УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ГРАНИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С. Абдурахманов, В. В. Карачик, Б. Х. Турметов

ON SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION WITH FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATORS

C. Abdurakhmanov, V. V. Karachik, B. Kh. Turmetov

Исследуются две краевые задачи для уравнения Пуассона с граничными операторами дробного порядка в смысле Римана – Лиувилля и Капуто.

Ключевые слова: операторы дробного порядка, уравнение Пуассона, краевые задачи

Two problems for the Poisson equation with boundary fractional operators in the Riemann-Liouville and Kaputo are under investigation.

Keywords: fractional differential operator, the Poisson equation, boundary value problem

1. Введение

В настоящей работе изучаются вопросы разрешимости краевых задач для уравнения Пуассона с граничными операторами дробного порядка.

Определение 1. *Оператором дробного дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля порядка α от функции $f(t)$ на интервале $(0,l)$ называется выражение, определяемое формулой*

$$D^{\alpha}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int\limits_0^t (t-s)^{m-1-\alpha} f(s)\,ds, \quad t\in(0,l).$$

Если функция $f(t)$ m-раз дифференцируема на интервале $(0,l)$, то выражение

$$D^{\alpha}_{*}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{m-1-\alpha} f^{(m)}(s)\,ds$$

называется оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто.

Пусть $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega=\{|x|=1\}$ – единичная сфера, а ω_n – ее площадь. Рассмотрим в Ω следующую краевую задачу:

$$\Delta u(x) = g(x), \quad x\in\Omega \tag{1}$$
$$B^{\alpha}u(x) = f(x), \quad x\in\partial\Omega, \tag{2}$$

где B^α – один из операторов дробного дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля D^α или Капуто D_*^α, действующий по направлению вектора x.

Отметим, что аналогичные задачи для уравнения Лапласа с граничными операторами целого порядка рассматривались в работах [1, 2], а для операторов дробного порядка в [4, 5, 6]. В зависимости от свойств решений мы будем изучать задачу (1), (2) в следующих постановках.

Задача 1. *Найти функцию $u(x)$ такую, что $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, $r^\alpha D^\alpha u(x) \in C(\bar\Omega)$ и удовлетворяющую условиям (1), (2) в классическом смысле.*

Задача 2. *Найти функцию $u(x)$ такую, что $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, $r^\alpha D_*^\alpha u(x) \in C(\bar\Omega)$ и удовлетворяющую условиям (1), (2) в классическом смысле.*

Справедливы следующие основные утверждения.

Теорема 1. *Пусть $0 < \lambda < 1$, $0 < \alpha < 1$ и $\lambda + \alpha$ – нецелое. Тогда для любого $g(x) \in C^\lambda(\bar\Omega)$ и $f(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$ решение задачи 1 существует и принадлежит классу $C^{\lambda+\alpha+1}(\bar\Omega)$.*

Теорема 2. *Пусть $0 < \lambda < 1$, $m-1 < \alpha < m$, $m = 2, 3, \ldots$ и $\lambda + \alpha$ – нецелое. Тогда, для любых функций $g(x) \in C^{m-2+\lambda}(\bar\Omega)$ и $f(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$ решение задачи 1 существует и принадлежит классу $C^{\lambda+\alpha}(\bar\Omega)$.*

Замечание 1. Нетрудно показать, что оператор D_*^α можно представить в виде

$$D_*^\alpha[f](t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1-\alpha} \frac{1}{\tau^m} \prod_{i=0}^{m-1} \left(\tau \frac{d}{d\tau} - i\right) f(\tau)\, d\tau.$$

По аналогии с этим оператором введем следующий оператор

$$D_*^{\alpha,j}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1-\alpha}}{\tau^{m-2}} \prod_{i=0, i\neq j}^{m-1} \left(\tau \frac{d}{d\tau} - i + 2\right) f(\tau)\, d\tau.$$

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$, $g(x)$ – полином произвольной степени. Тогда, для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\int_{\partial\Omega} H_j(x) f(x)\, ds_x = \int_\Omega H_j(x) |x|^\alpha D_*^{\alpha,j}[g](x)\, dx, \tag{3}$$

где $H_j(x)$ – однородный гармонический полином степени j и $j = 0, 1, \ldots, m-1$.

