УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ СОСТАВНОГО ВИДА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Р. Р. Сафиуллова

ON SOLVABILITY OF THE LINEAR INVERSE PROBLEM WITH UNKNOWN COMPOSITE RIGHT-HAND SIDE IN HYPERBOLIC EQUATION

R. R. Safiullova

Исследована разрешимость обратной задачи с неизвестной правой частью составного вида для линейных гиперболических уравнений второго порядка. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестную правую часть, задача рассматривается в цилиндрической области, задаются условия обычной начально-краевой задачи и некоторые условия переопределения, заданные на временных слоях $t = t_1$, $t = t_2$.

Ключевые слова: обратная задача, гиперболическое уравнение, условия переопределения, нелокальные условия

The solvability of the inverse problem with unknown composite right-hand side for second-order linear hyperbolic equation is studied. The essence of the problem is as follows: it is required to find together with solution the unknown right-hand side of the equation. The problem is considered in a cylindrical region, with set conditions being typical of the first boundary-value problem and with overdetermination conditions set over some sections $t = t_1$, $t = t_2$.

Keywords: inverse problem, hyperbolic equation, overdetermination conditions, nonlocal conditions

Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости обратной задачи с неизвестной правой частью составного вида для гиперболических уравнений второго порядка.

Суть данной задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестную правую часть, при этом задача рассматривается в цилиндрической области, задаются условия обычной начально – краевой задачи и некоторые условия переопределения, заданные на временных слоях.

Обратные задачи для гиперболических уравнений второго порядка в различных постановках исследовались В. Г. Романовым, С. И. Кабанихиным, А. Лоренци, А. И. Прилепко, Б. А. Бубновым, Ю. Е. Аниконовым, Е. Г. Саватеевым и многими другими – см. работы [1 – 7] и имеющуюся там библиографию. Вместе с тем, заметим, что в предложенной ниже постановке обратные задачи для гиперболических уравнений ранее не изучались. Можно отметить лишь статьи А. Д. Искендерова [8], А. Х. Амирова [9, 10], в которых исследовались обратные задачи для гиперболических уравнений с неизвестной правой частью простейшего вида, работу автора [12], в которой изучалась обратная задача для гиперболических уравнений с неизвестной правой частью составного вида, однако условия переопределения задачи были иные, а также работу А. И. Кожанова [11], в которой изучалась близкая по условиям переопределения обратная задача для параболических уравнений.

1. Постановка задачи

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $x = (x_1, ..., x_n)$ есть точка области Ω, t есть точка интервала $(0,T)$, S есть боковая граница цилиндра $Q : S = \Gamma \times (0,T)$. Далее, пусть $h_i(x,t)$, $i = \overline{1,3}$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f(x,t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $0 < t_1 \le T$, $0 < t_2 \le T$, $t_1 \ne t_2$.

Обратная задача: найти функции $u(x,t)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + b(x,t)u = \sum_{i=1}^{3} h_i(x,t)q_i(x) + f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{4}$$

$$u(x,t_1) = \varphi_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$u_t(x,t_1) = \psi_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$u(x,t_2) = \varphi_2(x), \qquad x \in \Omega. \tag{7}$$

В рассматриваемой обратной задаче условия (2) – (4) суть условия обычной первой начально-краевой задачи, условия же (5) – (7) есть условия переопределения, необходимые для нахождения дополнительных неизвестных функций $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$. Уточним, что условия (5) – (7) предполагают, что известна информация о состоянии среды или же иной характеристике, соответствующей процессу, описываемому уравнением (1) – в моменты времени t_1 и t_2.

2. Разрешимость обратной задачи

Введем в рассмотрение пространства H_0, H_1, V_0 и V_1:

$$H_i = \{v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega)), v_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^{i+1}(\Omega)), v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\},$$

$$V_i = \{v(x,t) : v(x,t) \in H_i, v_t(x,t) \in H_i\}, \quad i = 0,1;$$

нормы в этих пространствах определим естественным образом

$$||v||_{H_i} = ||v||_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + ||v_t||_{L_\infty(0,T;W_2^{i+1}(\Omega))} + ||v_{tt}||_{L_2(Q)},$$

$$||v||_{V_i} = ||v||_{H_i} + ||v_t||_{H_i} + ||v_{tt}||_{H_i} \quad i = 0,1.$$

Рассмотрим следующую линейную алгебраическую относительно функций $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$ систему

$$\sum_{i=1}^{3} a_i(x)h_i(x,t_k) = v_{tt}(x,t_k)+a(x,t_k)v_t(x,t_k)-\Delta\varphi_k(x)+b(x,t_k)\varphi_k(x)-f(x,t_k), \quad k=1,2, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i(x)h_{it}(x,t_1) = v_{ttt}(x,t_1)+a(x,t_1)v_{tt}(x,t_1)-\Delta\psi_1(x)+[a_t(x,t_1)+b(x,t_1)]\psi_1(x)+$$
$$+b_t(x,t_1)\varphi_1(x)-f_t(x,t_1).$$

Предполагая, что определитель $d_0(x)$ этой системы не обращается в нуль на множестве $\overline{\Omega}$, найдем функции $a_i(x)$:

$$a_i(x) = \alpha_0^i(x)+\alpha_1^i(x)v_{tt}(x,t_1)+\alpha_2^i(x)v_{ttt}(x,t_1)+\alpha_3^i(x)v_t(x,t_2)+\alpha_4^i(x)v_{tt}(x,t_2), \tag{9}$$

функции $\alpha_k^i(x)$, $k=0,1,2,3,4$ в равенствах (9) вполне конкретно вычисляются через функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$, $\psi(x)$, $\varphi_k(x)$, $h_j(x,t)$, $k=1,2$, $j=\overline{1,3}$.

