УДК 517.9

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЖИДКОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ

***А. Ф. Гильмутдинова***

# NUMERAL COMPUTATION OF PROCESSES IN LIQUID SEMI-CONDUCTOR

***A. F. Gilmutdinova***

Целью статьи является численное исследование начально-краевой задачи для уравнения КПС, подтверждающий феномен неединственности данной задачи

*Ключевые слова: уравнение соболевского типа, численное моделирование, фазовое пространство*

The goal of the paper is the numerical study of an initial-boundary problem for the Korpusov – Pletner – Sveshnikov equation in which the phenomena of solutions nonuniqness of this problem was show.

*Keywords: Sobolev type equation, numeral computation, phase space*

## Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$. В области $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \alpha\nabla^2 u + \beta(\nabla, u\nabla u), \tag{0.1}$$

моделирующее метастабильные процессы в жидком двухкомпонентном полупроводнике. Параметры $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства полупроводника, причем если знаки параметров $\alpha$ и $\beta$ для нас безразличны, то о знаке $\lambda$ следует сказать особо ввиду его важности для дальнейшего. Параметр $\lambda = \kappa/r^2$, где $\kappa$ - коэффициент электрической поляризуемости, а $r^2$ - некоторая положительная постоянная, отвечающая за другие свойства полупроводника. Так вот, квазистационарные процессы в полупроводниках возможны только при условии отрицательности коэффициента $\kappa$. Причем именно в данном случае возможен пробой полупроводника, наблюдаемый экспериментально ([1], гл.2, п.1 и п.2).

Впервые уравнение (0.1) было получено в работе [2], поэтому в дальнейшем оно будет называться по имени авторов – *уравнением Корпусова – Плетнера – Свешникова* (*уравнением КПС*). В этой же работе была установлена однозначная разрешимость уравнения (0.1) при краевых условиях Дирихле на границе $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ и начальном условии вида

$$(\lambda - \nabla^2)(u(x,0) - u_0(x)) = 0,\ x \in \Omega, \tag{0.2}$$

но только в случае положительности параметра $\lambda$, что влечет обратимость дифференциального оператора при производной по времени в уравнении КПС.

Качественное исследование данной задачи облегчается тем обстоятельством, что она в подходящим образом подобранных банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ редуцируется к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$L(u(0) - u_0) = 0, \tag{0.3}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{0.4}$$

Основным методом исследования полулинейных уравнений соболевского типа служит метод фазового пространства, предложенный Г. А. Свиридюком и Т. Г. Сукачевой [3].

Нашей целью является численное исследование данной начально-краевой задачи.

# 1. Морфология фазового пространства

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \nabla^2)(u(x,0) - u_0(x)) = 0,\ x \in (a,b), \tag{1.1}$$

$$u(a,t) = u(b,t) = 0,\ t \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова

$$\lambda u_t - u_{txx} = \alpha u_{xx} + \beta(uu_x)_x. \tag{1.3}$$

Чтобы редуцировать задачу (1.2), (1.3) к уравнению (0.4) возьмем пространства $\mathfrak{U} = \overset{\circ}{W}{}^1_2$, $\mathfrak{F} = W_2^{-1}$. Пространство $\mathfrak{F}$ сопряжено к $\mathfrak{U}$ относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$ из $L_2$. Операторы $L$ и $M$ определим формулами

$$< Lu, v >= \int_a^b (\lambda uv + u_x v_x)dx,\ < Mu, v >= -\int_a^b \alpha u_x v_x dx,$$

где $u, v \in \mathfrak{U}$. По построению операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и фредгольмовы.