2. Вспомогательные утверждения

Для доказательств основных теорем нам необходимы некоторые вспомогательные утверждения. В дальнейшем будем считать, что $0 < \lambda < 1$, $k = 0, 1, \ldots$ и символ C будет обозначать положительную постоянную, значение которой нас не интересует.

Лемма 1. *Пусть $v(x)$ является решением задачи*

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= g(x), \quad x \in \Omega \\ v(x)|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Если $g(x) \in C^{k+\lambda}(\bar\Omega)$, то $v(x) \in C^{k+\lambda+2}(\bar\Omega)$.

Доказательство этой леммы приведено в работе [7, с. 113].

Лемма 2. *Пусть* $\mu > -1$ *и* $v(x) \in C^{k+\lambda}(\bar{\Omega})$. *Тогда, функция*

$$h(x) = \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\mu} v(\tau x)\, d\tau$$

принадлежит классу $C^{k+\lambda}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – мультииндекс с $|\beta| \le k$. Очевидно, что

$$D^{\beta} h(x) = \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\mu} D^{\beta} v(\tau x)\, d\tau = \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\mu} \tau^{\beta} D_y^{\beta} v(y)\, d\tau.$$

Следовательно, для любых $x, x_0 \in \bar{\Omega}$ имеем

$$|D^{\beta} h(x) - D^{\beta} h(x_0)| \le \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\mu} |D^{\beta} v(\tau x) - D^{\beta} v(\tau x_0)|\, d\tau \le C|x - x_0|^{\lambda}.$$

Таким образом, $D^{\beta} h(x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ для любого мультииндекса β такого, что $|\beta| \le k$. Отсюда следует, что $h(x) \in C^{\lambda+k}(\bar{\Omega})$. □

Лемма 3. *Пусть* $v(x) \in C^{m+\lambda+k}(\bar{\Omega})$. *Тогда,*

$$r^{\alpha} D^{\alpha} v(x) \in C^{\lambda+k}(\bar{\Omega}).$$

Доказательство. По определению

$$r^{\alpha} D^{\alpha} v(x) = \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dr^m} \int\limits_0^r (r-\tau)^{m-1-\alpha} v(\tau\theta)\, d\tau,$$

где $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{|x|}$. Рассмотрим функцию

$$h_1(x) = \int\limits_0^r (r-\tau)^{m-1-\alpha} v(\tau\theta)\, d\tau.$$

После замены переменных $t = r\tau$ функция $h_1(x)$ записывается в виде

$$h_1(x) = r^{m-\alpha} \int\limits_0^1 (1-t)^{m-1-\alpha} v(tx)\, dt = r^{m-\alpha} h_2(x).$$

По лемме 2 имеем

$$h_2(x) \in C^{\lambda+m+k}(\bar{\Omega}).$$

Тогда

$$r^a \frac{d^m h_1(x)}{dr^m} = r^a \frac{d^m}{dr^m} \left[r^{m-\alpha} h_2(x) \right] = r^a \sum_{i=0}^{m} C_{i,\alpha} r^{m-\alpha-i} \frac{d^{m-i} h_2(x)}{dr^{m-i}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} C_{i,\alpha} r^{m-i} \frac{d^{m-i} h_2(x)}{dr^{m-i}}.$$

Так как при $i = 0$ справедливо включение

$$\frac{d^m h_2(x)}{dr^m} \in C^{\lambda+k}(\bar{\Omega}),$$

то функция

$$r^a \frac{d^m h_1(x)}{dr^m}$$

принадлежит классу $C^{\lambda+k}(\bar{\Omega})$. Следовательно,

$$r^\alpha D^\alpha v(x) \in C^{\lambda+k}(\bar{\Omega}).$$

Лемма 3 доказана. □

Рассмотрим функцию

$$E(x,y) = \frac{1}{n-2}|x-y|^{2-n},$$

которая является фундаментальным решением оператора Лапласа.