Положим

$$A_j(x,t)=\sum_{i=1}^{3} h_i(x,t)\alpha_j^i(x), \quad B_j(x,t)=A_{jt}(x,t)-a(x,t)A_j(x,t), B_j(x)=B_j(x,0), \quad j=\overline{1,4},$$

$$s_i=\frac{5}{2}\max_{\overline{\Omega}} B_i^2(x)+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}} A_{ix}^2(x,0)+2\max_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,0)+b(x,0)]\max_{\overline{\Omega}} A_i^2(x,0), \quad i=\overline{1,4},$$

$$m_2=\frac{3t^2}{\delta^2}\left(\max_{\overline{Q}}[a_{tt}(x,t)+2b_t(x,t)]^2+\frac{t^2}{2}\max_{\overline{Q}} b_{tt}^2(x,t)\right),$$

$$k_i(x)=\frac{3t}{\delta^2}\max_{\overline{Q}} A_{itt}^2(x,t)+4t\max_{\overline{Q}}[2a_{tt}(x,t)+b_t(x,t)]\max_{\overline{\Omega}} A_i^2(x,0)+s_i(x), \quad i=\overline{1,4},$$

$$r_i(x)=k_i(x)+5m_2t\max_{\overline{\Omega}} A_i^2(x,0), \quad i=\overline{1,4},$$

$$\widetilde{r}(x)=\frac{2r_1(x)}{\min\limits_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,t)+b(x,t)]-2r_1(x)}+\frac{2r_2(x)}{1-2r_2(x)}+\frac{7\max\limits_{\overline{\Omega}} A_1^2(x,0)}{1-7\max\limits_{\overline{\Omega}} A_1^2(x,0)}+1,$$

$$d(x)=1+\frac{2r_4(x)\widetilde{r}(x)}{\min\limits_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,t)+b(x,t)]-2r_4(x)\widetilde{r}(x)}+\frac{7\max\limits_{\overline{\Omega}} A_4^2(x,0)\widetilde{r}(x)}{1-7\max\limits_{\overline{\Omega}} A_4^2(x,0)\widetilde{r}(x)},$$

$$c_i(x)=4\max_{\overline{\Omega}} A_{i+2}^2(x,0)\left(1+\frac{2\max\limits_{\overline{\Omega}} B_2^2(x)+\delta_1^2T}{1-2\max\limits_{\overline{\Omega}} B_2^2(x)+\delta_1^2T}+\frac{4\max\limits_{\overline{\Omega}} A_1^2(x,0)}{1-4\max\limits_{\overline{\Omega}} A_1^2(x,0)}\right), i=1,2,$$

$$c_3(x)=c_1(x)t_2\left(1+\frac{c_2(x)}{1-c_2(x)}\right),$$

$$f_1(x,t)=f(x,t)+\sum_{i=1}^{3} h_i(x,t)\alpha_0^i(x),$$

$$F(x,t)=f_{1tt}(x,t)-[a_{tt}(x,t)+2b_t(x,t)]u_1(x)-b_{tt}(x,t)[tu_1(x)+u_0(x)]+A_{3tt}(x,t)u_1(x).$$

Теорема 1. *Пусть для функций* $a(x,t)$, $b(x,t)$, $h_k(x,t)$, $k=\overline{1,3}$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ *и* $f(x,t)$ *выполняются включения* $a(x,t)\in C^3(Q)$, $b(x,t)\in C^3(Q)$, $h_k(x,t)\in W^1_\infty(Q)\cap W^2_2(Q)$, $h_{kt}(x,t)\in W^1_\infty(Q)$, $h_{ktt}(x,t)\in W^1_2(Q)$, $h_k(x,t_i)\in W^1_\infty(\Omega)$, $k=1,2,3$, $\varphi_i(x)\in W^2_2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $i=1,2$, $\psi_1(x)\in W^2_2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $u_0(x)\in W^4_2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $u_1(x)\in W^3_2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $f(x,t)\in L_2(0,T;W^2_2(\Omega))$, $f_t(x,t)\in L_2(0,T;W^1_2(\Omega))$, $f_{tt}(x,t)\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$.

