УДК 517.948

О ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В.П. Танана, А.И. Сидикова

ASSURED ACCURACY ESTIMATION OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF AN INVERSE PROBLEM OF THE THERMAL DIAGNOSTICS IN THE HETEROGENEOUS ENVIRONMENT

V.P. Tanana, A.I. Sidikova

Методом проекционной регуляризации решена обратная смешанная граничная задача для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом, и получены гарантированные оценки точности этого решения.

Ключевые слова: обратная задача, регуляризация, параболическое уравнение, преобразование Фурье

Using the method of the projection regularization the author solves the inverse mixed boundary-value problem for the heat conduction equation with the discontinuous coefficient and obtains the assured accuracy evaluation of the solution.

Keywords: inverse problem, regularization, parabolic equation, Fourier transformation

1. Постановка задачи

При планировании стендовых испытаний ракетных двигателей важную роль играет точность решения соответствующих обратных задач тепловой диагностики [1]. Для достижения этой точности необходимо использовать более совершенные математические модели, в которых учтены теплофизические свойства используемых композиционных материалов [1]. Все это приводит к решению обратных граничных задач для дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Для приближенного решения соответствующих задач необходимо получать гарантированные оценки их погрешности, которые определяют степень достоверности теоретических расчетов, используемых при планировании стендовых испытаний. Методом проекционной регуляризации [2] получены гарантированные оценки точности этого решения.

Уравнение теплопроводности в неоднородном стержне, состоящем из двух различных материалов, имеет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right];\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \tag{1}$$

$$a(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 \le x \le x_1 \\ \chi\,, & x_1 \le x \le 1, \end{cases} \qquad \chi \ne\ 1 \text{ положительное число.}$$

Известно, что уравнение (1) можно свести к системе

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}, \ 0 \le x \le x_1, \ t \ge 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}, \ x_1 \le x \le 1, \ t \ge 0. \tag{3}$$

Предположим, что решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$u_1(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le x_1, \tag{4}$$

$$u_2(x,0) = 0, \qquad x_1 \le x \le 1, \tag{5}$$

а также граничным условиям

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} - \kappa u_1(0,t) = 0; \qquad t \ge 0, \tag{6}$$

где $\kappa > 0$ известное число

$$u_1(x_1,t) = f(t); \qquad t \ge 0 \tag{7}$$

и условиям согласования

$$u_1(x_1,t) = u_2(x_1,t); \qquad t \ge 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_1(x_1,t)}{\partial x} = \chi \frac{\partial u_2(x_1,t)}{\partial x}, \qquad t \ge 0. \tag{9}$$

Функцию $h(t) = \dfrac{\partial u_2(1,t)}{\partial x}$ требуется определить.

Предположим, что $h(t) \in C^2[0,\infty)$, и существует число $t_0 > 0$ такое,что при $t \ge t_0$

$$h(t) = 0. \tag{10}$$

Сделав замену

$$v(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), & 0 \le x \le x_1, \ t \ge 0 \\ u_1(x_1,t) + \chi \int\limits_{x_1}^{x} \dfrac{\partial u_2(\xi,t)}{\partial \xi} d\xi; & t \ge 0, \end{cases} \tag{11}$$

задачу (2) – (9) сведем к новой относительно функции $v(x,t)$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \ 0 \le x \le 1, \ t \ge 0, \tag{12}$$

$$v(x,0) = 0; \qquad 0 \le x \le 1, \tag{13}$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} - \kappa v(0,t) = 0; \ t \ge 0, \tag{14}$$

$$v(x_1,t) = f(t); \qquad t \ge 0, \tag{15}$$

а функцию $h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{\chi} \frac{\partial v(1,t)}{\partial x}; \qquad t \ge 0 \tag{16}$$

требуется определить.