Лемма 4. *Если $|y| < |x|$, то справедливо разложение*

$$E(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+n-2} \frac{|y|^k}{|x|^{k+n-2}} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right), \tag{5}$$

где $H_k^{(i)}$ – ортогональная система однородных гармонических полиномов степени k, обладающих свойством $\|H_k^{(i)}\|_{L_2(\partial\Omega)} = \sqrt{\omega_n}$.

Доказательство. Пусть $|y| < |x|$. Тогда

$$|x-y|^{2-n} = \left|\frac{x}{|x|}|x| - \frac{y}{|x|}|x|\right|^{2-n} = |x|^{2-n}\left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|x|}\right|^{2-n} = |x|^{2-n}\left|\xi - \eta\right|^{2-n},$$

где

$$\xi = \frac{x}{|x|},\ \eta = \frac{y}{|x|},\ |\xi| = 1,\ |\eta| < 1.$$

Далее,

$$|\xi-\eta|^{2-n} = \left[1 - 2\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|x|}\right) + \frac{|y|^2}{|x|^2}\right]^{1-\frac{n}{2}} = \left[1 - 2\frac{|y|}{|x|}\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right) + \frac{|y|^2}{|x|^2}\right]^{1-\frac{n}{2}} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\frac{n}{2}-1}\left[\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right)\right] \frac{|y|^k}{|x|^k},$$

где $C_k^{\frac{n}{2}-1}(t)$ многочлены Гегенбауэра (см. [8]). Известно (см. [8]), что для многочленов Гегенбауэра имееют место соотношения

$$C_k^{\frac{n}{2}-1}(1) = \frac{(k+n-3)!}{k!(n-3)!},$$
$$h_k = \frac{2k+n-2}{n-2} C_k^{\frac{n}{2}-1}(1).$$

Кроме того, если $S_k^{(i)}(\xi)$ – произвольная ортонормированная система сферических гармоник степени k, то

$$\frac{C_k^{\frac{n}{2}-1}[(\xi,\eta)]}{C_k^{\frac{n}{2}-1}(1)} = \frac{\omega_n}{h_k}\sum_{i=1}^{h_k} S_k^{(i)}(\xi)S_k^{(i)}(\eta),$$

где $|\xi| = 1$, $|\eta| = 1$. Тогда, функция $|x-y|^{2-n}$ представляется в виде

$$|x-y|^{2-n} = |x|^{2-n}\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\frac{n}{2}-1}[1]\left(\frac{\omega_n}{h_k}\sum_{i=1}^{h_k} S_k^{(i)}(\xi)S_k^{(i)}(\eta)\right)\frac{|y|^k}{|x|^k}.$$

Положим

$$S_k^{(i)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}}H_k^{(i)}(\xi),\ S_k^{(i)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}}H_k^{(i)}(\eta),$$

т.е.

$$S_k^{(i)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right),\ S_k^{(i)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}}H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right).$$

Отсюда, для функции $E(x,y)$ получаем представление (5). Лемма 4 доказана. □

Замечание 2. Похожий результат был получен также в [3] (лемма 3, с. 3517).