Кроме того, пусть выполняются условия

$$A_2(x,0)\equiv 0,\quad d_0(x)\ge d_0>0,\quad x\in\overline{\Omega},$$

$$a(x,t)\ge a_0>0,\quad 2a_t(x,t)+b(x,t)>0,\quad 2a_{tt}(x,t)+b_t(x,t)>0,\quad (x,t)\in\overline{Q}.$$

Пусть $\exists\delta>0$, $\delta_1>0$ *такие, что выполняются следующие условия*

$$a_0-[\delta^2+t^2\max_{\overline{Q}}[2a_{tt}(x,t)+b_t(x,t)]+5m_2\frac{t^2}{2}]>0, \tag{10}$$

$$a_0-\frac{1}{2\delta_1^2}\max_{\overline{Q}}A^2_{2tt}(x,t)-7\delta^2>0, \tag{11}$$

$$1-\max\{2r_2(x),7\max_{\overline{\Omega}}A_1^2(x,0),2\max_{\overline{\Omega}}A^2_{2t}(x,0)+\delta_1^2T\}>0, \tag{12}$$

$$\min_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,t)+b(x,t)]-\max\{2r_1(x),2r_4(x)\widetilde{r}(x),2t_2^2r_3(x)\widetilde{r}(x)d(x)\}>0, \tag{13}$$

$$1-7\widetilde{r}(x)\cdot\max\{t_2^2\max_{\overline{\Omega}}A_3^2(x,0)d(x),\max_{\overline{\Omega}}A_4^2(x,o)\}>0, \tag{14}$$

$$1-\max\{c_2(x),c_3(x)t_2\}>0. \tag{15}$$

Тогда обратная задача (1) – (7) имеет решения $\{u(x,t),q_1(x),q_2(x),q_3(x)\}$ *такие, что* $u(x,t)\in V_0$, $q_k(x)\in W^1_2(\Omega)$, $k=\overline{1,3}$.

Доказательство. Положим

$$g_1(x)=\Delta u_0(x)-a(x,0)u_1(x)-b(x,0)u_0(x)+f_1(x,0),$$

$$g_2(x)=\Delta u_1(x)-[a_t(x,0)+b(x,0)]u_1(x)-b_t(x,0)u_0(x)+f_1t(x,0)-a(x,0)g_1(x),$$

$$\gamma_1(x)=g_1(x)+A_3(x,0)u_1(x),\quad \gamma_2(x)=g_2(x)+B_3(x,0)u_1(x).$$

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lw\equiv w_{tt}(x,t)-\Delta w+a(x,t)w_t(x,t)+(2a_t(x,t)+b(x,t))w(x,t)=$$

$$=F(x,t)+A_{1tt}(x,t)w(x,t_1)+A_{2tt}(x,t)w_t(x,t_1)+A_{3tt}(x,t)\int\limits_0^{t_2}w(x,\tau)d\tau+$$

$$+A_{4tt}(x,t)w(x,t_2)-[a_{tt}(x,t)+2b_t(x,t)]\int\limits_0^{t}w(x,\tau)d\tau-b_{tt}(x,t)\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{\tau}w(x,\xi)d\xi d\tau, \tag{16}$$

такую, что для нее выполняются условия (2), (3), а также следующие условия

$$w(x,0)=\gamma_1(x)+A_1(x,0)w(x,t_1)+A_3(x,0)\int\limits_0^{t_2}w(x,\tau)d\tau+A_4(x,0)w(x,t_2),\qquad x\in\Omega, \tag{17}$$

$$w_t(x,0)=\gamma_2(x)+B_1(x)w(x,t_1)+B_2(x)w_t(x,t_1)+B_3(x)\int\limits_0^{t_2} w(x,\tau)d\tau+B_4(x)w(x,t_2), \quad (18)$$

$$w(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)}=0. \quad (19)$$

Разрешимость данной краевой задачи докажем, комбинируя метод регуляризации и метод продолжения по параметру.

При фиксированном положительном ε рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L_{\varepsilon\lambda}w=w^\varepsilon_{tt}(x,t)-\Delta w^\varepsilon(x,t)+a(x,t)w^\varepsilon_t(x,t)+[2a_t(x,t)+b(x,t)]w^\varepsilon(x,t)-$$

$$-\varepsilon\Delta w^\varepsilon_t(x,t)=F(x,t)+\lambda r(x,t), \quad (16_{\varepsilon\lambda})$$

где

$$r(x,t)=A_{1tt}(x,t)w^\varepsilon(x,t_1)+A_{2tt}(x,t)w^\varepsilon_t(x,t_1)+A_{3tt}(x,t)\int\limits_0^{t_2} w^\varepsilon(x,\tau)d\tau+$$

$$+A_{4tt}(x,t)w^\varepsilon(x,t_2)-[a_{tt}(x,t)+2b_t(x,t)]\int\limits_0^{t} w^\varepsilon(x,\tau)d\tau-b_{tt}(x,t)\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{\tau} w^\varepsilon(x,\xi)d\xi d\tau,$$

и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), (17) – (19).

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача $(16_{\varepsilon\lambda})$, (2), (3), (17) – (19) разрешима в пространстве V_1 при произвольной функции $F(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Как известно, если множество Λ не пусто, открыто и замкнуто одновременно, то оно совпадает со всем отрезком $[0,1]$. А это и будет означать, что краевая задача (16), (2), (3), (17) – (19) имеет решение из пространства V_1.