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ занумерованные по невозрастанию множество собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на $(a,b)$, а через $\{\varphi_k\}$–ортонормированное в смысле $L_2$ множество соответствующих собственных функций. Определим оператор $N$ формулой

$$< N(u), v >= -\int_a^b \beta u u_x v_x dx,\ u, v \in \mathfrak{U}.$$

Построим $L$ - спектр оператора $M$

$$\sigma^L(M) = \left\{ \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} :\ k \in \mathbb{N} \backslash \{l :\ \lambda = \lambda_l\} \right\}.$$

Проекторы имеют вид

$$P = \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l, \quad Q = \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l.$$

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle (Mu + N(u)), \varphi_l \rangle = 0,\ \lambda = \lambda_l\}$$

и пространства

$$\mathfrak{U}^0 = \ker L = \operatorname{span}\{\varphi_l :\ \lambda = \lambda_l\},\ \mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_l \rangle = 0,\ \lambda = \lambda_l\}.$$

Возьмем произвольную точку $u \in \mathfrak{U}$, тогда $u = a\varphi_l + v$, где $v = Pu \in \mathfrak{U}^1$, $a \in \mathbb{R}$. Точка $u \in \mathfrak{M}$ точно тогда, когда выполнено

$$\frac{a^2}{2}\|\varphi_l\|^3_{L_3} + a\left(\int\limits_a^b v\varphi_l^2 dx + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_a^b v^2\varphi_l dx = 0. \tag{1.4}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Delta(v) = (\int\limits_a^b v\varphi_l^2 dx + \frac{\alpha}{\beta})^2 - \|\varphi_l\|^3_{L_3}\int\limits_a^b v^2\varphi_l dx,$$

$\Delta : \mathfrak{U}^1 \to \mathbb{R}$, и построим множества

$$\mathfrak{U}^1_+ = \{v \in \mathfrak{U}^1 : \Delta(v) > 0\},\ \mathfrak{U}^1_- = \{v \in \mathfrak{U}^1 : \Delta(v) < 0\}.$$

Возьмем точку $v \in \mathfrak{U}^1_+$, тогда уравнение (1.4) имеет два решения

$$\begin{aligned} a_- &= \|\varphi_l\|^{-3}_{L_3}\left(-\tfrac{\alpha}{\beta} - \int\limits_a^b v\varphi_l^2 dx - \sqrt{\Delta(v)}\right), \\ a_+ &= \|\varphi_l\|^{-3}_{L_3}\left(-\tfrac{\alpha}{\beta} - \int\limits_a^b v\varphi_l^2 dx + \sqrt{\Delta(v)}\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Построим множества

$$\mathfrak{M}_{+(-)} = \{u \in \mathfrak{U} :\ u = a_{+(-)}(v)\varphi_l + v,\ v \in \mathfrak{U}^1_+\}.$$

С использованием подхода, изложенного в [4], доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *и*

*(i)* $\lambda \notin \{\lambda_k\}$. *Тогда фазовым пространством уравнения* (1.3) *является все пространство* $\mathfrak{U}$.

*(ii)* $\lambda \in \{\lambda_k\}$. *Тогда фазовым пространством уравнения* (1.3) *является множество* $\mathfrak{M}_+ \cup \mathfrak{M}_-$, *каждая компонента которого* $\mathfrak{M}_+$ *и* $\mathfrak{M}_-$ *биективно проектируется на множество* $\mathfrak{U}^1_+$.

**Теорема 2.** *При любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *и*
*(i)* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-\lambda_k\}$ *существует точно одно решение задачи* (1.1) – (1.3) *при любых* $u_0 \in \mathfrak{U}$.
*(ii)* $\lambda \in \{-\lambda_k\}$ *существует два различных решения задачи* (1.1) – (1.3) *при любых* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *таких, что* $Pu_0 \in \mathfrak{U}^1_+$.
*(iii)* $\lambda \in \{-\lambda_k\}$ *не существует ни одного решения задачи* (1.1) – (1.3) *при любых* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *таких, что* $Pu_0 \in \mathfrak{U}^1_-$.

## 2. Численные эксперименты

На основе теоретических результатов для подтверждения нетривиальности фазового пространства задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова в системе компьютерной математики Maple 12.0. разработана программа, которая позволяет:

1. По заданным коэффициентам $\alpha, \beta, \lambda$ на основе метода Галеркина находить численное решение задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова.

2. Получить графическое изображение этого приближенного решения, которое показывает нетривиальность фазового пространства.

Для реализации вычислительных алгоритмов программы использовались встроенные функции и стандартные операторы языка программирования Maple 12.0. Для получения графического изображения подключен пакет plots.