Следствие 1. Если выполняется неравенство $|x| < |y|$, то справедливо представление

$$E(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+n-2}\frac{|x|^k}{|y|^{k+n-2}}\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right).$$

Пусть $g(x)$ – полином произвольной степени. Предположим что, $P_m(x)$ – однородный полином степени m. Тогда известно (см. [9], с. 159), что существуют однородные гармонические полиномы $Y_{m-2k}(x)$ степени $m-2k$ такие, что

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} |x|^{2k}Y_{m-2k}(x).$$

Далее, так как любой полином можно выразить через однородные полиномы, то $g(x)$ можно представить в виде

$$g(x) = \sum_{k,s}|x|^{2k}Y_s^{(k)}(x),$$

где $Y_s^{(k)}(x)$ – однородные гармонические полиномы степени s. Рассмотрим объемный потенциал $V(x)$ с плотностью $g(x)$, т.е.

$$V(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega} E(x,y)g(y)dy.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Если*

$$g(x) = \sum_{k,s}|x|^{2k}Y_s^{(k)}(x),$$

то для любого $x \in \bar{\Omega}$ *имеем*

$$V(x) = \sum_{k,s}\frac{|x|^{2k+2}Y_s^{(k)}(x)}{(2k+2)(2k+2s+n)} - \sum_{k,s}\frac{Y_s^{(k)}(x)}{(2k+2)(2s+n-2)}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\rho = |y|$, $\xi = \frac{y}{|y|}$. Тогда

$$V(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\Omega} E(x, \rho\xi) g(\rho\xi)\, dS_\xi\, d\rho. \tag{7}$$

Обозначим $f(x) = |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x)$. Представим интеграл в правой части (7) в виде

$$V(x) = \int\limits_0^{|x|} + \int\limits_{|x|}^{1} = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим интеграл I_1 для функции $f(\rho\xi)$. Используя разложение (5), имеем

$$I_1 = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^{|x|} \rho^{n-1} \int\limits_{|\xi|=1} E(x, \rho\xi) f(\rho\xi)\, dS_\xi\, d\rho =$$

$$= -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_0^{|x|} \rho^{n-1} \int\limits_{|\xi|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m |x|^{-(m+n-2)}}{2m+n-2} \sum_{i=1}^{h_k} H_m^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_m^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right) f(\rho\xi)\, dS_\xi\, d\rho =$$

$$= -\frac{1}{\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(m+n-2)}}{2m+n-2} \int\limits_0^{|x|} \rho^{n-1+m+2k+s} \sum_{i=1}^{h_k} H_m^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) \int\limits_{|\xi|=1} H_m^{(i)}(\xi) Y_s^{(k)}(\xi)\, dS_\xi\, d\rho.$$

Далее, учитывая ортогональность сферических гармоник различной степени и равенство

$$Y_s^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \sum_{i=1}^{h_s} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} H_s^{(i)}(\xi) Y_s^{(k)}(\xi)\, dS_\xi H_s^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

получаем

$$I_1 = -\frac{|x|^{-(s+n-2)}}{2s+n-2} \int\limits_0^{|x|} \rho^{2s+2k+n-2} d\rho Y_s^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) = -\frac{|x|^{s+2k+2}}{(2s+n-2)(2s+2k+n)} Y_s^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) =$$

$$= -\frac{|x|^{2k+2}}{(2s+n-2)(2s+2k+n)} Y_s^{(k)}(x).$$

Преобразуем второй интеграл I_2

$$I_2 = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|x|}^{1} \rho^{n-1} \int\limits_{|\xi|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m |x|^{-(m+n-2)}}{2m+n-2} \sum_{i=1}^{h_k} H_m^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_m^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right) \rho^{2k+s} Y_s^{(k)}(\xi)\, dS_\xi\, d\rho =$$

$$= -\frac{|x|^s}{2s+n-2} \int\limits_{|x|}^{1} \rho^{2k+1}\, d\rho Y_s^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) = -\frac{1-|x|^{2k+2}}{(2s+n-2)(2k+2)} Y_s^{(k)}(x).$$