При $\lambda=0$ существует функция $w^\varepsilon(x,t)$, принадлежащая пространству H_1, удовлетворяющая уравнению $(16_{\varepsilon,0})$ и такая, что для нее выполняются условия (17) – (19) – см. [13]. Имея функцию $w^\varepsilon(x,t)$, нетрудно с помощью условий (2) и (3) найти саму функцию $u^\varepsilon(x,t)$; очевидно, что эта функция будет принадлежать пространству V_1. Следовательно, множество Λ не пусто – число 0 принадлежит ему. Для доказательства открытости и замкнутости Λ установим необходимые априорные оценки решений задачи $(16_{\varepsilon\lambda})$, (2), (3), (17) – (19) из пространства V_1. Для удобства индекс ε у функции $w^\varepsilon(x,t)$ временно опустим.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega L_{\varepsilon\lambda}ww_\tau dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega Fw_\tau dxd\tau+\lambda\int\limits_0^t\int\limits_\Omega rw_\tau dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части данного равенства, используя условие (19), придем к следующему равенству

$$\frac12\int\limits_\Omega w_t^2(x,t)dx+\frac12\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega w_{x_i}^2(x,t)dx+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a(x,\tau)w_\tau^2dxd\tau+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_{x_i\tau}^2dxd\tau+$$

$$+\frac12\int\limits_\Omega[2a_t(x,t)+b(x,t)]w^2(x,t)dx=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega Fw_\tau dxd\tau+\lambda\int\limits_0^t\int\limits_\Omega r(x,\tau)w_\tau dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,0)dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,0)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[2a_t(x,0)+b(x,0)]w^2(x,0)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[2a_{\tau\tau}+b_\tau]w^2dxd\tau.$$

Учитывая условия задачи (17), (18), требования теоремы, налагаемые на функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, применяя элементарные арифметические неравенства, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t)dx+a_0\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_\tau^2dxd\tau+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_{x_i\tau}^2dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\min_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,t)+b(x,t)]\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)dx\le\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} F(x,\tau)w_\tau dxd\tau+\lambda\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} r(x,\tau)w_\tau dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\max_{\overline{Q}}[2a_{tt}(x,t)+b_t(x,t)]\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w^2dxd\tau+s_1(x)\int\limits_{\Omega} w^2(x,t_1)dx+s_2(x)\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t_1)dx+$$

$$+s_3(x)\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^{t_2} w(x,\tau)d\tau\right)^2dx+s_4(x)\int\limits_{\Omega} w^2(x,t_2)dx+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_1^2(x,0)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t_1)dx+$$

$$+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_3^2(x,0)\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_0^{t_2} w_{x_i}d\tau\right)^2dx+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_4^2(x,0)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t_2)dx+N_1,$$

где число N_1 определяется лишь входными данными задачи.

Применяя к ряду слагаемых правой части соотношения неравенства Юнга и Гельдера, учитывая вид функции $r(x,t)$, условие (17) краевой задачи ($16_{\varepsilon,\lambda}$) – (19), придем к следующему соотношению

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t)dx+a_0\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_\tau^2dxd\tau+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_{x_i\tau}^2dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\min_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,t)+b(x,t)]\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)dx\le m_1\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_\tau^2dxd\tau+k_1(x)\int\limits_{\Omega} w^2(x,t_1)dx+$$

$$+k_2(x)\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t_1)dx+t_2k_3(x)\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w^2dxd\tau+k_4(x)\int\limits_{\Omega} w^2(x,t_2)dx+$$

$$+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_1^2(x,0)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t_1)dx+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_3^2(x,0)t_2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2dxd\tau+$$

$$+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_4^2(x,0)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t_2)dx+m_2\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w^2dxd\tau+N_2,$$

где $m_1=\delta^2+t^2\max\limits_{\overline{Q}}[2a_{tt}(x,t)+b_t(x,t)]$, число N_2 определяется лишь входными данными задачи.

Оценивая сверху последнее интегральное слагаемое данного неравенства, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\min_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,t)+b(x,t)]\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)dx+$$

$$+(a_0-m_3)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_\tau^2 dxd\tau+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_{x_i\tau}^2 dxd\tau\le r_1(x)\int\limits_{\Omega} w^2(x,t_1)dx+r_2(x)\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t_1)dx+$$

$$+t_2 r_3(x)\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w^2 dxd\tau+r_4(x)\int\limits_{\Omega} w^2(x,t_2)dx+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_1^2(x,0)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t_1)dx+$$

$$+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_3^2(x,0)t_2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2 dxd\tau+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_4^2(x,0)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t_2)dx+N_3, \qquad (20)$$

где $m_3=m_1+5m_2\frac{t_2^2}{2}$, постоянная N_3 определяется лишь входными данными задачи.