В полосе $(0,\pi)\times\mathbb{R}$ рассмотрим уравнение Корпусова – Плетнера – Свешникова

$$\lambda u_t - u_{txx} = \alpha u_{xx} + \beta(uu_x)_x. \tag{2.1}$$

и начально-краевую задачу

$$L(u(0)-u_0)=0, \tag{2.2}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ t\in\mathbb{R} \tag{2.3}$$

для него. Решение начально-краевой задачи (2.1)-(2.3) будем искать в виде галеркинской суммы

$$u^m(t,x)=\sum_{k=1}^{m}u_k(t)\varphi_k,\ m>1, \tag{2.4}$$

где $\{\varphi_k\}$ – ортонормированное в смысле $L_2$ множество собственных функций, соответствующие собственным значениям $\lambda_k$ однородной задачи Дирихле для оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на $(0,\pi)$. Легко подсчитать, что $\varphi_k=\varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)$, а $\lambda_k=-k^2$.

**Пример 1.** *Требуется найти численное решение задачи* (2.1)-(2.3) *при заданных коэффициентах* $\alpha=20$, $\beta=25$, $\lambda=-1$ *и* $m=2$, *а также получить графическое изображение этого решения.*

Так как $m=2$, то в силу (2.4)

$$u(t,x)=u_1(t)\sqrt{2/\pi}\sin x+u_2(t)\sqrt{2/\pi}\sin 2x.$$

$\lambda=-1$ (условия теоремы 2(ii), (iii) выполняются, ввиду того, что $\lambda\in\{-k^2\}$). Тогда , умножив скалярно (2.1) на функции $\varphi_k$, $k=1,2$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 4\sqrt{2}u_2(t)^2+5\sqrt{2}u_1(t)^2+3\pi^{3/2}u_1(t)=0, \\ 640\sqrt{2}u_1(t)u_2(t)+240\pi^{3/2}u_2(t)+9\dot{u}_2(t)\pi^{3/2}=0. \end{cases} \tag{2.5}$$

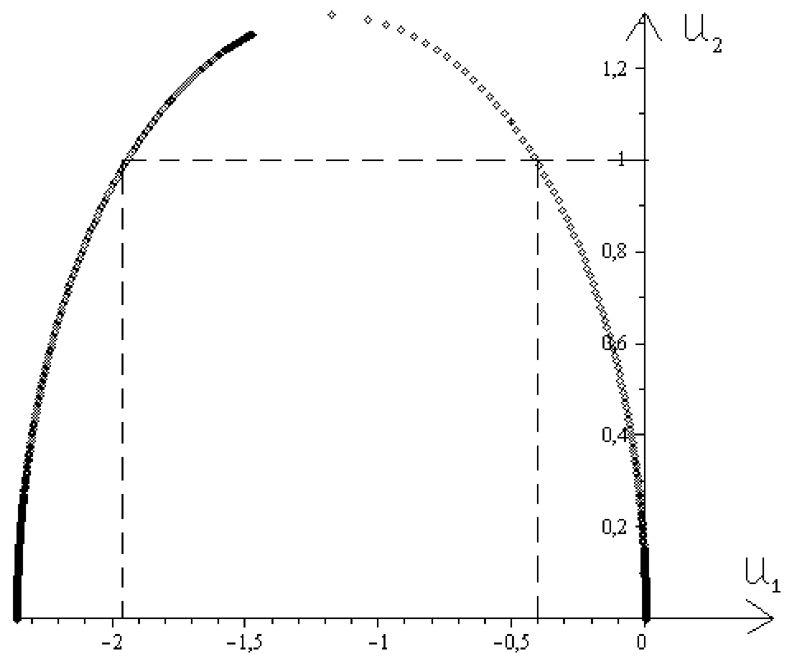
Система (2.5) имеет два стационарных решения

$$(u_1(t)=0,u_2(t)=0),\ (u_1(t)=-(3/10)\pi^{3/2}\sqrt{2},u_2(t)=0).$$

Начальное значение $u_0=\begin{pmatrix}u_{01}\\u_{02}\end{pmatrix}$, тогда задача Шоуолтера-Сидорова (2.2) для системы уравнений (2.5) примет вид