Таким образом, будем иметь

$$V(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_\Omega E(x,y)g(y)dy = -\sum_{k,s}\frac{|x|^{2k+2}}{(2s+n-2)(2s+2k+n)}Y_s^{(k)}(x) +$$
$$+\sum_{k,s}\frac{|x|^{2k+2}-1}{(2s+n-2)(2k+2)}Y_s^{(k)}(x) = \sum_{k,s}\frac{|x|^{2k+2}Y_s^{(k)}(x)}{(2k+2)(2s+2k+n)} -$$
$$-\sum_{k,s}\frac{Y_s^{(k)}(x)}{(2k+2)(2s+n-2)}.$$

Лемма доказана. □

Замечание 3. Похожий результат был получен также в [2] (лемма 1, с. 416) для задачи (1), (2) с операторами целого порядка.

Лемма 6. *Пусть*

$$g(x) = \sum_{k,s}|x|^{2k}Y_s^{(k)}(x).$$

Тогда для $2k+s+2>\alpha$ *справедливо равенство*

$$r^\alpha D_*^{\alpha,j}[g](x) = \sum_{k,s}\prod_{i=0,i\neq j}^{m-1}(2k+s-i+2)\frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)}|x|^{2k+2}Y_s^{(k)}(x).$$

Доказательство. По определению оператора $D_*^{\alpha,j}[g](x)$ запишем

$$r^\alpha D_*^{\alpha,j}[g](x) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(m-\alpha)}\int\limits_0^r\frac{(r-\tau)^{m-1-\alpha}}{\tau^{m-2}}\prod_{i=0,i\neq j}^{m-1}\left(\tau\frac{d}{d\tau}-i+2\right)g(\tau\theta)\,d\tau =$$
$$= \frac{r^2}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{k,s}\prod_{i=0,i\neq j}^{m-1}(2k+s-i+2)|x|^{2k}Y_s^{(k)}(x)\int\limits_0^1(1-t)^{m-1-\alpha}t^{2k+s+2-m}\,dt =$$
$$= \sum_{k,s}\prod_{i=0,i\neq j}^{m-1}(2k+s-i+2)\frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)}|x|^{2k+2}Y_s^{(k)}(x).$$

Лемма доказана. □

3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Представим решение задачи 1 в виде $u(x) = v(x) + w(x)$, где $v(x)$ решение задачи (4), а $w(x)$ решение следующей задачи

$$\begin{gathered}\Delta w(x) = 0, \quad x\in\Omega \\ D^\alpha w(x)|_{\partial\Omega} = f(x) - r^a D^\alpha v(x) \equiv f_1(x).\end{gathered} \tag{8}$$

Известно (см. [6]), что для любого $f_1(x)\in C(\partial\Omega)$ решение задачи (8) существует. Далее, из результатов разделов 1 и 2 следует, что если $f_1(x)\in C^{\lambda+k}(\partial\Omega)$, то решение задачи (8) принадлежит классу $C^{\lambda+k+\alpha}(\bar\Omega)$. Остается изучить гладкость решения задачи (4). Так как $g(x)\in C^\lambda(\bar\Omega)$, то в силу утверждения леммы 1 имеем $v(x)\in C^{\lambda+2}(\bar\Omega)$. Тогда из леммы 3 следует, что $r^\alpha D^\alpha v(x)\in C^{\lambda+1}(\bar\Omega)$, и, следовательно, получим $f_1(x)\in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$. Теорема 1 доказана. □

Используя результаты работы [10] гладкость решения задачи 1 в теореме 1 можно уточнить в следующем виде.

Лемма 7. *Пусть для функции $g(x)$ имеет место оценка*

$$|g(x)| \le C(1-|x|)^{\lambda-1}$$

и для этой функции решение задачи (4) существует. Тогда для любого $\mu<\lambda$ функция $v(x)$ принадлежит классу $C^{1+\mu}(\bar\Omega)$.