В силу условия (10) первые три слагаемых левой части неравенства (20) будут ограничены сверху правой его частью. Полагая в этом следствии $t=t_1$, получим

$$\left[\frac{1}{2}-r_2(x)\right]\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t_1)dx+\left[\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_1^2(x,0)\right]\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t_1)dx+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\min_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,t)+b(x,t)]-r_1(x)\right)\int\limits_{\Omega} w^2(x,t_1)dx\le t_2 r_3(x)\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w^2 dxd\tau+r_4(x)\int\limits_{\Omega} w^2(x,t_2)dx+$$

$$+\frac{7}{2}t_2\max_{\overline{\Omega}}A_3^2(x,0)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2 dxd\tau+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_4^2(x,0)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t_2)dx+N_3.$$

В силу условий (12) и (13) теоремы из неравенства (20) имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t)dx+(a_0-m_3)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_\tau^2 dxd\tau+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_{x_i\tau}^2 dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\min_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,t)+b(x,t)]\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)dx\le t_2 r_3(x)\widetilde{r}(x)\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w^2 dxd\tau+r_4(x)\widetilde{r}(x)\int\limits_{\Omega} w^2(x,t_2)dx+$$

$$+\frac{7}{2}t_2\max_{\overline{\Omega}}A_3^2(x,0)\widetilde{r}(x)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2 dxd\tau+\frac{7}{2}\max_{\overline{\Omega}}A_4^2(x,0)\widetilde{r}(x)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t_2)dx+N_4, \qquad (21)$$

где число N_4 определяется лишь входными данными задачи.

Положив в одном из следствий последнего неравенства $t=t_2$, в силу условий (13), (14) теоремы не трудно прийти к следующему соотношению

$$\frac{1}{2}\min_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,t)+b(x,t)]\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} w_t^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,t)dx+$$

$$+(a_0-m_3)\int_0^t\int_\Omega w_\tau^2dxd\tau+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega w_{x_i\tau}^2dxd\tau\le t_2r_3(x)\widetilde{r}(x)d(x)\int_0^{t_2}\int_\Omega w^2dxd\tau+$$

$$+\frac{7}{2}t_2\max_{\overline{\Omega}}A_3^2(x,0)\widetilde{r}(x)d(x)\sum_{i=1}^n\int_0^{t_2}\int_\Omega w_{x_i}^2dxd\tau+N_5, \qquad (22)$$

постоянная N_5 определяется лишь входными данными задачи.

Проинтегрировав одно из следствий неравенства (22) по переменной τ от 0 до t и положив в полученном соотношении $t=t_2$, получим

$$\left(\min_{\overline{\Omega}}[2a_t(x,t)+b(x,t)]-2t_2^2r_3(x)\widetilde{r}(x)d(x)\right)\int_0^{t_2}\int_\Omega w^2dxd\tau+$$

$$+\left(1-7t_2^2\max_{\overline{\Omega}}A_3^2(x,0)\widetilde{r}(x)d(x)\right)\sum_{i=1}^n\int_0^{t_2}\int_\Omega w_{x_i}^2dxd\tau\le N_6,$$

постоянная N_6 определяется лишь входными данными задачи.

Отсюда в силу условий (13) и (14) теоремы из неравенства (22) получим первую априорную оценку

$$\int_\Omega w_t^2(x,t)dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega w_{x_i}^2(x,t)dx+\int_0^t\int_\Omega w_\tau^2dxd\tau+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega w_{x_i\tau}^2dxd\tau+\int_\Omega w^2(x,t)dx\le N_7, \qquad (23)$$

где число N_7 определяется лишь входными данными задачи и не зависит от ε.

Далее рассмотрим равенство

$$-\int_0^t\int_\Omega L_{\varepsilon\lambda}w\Delta w_\tau dxd\tau=-\int_0^t\int_\Omega F\Delta w_\tau dxd\tau-\lambda\int_0^t\int_\Omega r\Delta w_\tau dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в первом и втором слагаемых левой части равенства, используя условия (17) – (19) краевой задачи, применяя элементарные арифметические неравенства, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_\Omega w_{x_it}^2(x,t)dx+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega w_{x_ix_j}^2(x,t)dx+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega(\Delta w_\tau)^2dxd\tau\le\int_0^t\int_\Omega a(x,\tau)w_\tau\Delta w_\tau dxd\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega[2a_\tau+b]w\Delta w_\tau dxd\tau-\int_0^t\int_\Omega F\Delta w_\tau dxd\tau-\lambda\int_0^t\int_\Omega r(x,\tau)\Delta w_\tau dxd\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^n\int_\Omega B_2^2(x,0)w_{x_it}^2(x,t_1)dx+2\sum_{i=1}^n\int_\Omega A_1^2(x,0)w_{x_ix_j}^2(x,t_1)dx+\int_\Omega M_1^2(x)dx+$$

$$+2t_2\int_\Omega A_3^2(x,0)\sum_{i=1}^n\int_0^{t_2}w_{x_ix_j}^2d\tau dx+2\sum_{i=1}^n\int_\Omega A_4^2(x,0)w_{x_ix_j}^2(x,t_2)dx, \qquad (24)$$

где $M_1(x)$ представляет собой сумму, слагаемыми которой являются функция $w(x,t)$, ее производные первого порядка, либо функции, определяемые входными данными задачи.