В дальнейшем функции $v(x,t)$, $f(t)$ и $h(t)$ будем считать комплекснозначными, то есть $v(x,t) = v_1(x,t) + iv_2(x,t)$, $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ и $h(t) = h_1(t) + ih_2(t)$, где $v_i(x,t)$, $f_i(x,t)$ и $h_i(x,t)$, $i = 1,2$ действительные функции.

2. Исследование гладкости функции $v(x,t)$

Так как гладкость функции $v(x,t)$ определяется соответствующей гладкостью ее действительной $Re[v(x,t)]$ и мнимой $Im[v(x,t)]$ составляющих, то исследование гладкости функции $v(x,t)$ достаточно провести в предположении, что функции $v(x,t)$ и $h(t)$ действительны.

Сделаем замену

$$U(x,t) = v(x,t) - (x + \frac{1}{\kappa})h(t). \tag{17}$$

Тогда

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + (x + \frac{1}{\kappa})h'(t);\ 0 \le x \le 1\ ,t \ge 0, \tag{18}$$

$$U(x,0) = 0; \qquad 0 \le x \le 1, \tag{19}$$

$$U'_x(0,t) - \kappa U(0,t) = 0; \qquad t \ge 0, \tag{20}$$

$$U'_x(1,t) = 0; \qquad t \ge 0. \tag{21}$$

Решение задачи (18) – (21) имеет вид

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)\sin(\lambda_n x + \beta_n), \tag{22}$$

где λ_n является решением уравнения

$$\operatorname{ctg}\lambda = \frac{\lambda}{\kappa}, \tag{23}$$

$$\beta_n = \arcsin\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{\kappa^2+\lambda_n^2}}\right) = \arccos\left(\frac{k}{\sqrt{\kappa^2+\lambda_n^2}}\right), \tag{24}$$

$$U_n(t) = 2b_n \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}h'(\tau)d\tau, \tag{25}$$

где

$$b_n = \frac{2\sin(\lambda_n + \beta_n)}{\lambda_n^2[1 - \lambda_n^{-1}\cos(\lambda_n + 2\beta_n)\sin\lambda_n]}. \tag{26}$$

Интегрируя правую часть равенства (25) по частям, получим

$$U_n(t) = \frac{2b_n}{\lambda_n^2}\left[h'(t) - \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}h''(\tau)d\tau.\right] \tag{27}$$

Теперь исследуем гладкость функции $U(x,t)$ по x. Для этого, используя представление функции $U(x,t)$ в формуле (22), рассмотрим ряд, составленный из первых производных слагаемых

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n U_n(t)\cos(\lambda_n x + \beta_n). \tag{28}$$

Из (10), (26) и (27) следует существование числа $c_1 > 0$ такого, что для любых значений $x \in [0,1]$, $t \ge 0$ и n

$$|\lambda_n U_n(t)\cos(\lambda_n x + \beta_n)| \le \frac{c_1}{\lambda_n^3}. \tag{29}$$

Так как из (23) следует, что для любого n

$$\lambda_n = \pi n + \mu_n, \tag{30}$$

где

$$\mu_n \longrightarrow 0, \text{ при } n \longrightarrow \infty, \tag{31}$$

то из (30) и (31) следует существование чисел c_2 и $c_3 > 0$ таких, что для любого n

$$c_2 n \leq \lambda_n \leq c_3 n. \tag{32}$$

Таким образом, из (32) следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3} < \infty$, а из соотношения (29) следует равномерная сходимость рядов (22) и (28) на множестве $[0,1] \times [0,\infty)$.

Учитывая непрерывность слагаемых соответствующих рядов, получим

$$U'_x(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n U_n(t) \cos(\lambda_n x + \beta_n), \tag{33}$$

а из (33), что

$$U'_x(x,t) \in C([0,1] \times [0,\infty)). \tag{34}$$

Рассмотрим ряд, составленный из вторых производных слагаемых ряда (22).

