УДК 517.956.226

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Е. А. Деркунова

SINGULAR PERTURBED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF FIRST ORDER IN A CASE OF STABILITY CHANGE

E. A. Derkunova

Формулируется и доказывается теорема о дифференциальных неравенствах для уравнений в частных производных первого порядка. Иллюстрируется ее применение к начальной задаче с внутренним переходным слоем.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, асимптотический метод дифференциальных неравенств, смена устойчивости

The theorem on differential unequalities for partial differantial equations of the first order is formulated and proofed. Its applicaition for initial problem with inner transition layer is illustrated.

Keywords: singular perturbations, asimptotic method of differential unequalities, stability change

Введение

После основополагающих работ академика А. Н. Тихонова [1] и последовавших за ними работ А. Б. Васильевой [2] ведется активное исследование сингулярно возмущенных задач асимптотическими методами. В частности, рассматриваются задачи, где нарушается условие изолированности корня вырожденного уравнения. Поясним это на примере начальной задачи в скалярном случае:

$$\varepsilon\frac{du}{dt} = F(u,t,\varepsilon),\ 0 < t \le T, \quad u(0) = u^0.$$

Пусть корни вырожденного уравнения

$$F(u,t,0) = 0$$

неизолированы, например, корней два ($u = \varphi_1(t)$ и $u = \varphi_2(t)$), и графики их пересекаются во внутренней точке рассматриваемого отрезка $[0,T]$. Кроме того, пусть по прохождении точки пересечения корней они меняются ролями в отношении устойчивости (происходит смена знака производной F_u, взятой на каждом из корней, или, как говорят, происходит смена устойчивости). Возникает вопрос: как будет вести себя решение нашей задачи при $\varepsilon \to 0$? В работе [3], а затем в работе [4] для тихоновской системы доказана при определенных условиях теорема о предельном переходе при $\varepsilon \to 0$ от решения исходной задачи к решению вырожденной задачи, которое строится с использованием устойчивого составного (вообще говоря, негладкого) корня вырожденного уравнения. Для доказательства существования решения и предельного перехода в работе [4] был применен метод дифференциальных неравенств. В последующие годы этот метод использовался для целого ряда других сингулярно возмущенных задач, в том числе задач со сменой устойчивости.

1. Метод дифференциальных неравенств для уравнений в частных производных первого порядка

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon^r\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\Lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f(u,x,t,\varepsilon),\quad (x,t)\in D \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$u(x,0,\varepsilon)=u^0(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{1.2}$$

$\varepsilon>0$, $r>0$. Решение ищется в области

$$D=\{(x,t):x_0(t)\le x\le x_1(t),0\le t\le T\}, \tag{1.3}$$

где $x=x_0(t)$ и $x=x_1(t)$ – характеристики, выходящие соответственно из точек $(0,0)$ и $(1,0)$ и определяемые уравнением $\dfrac{dx}{dt}=\Lambda(x,t)$ (считаем, что $\Lambda(x,t)$ – гладкая функция и все характеристики, выходящие из точек начального отрезка $\{t=0,\ 0\le x\le 1\}$ существуют при $0\le t\le T$).

1.1. Лемма о дифференциальных неравенствах

Лемма. *Пусть функции u и v непрерывны и имеют кусочно непрерывные частные производные, а функция $f(u,x,t,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема, и, кроме того,*

(1) $L_\varepsilon u\equiv\varepsilon^r\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+\Lambda(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-f(u,x,t,\varepsilon)\le 0,\quad (x,t)\in D;$
(2) $L_\varepsilon v\ge 0,\quad (x,t)\in D;$
(3) $u(x,0)\le v(x,0),\quad 0\le x\le 1.$

Тогда имеет место неравенство

$$u(x,t,\varepsilon)\le v(x,t,\varepsilon)\quad (x,t)\in D. \tag{1.4}$$

Доказательство. В силу условий на функцию $f(u,x,t,\varepsilon)$ (непрерывной дифференцируемости) найдется постоянная $N>0$, такая что

$$|f(u_1,x,t,\varepsilon)-f(u_2,x,t,\varepsilon)|\le N|u_1-u_2|$$

при $(x,t,\varepsilon)\in D\times(0;\varepsilon_0]$, $|u|\le M$. Предположим, что

$$u(x,t,\varepsilon)>v(x,t,\varepsilon) \tag{1.5}$$

в некоторой точке $(x_0,t_0)\in D$. Рассмотрим характеристику $x=x(t)$, определяемую уравнением $\dfrac{\partial x}{\partial t}=\Lambda(x,t)$ и проходящую через точку (x_0,t_0). На этой характеристике найдется точка (x_1,t_1), $t_1<t_0$, такая что имеет место равенство $u(x_1,t_1,\varepsilon)=v(x_1,t_1,\varepsilon)$, а в точках

(x,t) характеристики $x = x(t)$ между точками (x_1, t_1) и (x_0, t_0) выполняется неравенство $u(x,t,\varepsilon) > v(x,t,\varepsilon)$.