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 9\pi^{3/2}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u_{01}\\u_{02}\end{pmatrix}\right]=0. \tag{2.6}$$

Задача (2.6) при $u_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ для системы (2.5) имеет полученные ранее два стационарных решения. Рассмотрим другое начальное условие $u_2(1)=1$, по которому найдем два условия на $u_1(1)$, а именно $u_{01+}=-0,4096752508$ и $u_{01-}=-1,952766240$, удовлетворяющие системе (2.5). Решим две задачи Коши для этой системы уравнений. Фазовое пространство системы (2.5) изображено на рисунке, результаты численного решения частично приведены в таблицах 1 и 2.




Фазовое пространство системы (2.5) при различных данных Коши, но одинаковых данных Шоуолтера – Сидорова

**Таблица 1**

Численное решение системы (2.5) с начальными условиями
$u_1(1) = -0,4096752508, u_2(1) = 1$

| $u_1(t)$ | $u_2(t)$ |
|---|---|
| –1,181138709 | 1,320644939 |
| –1,109337027 | 1,318197361 |
| –0,9937117979 | 1,303899373 |
| –0,8956068680 | 1,281457650 |
| –0,7994165490 | 1,249753675 |
| –0,6900613485 | 1,201064305 |
| –0,5973007684 | 1,147998555 |
| –0,4999724286 | 1,078877746 |
| –0,4098504961 | 1,000168979 |
| –0,3999706595 | 0,9905369461 |
| –0,2435745929 | 0,8031985309 |
| –0,1890937409 | 0,7167343452 |
| –0,1463869058 | 0,6367901668 |
| –0,1130652586 | 0,5638333163 |
| $-0,8716760788e^{-1}$ | 0,4979087082 |
| $-0,6710381679e^{-1}$ | 0,4387852723 |
| $-0,5159890077e^{-1}$ | 0,3860651178 |
| $-0,1249740705e^{-2}$ | $0,6073393299e^{-1}$ |
| $-0,4301939681e^{-3}$ | $0,3563921814e^{-1}$ |
| $-0,1753736568e^{-4}$ | $0,7196422470e^{-2}$ |
| $-0,1218532584e^{-5}$ | $0,1896953452e^{-2}$ |

**Таблица 2**

Численное решение системы (2.5) с начальными условиями
$u_1(1) = -1,952766240, u_2(1) = 1$

| $u_1(t)$ | $u_2(t)$ |
|---|---|
| –2,362441492 | $0,1003192683e^{-5}$ |
| –2,362441492 | $0,1114077178e^{-4}$ |
| –2,362441488 | $0,1047761256e^{-3}$ |
| –2,362440870 | $0,1355589623e^{-2}$ |
| –2,362365880 | $0,1494251926e^{-1}$ |
| –2,358932134 | 0,1017248684 |
| –2,330150041 | 0,3066843586 |
| –2,215918021 | 0,6370668308 |
| –2,036836638 | 0,9104963298 |
| –1,952766240 | 1 |
| –1,859992974 | 1,080827648 |
| –1,764551333 | 1,148372201 |
| –1,674941381 | 1,199750621 |
| –1,600135431 | 1,234804093 |
| –1,545962615 | 1,256108068 |
| –1,512212525 | 1,267737621 |
| –1,493759364 | 1,273578653 |
| –1,480192352 | 1,277643548 |
| –1,476862571 | 1,278611729 |
| –1,476526330 | 1,278708850 |

## Литература


1. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.

2. Корпусов, М.О. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии / М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. – 2000. – Т. 4, № 8. – С. 1237 – 1249.

3. Свиридюк, Г. А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г. А. Свиридюк, Т. Г. Сукачева //Дифференц. уравнения. – 1990.– Т. 26, № 2. – С. 250 – 258.

4. Свиридюк, Г. А. О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г. А. Свиридюк, А. Ф. Карамова (А. Ф. Гильмутдинова) // Дифференц. уравнения. – 2005.– Т. 41, № 10. – С. 1400 – 1405.


Уравнения математической физики,
Южно-Уральский государственный университет
algil@list.ru

*Поступила в редакцию 2 сентября 2009 г.*