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 U_n(t) \sin(\lambda_n x + \beta_n). \tag{35}$$

Из (29) следует, что для любых $x \in [0,1]$, $t \geq 0$ и n

$$|\lambda_n^2 U_n(t) \sin(\lambda_n x + \beta_n)| \leq \frac{c_1}{\lambda_n^2}. \tag{36}$$

Из (32) следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} < \infty$, а из (36) следует равномерная сходимость ряда (35) на множестве $[0,1] \times [0,\infty)$. Учитывая непрерывность слагаемых соответствующих рядов, получим

$$U''_{xx}(x,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 U_n(t) \sin(\lambda_n x + \beta_n), \tag{37}$$

а из (37), что

$$U''_{xx}(x,t) \in C([0,1] \times [0,\infty)). \tag{38}$$

Из (17),(34) и (38) следует, что

$$v'_x(x,t) \in C([0,1] \times [0,\infty)), \tag{39}$$

$$v''_{xx}(x,t) \in C([0,1] \times [0,\infty)). \tag{40}$$

3. Обоснование метода интегральных преобразований применительно к решению задачи (12) – (15)

Так как скорость убывания функции $v(x,t)$ при $t \longrightarrow \infty$ определяется скоростями убывания ее действительной $Re[v(x,t)]$ и мнимой $Im[v(x,t)]$ составляющих, то, как и в предыдущем случае, этот вопрос достаточно исследовать в предположении действительных функций $h(t)$ и $v(x,t)$.

Рассмотрим вспомогательную задачу, использующую условие (10)

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}; \; 0 \leq x \leq 1, \; t \geq t_0, \tag{41}$$

$$v(x,t_0) = v_0(x); \qquad 0 \le x \le 1, \tag{42}$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} - \kappa v(0,t) = 0; \qquad t \ge t_0, \tag{43}$$

$$\frac{\partial v(1,t)}{\partial x} = 0; \qquad t \ge t_0. \tag{44}$$

Из (10) и (40) следует, что

$$v_0(x) \in C^2[0,1] \tag{45}$$

и

$$v_0'(1) = 0, \qquad v_0'(0) - \kappa v_0(0) = 0. \tag{46}$$

Решение задачи (41) – (46) имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n\, e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} \sin(\lambda_n x + \beta_n), \tag{47}$$

где λ_n и β_n определены формулами (23),(24), а

$$v_n = \frac{2}{[1 - \lambda_n^{-1}\cos(\lambda_n + 2\beta_n)\sin\lambda_n]} \int_0^1 v_0(x)\sin(\lambda_n x + \beta_n)dx. \tag{48}$$

Интегрируя правую часть равенства (48) по частям, получим

$$v_n = -\frac{2}{\lambda_n^2[1 - \lambda_n^{-1}\cos(\lambda_n + 2\beta_n)\sin\lambda_n]} \int_0^1 v_0''(x)\sin(\lambda_n x + \beta_n)dx. \tag{49}$$

Из (40) и (49) следует существование числа $c_4 > 0$ такого, что для любого n

$$|v_n| \le \frac{c_4}{\lambda_n^2}. \tag{50}$$

Из (47) и (50) следует, что для любого $t \ge t_0 + 1$

$$|v(x,t)| \le c_4 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}, \tag{51}$$

$$|v_x'(x,t)| \le c_4 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} \tag{52}$$

и

$$|v_{xx}''(x,t)| \le c_4 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}. \tag{53}$$

Так как

$$e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} = e^{-\lambda_n^2} \cdot e^{-\lambda_n^2(t-t_0-1)}, \tag{54}$$

а из (32) и (54) получается , что

$$e^{-\lambda_n^2} \le [e^{c_2^2}]^{-n}, \tag{55}$$

то из (41), (51) – (55) следует существование числа c_5 такого, что для любого $t \ge t_0 + 2$

$$\sup_{x\in[0,1]} \{|v(x,t)|,\ |v_x'(x,t)|,\ |v_t'(x,t)|,\ |v_{xx}''(x,t)|\} \le c_5\, e^{-(t-t_0-1)}. \tag{56}$$

