W}$ – осредненные температура и вектор плотности теплового потока; α_i – объемная доля i-й фракции в смеси; δ_{ij} – символ Кронекера; ξ – автомодельная переменная; ρ – плотность смеси; ρ_i^0– истинная плотность i-й фракции; ρ_s– плотность несжимаемой фракции; ρ_i= $\alpha_i\rho_i^0$ – приведенная плотность i-й фракции; ε_i – удельная внутренняя энергия i-го компонента; σ – вязкое напряжение; μ – коэффициент вязкости; χ – коэффициент теплопроводности смеси; τ_W и τ_σ – времена тепловой релаксации смеси и релаксации вязких напряжений. Индексы: 0 – в невозмущенной среде; i – для сжимаемых фракций; j – для несжимаемых.

Литература

1. Суров, В.С. Об отражении воздушной ударной волны от слоя пены / В.С. Суров // Теплофизика высоких температур. – 2000. – Т. 38, № 1. – С. 101–110.

2. Суров, В.С. К расчету ударно-волновых процессов в пузырьковых жидкостях / В.С. Суров // Журн. техн. физики. – 1998. – Т. 68, № 11. – С. 12–19.
3. Суров, В.С. О локализации контактных поверхностей в многожидкостной гидродинамике / В.С. Суров // Инженерно-физ. журн. – 2010. – Т. 83, № 3. – С. 518–527.
4. Суров, В.С. Односкоростная модель гетерогенной среды с гиперболичным адиабатическим ядром / В.С. Суров // Журнал вычисл. математики и мат. физики. – 2008. – Т. 48, № 6. – С. 1111–1125.
5. Wackers, J. A fully conservative model for compressible two-fluid flow / J. Wackers, B. Koren // J. Numer. Meth. Fluids. – 2005. – Vol. 47. – P. 1337– 343.
6. Murrone, A. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems / A. Murrone, H. Guillard // J. Comput. Phys. – 2005. – V. 202. – P. 664–698.
7. Kreeft, J.J. A new formulation of Kapila's five-equation model for compressible two-fluid flow, and its numerical treatment / J.J. Kreeft, B. Koren // J. Comput. Phys. – 2010. – V. 229. – P. 6220–6242.
8. Cattaneo, C. Sur une forme de l'equation de la chaleur elinant le paradoxe d'une propagation instantance / C. Cattaneo // CR. Acad. Sci. – 1958. – V. 247. – P. 431–432.
9. Dai, W. A mathematical model for skin burn injury induced by radiation heating / W. Dai, H. Wang, P.M. Jordan // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2008. – V. 51. – P. 5497–5510.
10. Суров, В.С. Гиперболическая модель односкоростной многокомпонентной теплопроводной среды / В.С. Суров // Теплофизика высоких температур. – 2009. – Т. 47, № 6. – С. 905– 913.
11. Самарский, А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М.: Наука, 1980.
12. Лодж, А.С. Эластичные жидкости / А.С. Лодж. – М.: Наука, 1969.
13. Суров, В.С. Гиперболическая модель многоскоростной гетерогенной среды / В.С. Суров // Инженерно-физ. журн. – 2012. – Т. 85, № 3. – С. 495–502.
14. Kaminski, W. Hyperbolic heat conduction equation for materials with a non-homogeneous inner structure / W. Kaminski, // Trans. of the ASME. J. of Heat Transfer. – 1990. – V. 112. – P. 555.

Виктор Сергеевич Суров, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Вычислительная механика сплошных сред», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), svs@csu.ru.

Иван Владимирович Березанский, аспирант, кафедра «Вычислительная механика сплошных сред», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), mynameivanych@gmail.com.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 1, pp. 72–84.

MSC 35Q35

The New Hyperbolic Models of Heterogeneous Environments

V.S. Surov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, svs@csu.ru,
I.V. Berezansky, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, mynameivanych@gmail.com

Invention mathematically and physically correct models multiphase environment is an important problem, since many of the available models of heterogeneous environment are not such. In this paper, for multi-component environment offers two new models - single- and multi-velocity approximations. The models are based on the laws of conservation. Viscous and heat-conducting properties of the mixture are considered. For the described models is constructed automodels solution kind of traveling wave. On the example of a binary mixture have done of calculations for single- and multi-velocity approximations. It is shown that, if the use of the relaxation of the laws for the dissipative processes then the system of equations are hyperbolic.

Keywords: multicomponent viscous heat-conducting mixture, singlevelocity and multivelocity multicomponent medium, hyperbolic systems of partial differential equations, automodel solutions.

References

1. Surov V.S. Reflection of the Air Shock Wave from the Foam Layer. *High Temperature,* 2000, vol. 38, no. 1, pp. 101–110.
2. Surov V.S. Calculation of Shock Wave Propagation in Bubbly Liquids. *Technical Physics. The Russian J. of Applied Physics,* 1998, vol. 68, no. 11, pp. 12–19.
3. Surov V.S. Localization of Contact Surfaces in Multifluid Hydrodynamics. *J. of Engineering Physics and Thermophysics,* 2010, vol. 83, no. 3, pp. 518–527.
4. Surov V.S. Single Velocity Model of Heterogeneous Media with Hyperbolic Adiabatic Core. *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 2008, vol. 48, no. 6, pp. 1111–1125.
5. Wackers J.A., Koren B. Fully Conservative Model for Compressible Two-Fluid Flow. *J. Numer. Meth. Fluids,* 2005, vol. 47, pp. 1337–1343.
6. Murrone A.A., Guillard H. Five Equation Reduced Model for Compressible Two Phase Flow Problems. *J. Comput. Phys.,* 2005, vol. 202, pp. 664 – 698.
7. Kreeft J.J., Koren B.A. New Formulation of Kapila's Five-Equation Model for Compressible Two-Fluid Flow, and its Numerical Treatment. *J. Comput. Phys,* 2010, vol. 229, pp. 6220–6242.
8. Cattaneo C. Sur une forme de l'equation de la chaleur elinant le paradoxe d'une propagation instantance. *CR. Acad. Sci.,* 1958, vol. 247, pp. 431–432.
9. Dai W., Wang H., Jordan P.M. A Mathematical Model for Skin Burn Injury Induced by Radiation Heating. *Int. J. Heat and Mass Transfer,* 2008, vol. 51, pp. 5497–5510.
10. Surov, V.S. Hyperbolic Model Single-Velocity Multi-Component Heat Conductive Medium. *High Temperature,* 2009, vol. 47, no. 6, pp. 905 – 913.
11. Samarskiy A.A., Popov U.P. Difference Methods for Solving Problems of Gas Dynamics. Moscow, Nauka, 1980. (in Rusian)
12. Lodge A.S. Elastic Fluids. Moscow, Nauka, 1969.(in Rusian)
13. Surov V.S. Hyperbolic Model Single Velocity Heterogeneous Environment. *J. of Engineering Physics and Thermophysics,* 2012, vol. 85, no. 3, pp. 495–502.
14. Kaminski W. Hyperbolic Heat Conduction Equation for Materials with a Non-homogeneous Inner Structure. *Trans. of the ASME. J. of Heat Transfer,* 1990, vol. 112, pp. 555.

Поступила в редакцию 21 ноября 2012 г.