Применяя к первым 4-м слагаемым правой части соотношения неравенство Юнга, взяв $\delta^2 = \frac{\varepsilon}{4}$, учитывая первую априорную оценку (23) будем иметь

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_it}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2(x,t)dx + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta w_\tau)^2 dxd\tau \le$$

$$\le \max_{\overline{\Omega}} B_2^2(x,0)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_it}^2(x,t_1)dx + 2\max_{\overline{\Omega}} A_1^2(x,0)\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2(x,t_1)dx +$$

$$+2t_2\max_{\overline{\Omega}} A_3^2(x,0)\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2 dxd\tau + 2\max_{\overline{\Omega}} A_4^2(x,0)\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2(x,t_2)dx + N_8, \tag{25}$$

где число N_8 определяется входными данными задачи и числом ε.

Полагая в одном из следствий данного неравенства $t = t_1$, в силу требований (12) теоремы, из неравенства (25) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_it}^2(x,t)dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2(x,t)dx + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta w_\tau)^2 dxd\tau \le$$

$$\le n_1(x)t_2\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2 dxd\tau + n_2(x)\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2(x,t_2)dx + N_9, \tag{26}$$

где

$$n_i(x) = 4\max_{\overline{\Omega}} A_{i+2}^2(x,0)\left(1 + \frac{2\max_{\overline{\Omega}} B_2^2(x,0)}{1 - 2\max_{\overline{\Omega}} B_2^2(x,0)} + \frac{4\max_{\overline{\Omega}} A_1^2(x,0)}{1 - 4\max_{\overline{\Omega}} A_1^2(x,0)}\right), i = 1,2,$$

число N_9 определяется входными данными задачи и числом ε.

Полагая в одном из следствий последнего неравенства $t = t_2$, в силу условия (15) получим

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2(x,t_2)dx \le \frac{n_1(x)t_2}{1 - n_2(x)}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2 dxd\tau + N_{10},$$

где число N_{10} определяется входными данными задачи и числом ε.

Таким образом, из неравенства (26) получим

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_it}^2(x,t)dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2(x,t)dx + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta w_\tau)^2 dxd\tau \le$$

$$\le n_1(x)t_2\left(1 + \frac{n_2(x)}{1 - n_2(x)}\right)\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\Omega} w_{x_ix_j}^2 dxd\tau + N_{11}, \tag{27}$$

число N_{11} определяется входными данными задачи и числом ε.

Проинтегрировав в одном из следствий неравенства (27) по переменной τ от 0 до t, положив в полученном неравенстве $t = t_2$, в силу условия (15) теоремы получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{t_2} \int_\Omega w_{x_i x_j}^2 dx d\tau \leq N_{12},$$

где постоянная N_{12} определяется входными данными задачи и числом ε.

В силу последнего из неравенства (27) приходим ко второй априорной оценке в случае, когда ε является фиксированной величиной

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega w_{x_i t}^2(x,t)dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega w_{x_i x_j}^2(x,t)dx + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta w_\tau)^2 dx d\tau \leq N_{13},$$

где число N_{13} определяется входными данными задачи и числом ε.

Третья оценка получается при умножении равенства $(16_{\varepsilon\lambda})$ на функцию $w_{\tau\tau}$, интегрирования полученного равенства по цилиндру Q_t с учетом первых двух оценок.

$$\int_0^t \int_\Omega w_{\tau\tau}^2 dx d\tau \leq N_{14},$$

постоянная N_{14} определяется входными данными задачи и числом ε.

Исходя из трех априорных оценок, мы приходим к финальной оценке в случае, когда ε является фиксированной величиной

$$\int_\Omega w^2(x,t)dx + \int_\Omega w_t^2(x,t)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega w_{x_i}^2(x,t)dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega w_{x_i x_j}^2(x,t)dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega w_{x_i t}^2(x,t)dx + \int_0^t \int_\Omega w_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega w_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega \Delta w_\tau^2 dx d\tau \leq N, \qquad (28)$$

где постоянная N определяется входными данными задачи и числом ε.

Из данной оценки и следует открытость и замкнутость множества Λ. Как уже говорилось выше, непустота, открытость и замкнутость множества Λ означает его совпадение со всем отрезком $[0,1]$, а, следовательно, и разрешимость краевой задачи (16_ε), (2), (3), (17) – (19) при фиксированном ε в пространстве V_1.

На следующем шаге рассмотрим случай, когда ε не является фиксированной величиной. Вновь рассмотрим краевую задачу (16_ε), (2), (3), (17) – (19) и получим в этом случае априорные оценки для ее решений.

Полученная при фиксированном ε первая априорная оценка (23) остается справедливой и в случае, когда ε не является фиксированной величиной.

Для получения второй априорной оценки умножим равенство (16_ε) на функцию Δw_t. Повторив ряд операций, что были произведены в случае, когда ε являлся фиксированной величиной, придем к неравенству (24) с $\lambda = 1$.