Из (39), (40) и (56) следует, что для любой комплекснозначной ограниченной и непрерывной на $[0,\infty)\times[0,\infty)$ функции $\Phi(\lambda,t)$ справедливы равенства

$$\int_0^\infty v'_x(x,t)\Phi(\lambda,t)dt = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\infty v(x,t)\Phi(\lambda,t)dt\right] \tag{57}$$

и

$$\int_0^\infty v''_{xx}(x,t)\Phi(\lambda,t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int_0^\infty v(x,t)\Phi(\lambda,t)dt\right]. \tag{58}$$

Таким образом, мы показали, что для любого $x\in[0,1]$

$$v(x,t),\ v'_t(x,t),\ v'_x(x,t) \text{ и } v''_{xx}(x,t) \in C[0,\infty)\bigcap L_2[0,\infty).$$

Обозначим через M_r множество пространства $\overline{H}=L_2[0,\infty)+iL_2[0,\infty)$, определяемое формулой

$$M_r=\left\{h(t):\ h(t)\in\overline{H},\ \int_0^\infty |h(t)|^2dt+\int_0^\infty |h'(t)|^2dt\le r^2\right\}, \tag{59}$$

где r известное положительное число, и предположим, что при $f(t)=f_0(t)$, участвующей в условии (15), существуют функции $v_0(1,t)$ и $\chi h_0(t)$, которые принадлежат множеству M_r. Но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t)\in\overline{H}$ и число $\delta>0$ такие, что

$$\|f_\delta-f_0\|_{\overline{H}}\le\ \delta. \tag{60}$$

Требуется, используя f_δ,δ и M_r, определить приближенное решение $\chi h_\delta(t)$ задачи (12) – (16) и оценить уклонение $\|h_\delta-h\|$ приближенного решения от точного.

4. Сведение задачи (12) – (16) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

Пусть $\overline{H}=L_2[0,\infty)+iL_2[0,\infty)$ над полем комплексных чисел, F оператор, отображающий $\overline{H}$ на $\overline{H}$ и определяемый формулой

$$F[h(t)]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty h(t)e^{-i\lambda t}dt;\ \ \lambda\ge0,\ \ h(t)\in\overline{H}, \tag{61}$$

а F^{-1}– оператор, обратный F,

$$F^{-1}[g(\lambda)]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty g(\lambda)e^{i\lambda t}dt;\ \ t\ge0,\ \ g(\lambda)\in\overline{H}. \tag{62}$$

Лемма 1. *Для операторов F и F^{-1},определяемых формулами (61) и (62),справедливы следующие соотношения* $\|F\|\le\sqrt{2}$ *и* $\|F^{-1}\|\le\sqrt{2}$.

Доказательство. Сначала докажем первое из соотношений. Для этого возьмем произвольную функцию $h(t)\ne0$ из пространства $\overline{H}$ и продолжим ее на отрицательную полуось, положив

$$h(t)=0 \qquad \text{при} \qquad t<0. \tag{63}$$

Таким образом, $h(t)\in L_2(-\infty,\infty)+iL_2(-\infty,\infty)$.

Обозначим через $\overline{h}(\lambda)$ преобразование Фурье функции $h(t)$

$$\overline{h}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty h(t)e^{-i\lambda t}dt;\qquad -\infty<\lambda<\infty. \tag{64}$$

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [3] на с.412 следует, что

$$\|\overline{h}(\lambda)\| = \|h(t)\|. \tag{65}$$

Пусть $\hat{h}(\lambda) = F[h(t)]$. Тогда из (61) и (64) следует, что для любого $\lambda \geq 0$

$$\hat{h}(\lambda) = \sqrt{2}\,\overline{h}(\lambda). \tag{66}$$

Из (65) и (66) следует, что при условии $\lambda \geq 0$ $\|\hat{h}(\lambda)\| \leq \sqrt{2}\|\overline{h}(\lambda)\| = \sqrt{2}\|h(t)\|$, то есть $\|F\| \leq \sqrt{2}$. Второе соотношение доказывается аналогично. □

Из соотношений (56) и формул (57) и (58) следует применимость преобразования F, определяемого формулой (61) к задаче (12) – (16).