Теорема 4. *Пусть $0<\lambda<1$, $0<\alpha<\lambda$ и $\lambda+\alpha$ – нецелое. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6, то для любого $f(x)\in C^{\lambda}(\partial\Omega)$ решение задачи 1 существует и принадлежит классу $C^{\lambda+\alpha}(\bar\Omega)$.*

Доказательства теорем 2 и 4 проводится повторением доказательства теоремы 1 с небольшими изменениями.

Доказательство теоремы 3. Осуществим в задаче 1 замену переменных по формуле $u(x)=V(x)+w(x)$, где функция $V(x)$ находится из (5). Тогда она перейдет в однородную задачу (1), (2) с функцией $\psi(x)$ вида

$$\psi(x)=f(x)-D^{\alpha}\mathrm{V}(x)|_{\partial\Omega}\,.$$

Очевидно, что $D^{\alpha}_{*}\mathrm{V}(x)\in C(\partial\Omega)$. Поэтому, применяя результат работы [4], найдем

$$0=\int\limits_{\partial\Omega}H_j(x)\psi(x)ds_x=\int\limits_{\partial\Omega}H_j(x)f(x)ds_x-\int\limits_{\partial\Omega}H_j(x)r^{\alpha}D^{\alpha}_{*}\mathrm{V}(x)\,ds_x,$$

т.е. условием разрешимости задачи 2 является равенство

$$\int\limits_{\partial\Omega}H_j(x)f(x)ds_x=\int\limits_{\partial\Omega}H_j(x)r^{\alpha}D^{\alpha}_{*}\mathrm{V}(x)\,ds_x.$$

Вычислим $r^{\alpha}D^{\alpha}_{*}\mathrm{V}(x)$. Используя представление (6), имеем

$$r^{\alpha}D^{\alpha}_{*}\left[V\right](x)=\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)}\int\limits_{0}^{r}(r-\tau)^{m-1-\alpha}\frac{1}{\tau^{m}}\prod_{i=0}^{m-1}\left(\tau\frac{d}{d\tau}-i\right)V(r\theta)\,d\tau=$$

$$=\sum_{k,s}\prod_{i=0}^{m-1}\frac{(2k+s-i+2)}{(2k+2)(2k+2s+n)}\frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)}|x|^{2k+2}Y_s^{(k)}(x)-$$

$$-\sum_{k,s}\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-\alpha)}Y_s^{(k)}(x).$$

Заметим, что если $2k+s+2<\alpha$, то $D^{\alpha}_{*}\left[V\right](x)=0$.

Преобразуем интеграл

$$\int\limits_{\partial\Omega}H_j(x)r^{\alpha}D^{\alpha}_{*}\mathrm{V}(x)ds_x.$$

Так как для любого $j\neq s$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\partial\Omega}H_j(x)Y_s^{(k)}(x)\,ds_x=0, \tag{9}$$

то

$$\sum_{k,s} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-\alpha)} \int\limits_{\partial\Omega} H_j(x) Y_s^{(k)}(x)\, ds_x = 0$$

для любых j, s. Поэтому, достаточно изучить интеграл

$$I = \int\limits_{\partial\Omega} H_j(x) \sum_{k,s} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{(2k+s-i+2)}{(2k+2)(2k+2s+n)} \frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)} |x|^{2k+2} Y_s^{(k)}(x)\, ds_x.$$

Пусть

$$g_1(x) = |x|^{2k+2} Y_s^{(k)}(x).$$

Тогда в силу (9) будем иметь

$$\int\limits_{\partial\Omega} H_j(x) g_1(x) ds_x = \int\limits_{\partial\Omega} H_j(x) Y_j^{(k)}(x) ds_x.$$

Следовательно,

$$I = \sum_{k} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{(2k+j-i+2)}{(2k+2)(2k+2j+n)} \frac{\Gamma(2k+j+3-m)}{\Gamma(2k+j+3-\alpha)} \int\limits_{\partial\Omega} H_j(x) Y_j^{(k)}(x)\, ds_x.$$