Интегрируя по частям в последних двух слагаемых левой части неравенства (24), применяя неравенство Юнга, учитывая условие, налагаемое теоремой на функцию $a(x,t)$, а также первую априорную оценку (23), придем к следующему соотношению

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega w_{x_i t}^2(x,t)dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \Delta w^2(x,t)dx + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta w_\tau)^2 dx d\tau + a_0 \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega w_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq$$

$$\leq -\int\limits_0^t\int\limits_\Omega F\Delta w_\tau dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_\Omega r(x,\tau)\Delta w_\tau dxd\tau + \delta^2\sum_{i,j=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w^2_{x_i\tau}dxd\tau +$$

$$+\max_{\overline{\Omega}} B_2^2(x,0)\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_it}(x,t_1)dx + 2\max_{\overline{\Omega}} A_1^2(x,0)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}(x,t_1)dx+$$

$$+2t_2\max_{\overline{\Omega}} A_3^2(x,0)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_0^{t_2}\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}dxd\tau + 2\max_{\overline{\Omega}} A_4^2(x,0)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}(x,t_2)dx + C_1,$$

где число C_1 определяется входными данными задачи и не зависит от ε.

Интегрируя по частям в первом слагаемом правой части последнего неравенства, а также в каждом из слагаемых функции $r(x,t)$, используя условие (19), неравенство Юнга, оценку (23), а также условия на функцию $F(x,t)$, придем к соотношению

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_it}(x,t)dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}(x,t)dx + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(\Delta w_\tau)^2dxd\tau + a_1\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w^2_{x_i\tau}dxd\tau \leq$$

$$\leq\left(\max_{\overline{\Omega}} B_2^2(x,0) + \frac{\delta_1^2 T}{2}\right)\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_it}(x,t_1)dx + 2\max_{\overline{\Omega}} A_1^2(x,0)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}(x,t_1)dx+$$

$$+2t_2\max_{\overline{\Omega}} A_3^2(x,0)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_0^{t_2}\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}dxd\tau + 2\max_{\overline{\Omega}} A_4^2(x,0)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}(x,t_2)dx + C_2, \qquad (29)$$

где $a_1 = a_0 - \frac{1}{2\delta_1^2}\max\limits_{\overline{Q}} A^2_{2tt}(x,t) - 7\delta^2$, постоянная C_2 определяется входными данными задачи и не зависит от ε.

Положив в одном из следствий неравенства (29) $t = t_1$, учитывая условие (12) теоремы, получим

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_it}(x,t)dx + \sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}(x,t)dx + 2\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(\Delta w_\tau)^2dxd\tau + 2a_1\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w^2_{x_i\tau}dxd\tau \leq$$

$$\leq c_1(x)t_2\sum_{i,j=1}^n\int\limits_0^{t_2}\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}dxd\tau + c_2(x)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}(x,t_2)dx + C_3, \qquad (30)$$

где число C_3 определяется входными данными задачи и не зависит от ε.

От неравенства (30) нетрудно прийти к соотношению

$$\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}(x,t)dx + \sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega w^2_{x_it}(x,t)dx + 2\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(\Delta w_\tau)^2dxd\tau +$$

$$+2a_1\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w^2_{x_i\tau}dxd\tau \leq c_3(x)\sum_{i,j=1}^n\int\limits_0^{t_2}\int\limits_\Omega w^2_{x_ix_j}dxd\tau + C_4, \qquad (31)$$

постоянная C_4 определяется входными данными задачи и не зависит от ε.

Проинтегрировав одно из следствий последнего неравенства по переменной τ от 0 до t, положив в полученном выражении $t = t_2$, в силу (15) из неравенства (31) получим вторую равномерную по ε априорную оценку.

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i t}^2(x,t)dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} w_{x_i x_j}^2(x,t)dx + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta w_\tau)^2 dxd\tau + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_{x_i\tau}^2 dxd\tau \le C_5,$$

постоянная C_5 определяется входными данными задачи и не зависит от ε.

Третья априорная оценка имеет тот же вид, что и в случае фиксированного ε и является очевидным следствием первых двух оценок.

Исходя из трех априорных оценок, приходим к финальной оценке вида (28), в которой правая часть определяется лишь входными данными задачи и не зависит от ε.

Эта оценка и дает нам разрешимость задачи (16_ε), (2), (3), (17) – (19) в пространстве V_0. Найденная функция $u(x,t) = u^\varepsilon(x,t)$ является решением уравнения ($16_{\varepsilon\lambda}$) с $\lambda = 1$.

Учитывая, что $w^\varepsilon = u_{tt}^\varepsilon$, исходя из финальной оценки, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{tttx_i}^{\varepsilon 2}(x,t)dx \le K.$$

При $t = t_i$ справедливы оценки $||u_{ttt}^\varepsilon(x,t_i)||_{W_2^1(\Omega)} \le C$, $i = 1, 2$.

Подпоследовательности $\{u_{ttt}^\varepsilon(x,t_1)\}$, $\{u_{ttt}^\varepsilon(x,t_2)\}$ равномерно ограничены в $W_2^1(\Omega)$. Тогда существует функция $u(x,t)$ такая, что при $m \to \infty$ имеют место следующие сходимости: $u_{ttt}^m(x,t_i) \to u_{ttt}(x,t_i)$, $i = 1,2$ сильно в $L_2(\Omega)$, $u_{tttt}^m(x,t) \to u_{tttt}(x,t)$, $u_{ttt}^m(x,t) \to u_{ttt}(x,t)$, $u_{tt}^m(x,t) \to u_{tt}(x,t)$, $\Delta u_{tt}^m(x,t) \to \Delta u_{tt}(x,t)$, $\sqrt{\varepsilon_m}\Delta u_{ttt}^m(x,t) \to 0$ при $\varepsilon_m \to 0$ слабо в $L_2(Q)$.