Используя это преобразование к задаче (12) – (16), сведем ее к следующей

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(x,\lambda)}{\partial x^2} = i\lambda \hat{v}(x,\lambda); \qquad x \in [0,1],\ \lambda \geq 0, \tag{67}$$

где $\hat{v}(x,\lambda) = F[v(x,t)]$,

$$\frac{\partial \hat{v}(0,\lambda)}{\partial x} - \kappa \hat{v}(0,\lambda) = 0 \tag{68}$$

и

$$\hat{v}(x_1,\lambda) = \hat{f}(\lambda), \tag{69}$$

где $\hat{f}(\lambda) = F[f(t)]$.

Решение уравнения (67) имеет вид

$$\hat{v}(x,\lambda) = A(\lambda)e^{\mu_0 x\sqrt{\lambda}} + B(\lambda)e^{-\mu_0 x\sqrt{\lambda}}, \tag{70}$$

где $\mu_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, а $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ произвольные функции. Из (67) – (70) следует, что

$$\hat{v}(0,\lambda) = \frac{\hat{f}(\lambda)}{\operatorname{ch}\mu_0 x_1\sqrt{\lambda} + (\mu_0\sqrt{\lambda})^{-1}\kappa \operatorname{sh}\mu_0 x_1\sqrt{\lambda}}; \quad \lambda \geq 0. \tag{71}$$

Обозначим функцию, стоящую в правой части равенства (71) через $z(\lambda)$. Тогда из (71) следует, что

$$\hat{v}(0,\lambda) = z(\lambda); \qquad \lambda \geq 0, \tag{72}$$

а из (68) и (72), что

$$\hat{v}'_x(0,\lambda) = \kappa z(\lambda); \qquad \lambda \geq 0. \tag{73}$$

Лемма 2. *Пусть* $\kappa \leq \frac{1}{2}$, *а* $g(\lambda) = \operatorname{ch}\mu_0 x_1\sqrt{\lambda} + (\mu_0\sqrt{\lambda})^{-1}\kappa \operatorname{sh}\mu_0 x_1\sqrt{\lambda}$. *Тогда существует число* $c_8 > 0$ *такое, что для любого* $\lambda \geq 0$ $|g(\lambda)| \geq c_8$.

Доказательство. Так как

$$Re[g(\lambda)] = \left\{\cos x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\ \left[\sqrt{\frac{2\kappa^2}{\lambda}}\operatorname{sh} x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} + \operatorname{ch} x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right] + \sqrt{\frac{2\kappa^2}{\lambda}}\operatorname{ch} x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\ \sin x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right\}, \tag{74}$$

$$Im[g(\lambda)] = \left\{\sin x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\ \left[\sqrt{\frac{2\kappa^2}{\lambda}}\operatorname{ch} x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} + \operatorname{sh} x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right] - \sqrt{\frac{2\kappa^2}{\lambda}}\operatorname{sh} x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\ \cos x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right\}, \tag{75}$$

то из (74) следует, что при условии $0 \leq x_1\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}} \leq \dfrac{\pi}{3}$, $\cos x_1\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}} \geq \dfrac{1}{2}$ и

$$|g(\lambda)| \geq \cos x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\operatorname{ch} x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \geq \frac{1}{2}. \tag{76}$$

Если $\frac{\pi}{3} \le x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \le \frac{\pi}{2}$, то $\sin x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \ge \frac{1}{2}$ и из (74) следует, что

$$|g(\lambda)| \ge \sqrt{\frac{2\kappa^2}{\lambda}} \sin x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \operatorname{ch} x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \ge \frac{x_1\kappa}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi}{3}. \tag{77}$$