Далее, учитывая, что j принимает значения $j = 0, 1, \ldots, m-1$ имеем

$$I = \sum_{k} \prod_{i=0, i\neq j}^{m-1} \frac{(2k+j-i+2)}{(2k+2j+n)} \frac{\Gamma(2k+j+3-m)}{\Gamma(2k+j+3-\alpha)} \int\limits_{\partial\Omega} H_j(x) Y_j^{(k)}(x)\, ds_x.$$

Известно (см. [2], лемма 3, с. 417), что выполняется равенство

$$\frac{1}{2k+s+j+n} \int\limits_{\partial\Omega} H_j(x) Y_s^{(k)}(x) ds_x = \int\limits_{\Omega} H_j(x) |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x)\, dx. \tag{10}$$

Тогда, используя (9) и (10), интеграл I можно записать в виде

$$I = \sum_{k,s} \prod_{i=0, i\neq j}^{m-1} \frac{(2k+s-i+2)}{(2k+j+s+n)} \frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)} \int\limits_{\partial\Omega} H_j(x) Y_s^{(k)}(x)\, ds_x =$$

$$= \sum_{k,s} \prod_{i=0, i\neq j}^{m-1} (2k+s-i+2) \frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)} \int\limits_{\Omega} H_j(x) |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x)\, ds_x =$$

$$= \int\limits_{\Omega} H_j(x) \sum_{k,s} \prod_{i=0, i\neq j}^{m-1} (2k+s-i+2) \frac{\Gamma(2k+s+3-m)}{\Gamma(2k+s+3-\alpha)} |x|^{2k} Y_s^{(k)}(x)\, dx.$$

И, наконец, из леммы 6 следует , что

$$I = \int\limits_{\Omega} H_j(x) r^{\alpha} D_*^{\alpha,j} [g](x)\, dx.$$

Таким образом, верно равенство

$$\int\limits_{\partial\Omega} H_j(x) r^{\alpha} D_*^{\alpha} \mathrm{V}(x) ds_x = \int\limits_{\Omega} H_j(x) r^{\alpha} D_*^{\alpha,j} [g](x)\, dx.$$

Отсюда вытекают равенства (3). Теорема 3 доказана. □

Литература

1. Карачик, В. В. О разрешимости одной задачи для уравнения Пуассона в шаре / В. В. Карачик // Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент. – 1993. – Вып. 95. – С.77 – 88.
2. Карачик, В. В. Об одной задаче для уравнения Пуассона с нормальными производными на границе / В. В. Карачик // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32, № 3. – С. 416 – 418.
3. Karachik, V. V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V. V. Karachik// Proceedings of American Mathematical Society. – 1998. – V. 126, №. 12. – P. 3513 – 3519.
4. Турметов, Б.Х. Об одной краевой задаче для гармонического уравнения / Б. Х. Турметов // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32, № 8. – С. 1089 – 1092.
5. Турметов, Б.Х. О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка / Б. Х. Турметов // Математические труды. – Новосибирск. – 2004. – Т.7, № 1. – С.189 – 199.
6. Абдурахманов, С. О гладкости решения краевых задач с операторами дробного дифференцирования / С. Абдурахманов // Узбек. мат. журн. – 2006. – № 2. – С. 3 – 8.
7. Гильбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гильбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 463 с.
8. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен , А. Эрдейи. – Т.2. – М.: Наука, 1966. – 295 с.
9. Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
10. Алимов, Ш. А. Об одной задаче с наклонной производной / Ш. А. Алимов // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т.17, № 10. – С. 1738 – 1751.

Ташкентский государственный технический университет
имени А. Беруни, г. Ташкент, Республика Узбекистан;

Южно-Уральский государственный университет;

Международный казахско-турецкий университет
имени Х. А. Ясави, г. Туркестан, Республика Казахстан

karachik@susu.ru

Поступила в редакцию 4 сентября 2009 г.