Из указанных сходимостей следует, что для предельной функции выполняется уравнение (16). Таким образом, найденная функция является решением краевой задачи (16), (2), (3), (17) – (19).

Проинтегрировав уравнение (16) по переменной τ от 0 до t, учитывая условия (2), (3), (17) (18), а также вид функций $B_i(x,0)$, $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$ и $g_2(x)$ придем к равенству

$$u_{ttt}(x,t) - \Delta u_t(x,t) + a(x,t)u_{tt}(x,t) + a_t(x,t)u_t(x,t) + b(x,t)u_t(x,t) + b_t(x,t)u(x,t) = f_{1t}(x,t) +$$

$$+ A_{3t}(x,t)u_1(x) + u_{tt}(x,t_1)A_{1t}(x,t) + u_{ttt}(x,t_1)A_{2t}(x,t) + A_{3t}(x,t)\int\limits_0^{t_2} u_{\tau\tau}d\tau + A_{4t}(x,t)u_{tt}(x,t_2).$$

Вновь проинтегрировав полученное равенство по переменной τ от 0 до t, применяя условия (2), (3), (17), условия, налагаемые теоремой на функцию $A_2(x,0)$, а также вид функций $\gamma_1(x)$, $g_1(x)$, $f_1(x,t)$ и $A_i(x,t)$, придем к равенству

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a(x,t)u_t(x,t) + b(x,t)u(x,t) = f(x,t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} h_i(x,t)\left(\alpha_0^i(x) + \alpha_1^i(x)u_{tt}(x,t_1) + \alpha_2^i(x)u_{ttt}(x,t_1) + \alpha_3^i(x)u_t(x,t_2) + \alpha_4^i(x)u_{tt}(x,t_2)\right).$$

Положив функции $q_i(x)$ равными $a_i(x)$ согласно (9), придем к уравнению (1). Таким образом, найденная нами функция $u(x,t)$ будет являться решением уравнения (1). Выполнимость условий (5) – (7) показывается аналогично. Условие (19) краевой задачи, а также условия, налагаемые на функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ влекут выполнимость условия (4).

Таким образом, найденные нами функции $u(x,t)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$ – есть решение первоначальной обратной задачи (1) – (7) из требуемых классов. $\square$

Литература

1. Романов, В. Г. Обратные задачи математической физики / В. Г. Романов. – М.: Наука, 1984.
2. Prilepko, A. I. Methods Solving Inverse Problems in Mathematical Phisic / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. – N. Y.: Marcel Deccer., 2000.
3. Anikonov, Yu. E. Multidimensional Inverse and I'll-Posed Problems for Differentional equations / Yu. E. Anikonov – Utrecht: The Netherlands VSP BV, 1995.
4. Anikonov, Yu. E. Inverse and I'll-Posed Sources Problems / Yu. E. Anikonov – Utrecht: The Netherlands VSP BV, 1997.
5. Kabanikhin, S. I. Identification Problems of wave Phenomena – theory and numerics / S. I. Kabanikhin, A. Lorenzi – Utrecht: The Netherlands VSP BV, 2000.
6. Savateev, E. G. Well-posedness and reduction of an inverse problem for a hyperbolic equation / E. G. Savateev // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1994. – V. 2, № 2. – P. 165 – 180.
7. Бубнов, В. А. О корректных краевых и обратных задачах для некоторых классов эволюционных уравнений: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / В. А. Бубнов. – Новосибирск, 1989. – 287 с.
8. Искендеров, А. Д. Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений / А. Д. Искендеров // Изв. АН АзССР, Сер. физ-техн. и мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 58 – 63.
9. Амиров, А. Х. К вопросу о разрешимости обратных задач / А. Х. Амиров // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 290, № 2. – С. 268 – 270.
10. Амиров, А. Х. К вопросу о разрешимости обратных задач / А. Х. Амиров // СМЖ. – 1987. – Т. 28, № 6. – С. 3 – 12.
11. Кожанов, А. И. Задача определения решения и правой части специального вида в параболическом уравнении / А. И. Кожанов // Обратные задачи и информационные технологии / Югорский НИИ инф. технологий. – 2002. – Т. 1, № 3. – С. 13 – 41.
12. Сафиуллова, Р. Р. Некоторые задачи для одного класса уравнений составного типа / Р. Р. Сафиуллова // Мат. заметки ЯГУ. – 2004. – Т. 11, № 2. – С. 58 – 63.
13. Kozhanov, A. I. Composite Type equations and Inverse Problems / A. I. Kozhanov – Utrecht: The Netherlands VSP BV, 1999.

Кафедра алгебры и геометрии,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия
regina-saf@yandex.ru

Поступила в редакцию 23 марта 2009 г.