Если $\frac{\pi}{2} \le x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \le \frac{3\pi}{4}$, то $\sin x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ и из (74) следует, что

$$|g(\lambda)| \ge \frac{x_1 2\sqrt{2}}{3\pi} \kappa \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}. \tag{78}$$

Если $\frac{3\pi}{4} \le x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \le \pi$, то $-\cos x_1\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ и из (75) следует, что

$$|g(\lambda)| \ge \frac{x_1\sqrt{2}}{2\pi} \kappa \operatorname{sh} \frac{3\pi}{4}. \tag{79}$$

Таким образом, из (76) – (79) следует существование числа $c_6 > 0$ такого, что $\forall\lambda \in \left[0, \frac{2\pi^2}{x_1^2}\right]$

$$|g(\lambda)| \ge c_6. \tag{80}$$

Так как $\kappa \le \frac{1}{2}$, а $|g(\lambda)| \ge |\operatorname{ch}\mu_0 x_1\sqrt{\lambda}| - \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}}|\operatorname{sh}\mu_0 x_1\sqrt{\lambda}|$, то нетрудно проверить существование числа $c_7 > 0$ такого, что для любого $\lambda \ge \frac{2\pi^2}{x_1^2}$

$$|g(\lambda)| \ge c_7. \tag{81}$$

Из (80) и (81) следует утверждение леммы. □

Решая задачу Коши (67), (72) и (73), получим формулу (70), в которой функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ связаны соотношениями

$$A(\lambda) + B(\lambda) = z(\lambda); \qquad \lambda \ge 0 \tag{82}$$

и

$$A(\lambda) - B(\lambda) = \frac{\kappa}{\mu_0\sqrt{\lambda}} z(\lambda); \qquad \lambda \ge 0. \tag{83}$$

Из (70), (82) и (83) следует,что задачу (67), (72), (73) можно свести к задаче вычисления значений неограниченного оператора T в пространстве $\overline{H} \times \overline{H}$.

$$T\begin{pmatrix} z(\lambda) \\ \kappa z(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda} & (\mu_0\sqrt{\lambda})^{-1}\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda} \\ \mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda} & \operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z(\lambda) \\ \kappa z(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}(1,\lambda) \\ \hat{v}'_x(1,\lambda) \end{pmatrix}. \tag{84}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\kappa \le \frac{1}{2}$, функцию $\hat{v}(1,\lambda)$ обозначим через $\hat{v}(\lambda)$, а $\hat{v}'_x(1,\lambda)$ через $\chi\hat{h}(\lambda)$. Пусть $z_0(\lambda)$ и $\kappa z_0(\lambda)$ значения, соответствующие точному значению $f_0(t)$ в формуле (15), а z_δ и $\kappa z_\delta(\lambda)$- значения соответствующего приближенному значению $f_\delta(t)$. Тогда из лемм 1,2 и формулы (60) следует

$$\|z_\delta(\lambda) - z_0(\lambda)\| \le \sqrt{2}\,C_8\delta. \tag{85}$$

Множество M_r, определенное формулой (59) при преобразовании F, перейдет в множество $\hat{M}_r = F\hat{M}_r$, определяемое формулой

$$\hat{M}_r = \left\{ \hat{h}(\lambda) \ : \ \hat{h}(\lambda) \in \overline{H}, \int_0^\infty (1+\lambda^2)\ |\hat{h}(\lambda)| d\lambda \le \ r^2 \right\}. \tag{86}$$

Из того, что $v_0(1,t)$ и $\chi h_0(t) \in \hat{M}_r$, будет следовать, что

$$\hat{v}_0(\lambda) \text{ и } \chi\hat{h}_0(t) \in \hat{M}_r. \tag{87}$$

5. Решение задачи (84) – (87)

Для решения этой задачи используем семейство операторов $\{T_\alpha \ : \ \alpha > 0\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha \begin{pmatrix} z_1(\lambda) \\ z_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{cases} T \begin{pmatrix} z_1(\lambda) \\ z_2(\lambda) \end{pmatrix}; & \lambda \le \alpha \\ 0\,; & \lambda > \alpha, \end{cases} \tag{88}$$

где $z_1(\lambda)$ и $z_2(\lambda) \in \overline{H}$, а оператор T определен формулой (84).

Приближенное решение $\begin{pmatrix} \hat{v}_\delta^\alpha(\lambda) \\ \chi\hat{h}_\delta^\alpha(\lambda) \end{pmatrix}$ задачи (84) – (87) определим формулой

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_\delta^\alpha(\lambda) \\ \chi\hat{h}_\delta^\alpha(\lambda) \end{pmatrix} = T_\alpha \begin{pmatrix} z_\delta(\lambda) \\ \kappa z_\delta(\lambda) \end{pmatrix}; \qquad \lambda \ge 0. \tag{89}$$

Для выбора параметра регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta)$ в формуле (89) рассмотрим оценку

$$[\ \|\hat{v}_\delta^\alpha - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi\hat{h}_\delta^\alpha - \chi\hat{h}_0\|^2\ ]^{\frac{1}{2}} \le [\ \|\hat{v}_\delta^\alpha - \hat{v}_0^\alpha\|^2 + \|\chi\hat{h}_\delta^\alpha - \chi\hat{h}_0^\alpha\ \|^2\ ]^{\frac{1}{2}} + [\ \|\hat{v}_0^\alpha - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi\hat{h}_0^\alpha - \chi\hat{h}_0\ \|^2\ ]^{\frac{1}{2}}, \tag{90}$$

где $$\begin{pmatrix} \hat{v}_0^\alpha(\lambda) \\ \chi\hat{h}_0^\alpha(\lambda) \end{pmatrix} = T_\alpha \begin{pmatrix} z_0(\lambda) \\ \kappa z_0(\lambda) \end{pmatrix}; \qquad \lambda \ge 0.$$

Так как из (85) и (89) следует, что

$$[\ \|\hat{v}_\delta^\alpha - \hat{v}_0^\alpha\|^2 \ + \ \|\chi\hat{h}_\delta^\alpha - \chi\hat{h}_0^\alpha\|^2\ ]^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\, c_8\, \sqrt{1+\kappa^2}\ \|T_\alpha\|\, \delta, \tag{91}$$

а из (84) и (88), что $$\|T_\alpha\| \le \ e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}, \tag{92}$$
то из (91) и (92) следует, что

$$[\ \|\hat{v}_\delta^\alpha - \hat{v}_0^\alpha\|^2 \ + \ \|\chi\hat{h}_\delta^\alpha - \chi\hat{h}_0^\alpha\|^2\ ]^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\, c_8\, \sqrt{1+\kappa^2}\ e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\, \delta. \tag{93}$$

Пусть

$$\omega^2(\alpha) = \sup\left\{ \int_\alpha^\infty [\ |\hat{v}_0(\lambda)|^2 + \ |\chi\hat{h}_0(\lambda)|^2]\, d\lambda \ : \ \hat{v}_0(\lambda),\ \chi\hat{h}_0(\lambda) \in \ \hat{M}_r \right\}. \tag{94}$$

Тогда $$[\ \|\hat{v}_0^\alpha - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi\hat{h}_0^\alpha - \chi\hat{h}_0\|^2\ ]^{\frac{1}{2}} \le \omega(\alpha). \tag{95}$$

Из (86) следует, что при условии, что $\hat{v}_0(\lambda)$ и $\chi\hat{h}_0(\lambda) \in \hat{M}_r$

$$\int_\alpha^\infty (1+\lambda^2)[\ |\hat{v}_0(\lambda)|^2 + \ |\chi\hat{h}_0(\lambda)|^2]\, d\lambda \ \le \ 2r^2, \tag{96}$$

а из (94) и (96), что

$$\omega^2(\alpha) = \frac{2r^2}{1+\alpha^2}. \tag{97}$$

Таким образом, из (90), (93), (95) и (97) следует, что

$$[\ \|\hat{v}_\delta^\alpha - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi\hat{h}_\delta^\alpha - \chi\hat{h}_0\|^2\ ]^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{2}\,r}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \sqrt{2}\,c_8\,\sqrt{1+\kappa^2}\,e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\,\delta. \tag{98}$$

Обозначим число $c_8\sqrt{1+\kappa^2}$ через c_9 и параметр регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta)$ в формуле (89) выберем из условия:

$$\sqrt{1+\alpha^2}\,e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{r}{c_9\delta}. \tag{99}$$

Тогда из (98) и (99) будет следовать, что

$$[\ \|\hat{v}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi\hat{h}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - \chi\hat{h}_0\|^2\ ]^{\frac{1}{2}} \le \frac{2\sqrt{2}\,r}{\sqrt{1+\overline{\alpha}^2(\delta)}}. \tag{100}$$

Так как функция $\sqrt{1+\alpha^2}\,e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}$ строго возрастает по α и изменяется от 0 до ∞, то существует единственное решение $\overline{\alpha}(\delta)$ уравнения (99).
Для упрощения оценки (100) рассмотрим два уравнения $e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{r}{c_9\,\delta}$ и $e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{r}{c_9\,\delta}$.
Для упрощения оценки (100) рассмотрим два уравнения

Решения этих уравнений обозначим через $\overline{\alpha}_1(\delta)$ и $\overline{\alpha}_2(\delta)$. Тогда при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$\overline{\alpha}_2(\delta) \le \overline{\alpha}(\delta) \le \overline{\alpha}_1(\delta). \tag{101}$$

где $\overline{\alpha}_1(\delta) = 2\ln^2\dfrac{r}{c_9\,\delta}$ и $\overline{\alpha}_2(\delta) = \dfrac{1}{2}\ln^2\dfrac{r}{c_9\,\delta}$, а из (101), что $\overline{\alpha}(\delta) \sim \ln^2\delta$, при $\delta \longrightarrow 0$.

Из вышесказанного следует существование числа $c_{10} > 0$ такого, что при достаточно малых значениях δ справедливо неравенство

$$[\ \|\hat{v}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - \hat{v}_0\|^2 + \|\chi\hat{h}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - \chi\hat{h}_0\|^2\ ]^{\frac{1}{2}} \le c_{10}\,\ln^{-2}\delta. \tag{102}$$

Воспользовавшись преобразованием F^{-1} обратным к F, и взяв действительную часть результата, получим приближенное решение задачи (12) – (16)

$$\chi\,h_\delta(t) = Re\ \{\ F^{-1}\ [\chi\hat{h}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\lambda)]\ \}. \tag{103}$$

Из леммы 1 и соотношений (102), (103) для приближенного решения $\chi\,h_\delta(t)$ задачи (12) – (16) справедлива оценка $\|h_\delta(t) - h_0(t)\| \le \sqrt{2}\,\chi\,c_{10}\,\ln^{-2}\delta$.

Работа поддержана грантом р-урал-а № 07-01-96001.

Литература

1. Определение характеристик тонкослойных теплозащитных покрытий из решения обратных задач тепло- и массо- переноса / Г.Н. Исаков, А.Я. Кузин, В.Н. Савельев, Ф.В. Ермолаев // Физика горения и взрыва. – 2003. – Т. 39, №5. – С. 86 – 96.
2. Танана, В.П. Об оптимальности регуляризующих алгоритмов при решении неккоректных задач/ В.П. Танана, А.Р. Данилин // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, №7. – С. 1323 – 1326.
3. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972.

Кафедра вычислительной математики,
Южно-Уральский государственный университет
7413604@mail.ru

Поступила в редакцию 10 февраля 2009 г.