Выберем на рассматриваемой характеристике точку (x_2, t_2), $t_2 > t_1$, для которой

$$\int_{t_1}^{t_2} N dt < \varepsilon^r.$$

Обозначим (x_3, t_3) точку, доставляющую максимум разности $u(x,t,\varepsilon) - v(x,t,\varepsilon) = z(x,t,\varepsilon) \geq \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$ и $x = x(t)$. Отметим, что $z(x_1, t_1, \varepsilon) = 0$. Получаем следующую цепочку неравенств (интеграл вычисляется вдоль характеристики $x = x(t)$):

$$\varepsilon^r z(x_3, t_3, \varepsilon) = \int_{t_1}^{t_3} \varepsilon^r \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda(x,t) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) dt \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_3} \Big(f(u, x(t), t, \varepsilon) - f(v, x(t), t, \varepsilon) \Big) dt \leq \int_{t_1}^{t_3} N z(x(t), t, \varepsilon) dt \leq$$

$$\leq z(x_3, t_3, \varepsilon) \int_{t_1}^{t_2} N dt < \varepsilon^r z(x_3, t_3, \varepsilon).$$

Полученное противоречие доказывает ошибочность предположения (1.5), что приводит к утверждению (1.4).

1.2. Теорема о нижнем и верхнем решениях

Определение. Функции $\underline{U}(x,t,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,t,\varepsilon)$ называются *нижним* и *верхним* решениями задачи (1.1), (1.2), если выполнены неравенства

$$\left.\begin{array}{l} 1^0.\ L_\varepsilon \underline{U} \equiv \varepsilon^r \left(\dfrac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \Lambda(x,t) \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial x} \right) - f(\underline{U}, x, t, \varepsilon) \leq 0 \leq L_\varepsilon(\overline{U}), \\ 2^0.\ \underline{U}(x,0,\varepsilon) \leq u^0(x) \leq \overline{U}(x,0,\varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{array}\right. \qquad (x,t) \in D;$$

Нижнее и верхнее решения называются упорядоченными, если

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) \leq \overline{U}(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in D.$$

Из Леммы следует, что нижнее и верхнее решения $\underline{U}$ и $\overline{U}$ начальной задачи (1.1), (1.2) являются упорядоченными.

Теорема 1. *Если существуют нижнее и верхнее решения $\underline{U}$ и $\overline{U}$ задачи (1.1), (1.2), то эта задача имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам*

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) \leq u(x,t,\varepsilon) \leq \overline{U}(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in D. \tag{1.6}$$

Доказательство. Из Определения следует, что для функции $\overline{U}$ выполнено условие (1), а для функции $\underline{U}$ – условие (2) Леммы. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\varepsilon^r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \begin{cases} f(\underline{U}, x, t, \varepsilon), & u < \underline{U}, \\ f(u, x, t, \varepsilon), & \underline{U} \leq u \leq \overline{U}, \\ f(\overline{U}, x, t, \varepsilon), & u > \overline{U} \end{cases} \tag{1.7}$$

с начальным условием (1.2), удовлетворяющем неравенствам 2^0 Определения.

Уравнения (1.7) и (1.1) совпадают в области, где $\underline{U} \leq u \leq \overline{U}$. Правая часть вспомогательного уравнения ограничена, поэтому у задачи (1.7), (1.2) существует решение, и если будет доказано, что это решение не выйдет из полосы, задаваемой функциями $\underline{U}$ и $\overline{U}$, то отсюда последует существование решения задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющего неравенствам (1.6). Доказательство проведем от противного. Предположим, что

$$u(x,t,\varepsilon) > \overline{U}(x,t,\varepsilon) \tag{1.8}$$

в некоторой точке $(x_0,t_0) \in D$. Рассмотрим характеристику $x = x(t)$, определяемую уравнением $\dfrac{dx}{dt} = \Lambda(x,t)$ и проходящую через точку (x_0,t_0). На этой характеристике найдется точка (x_1,t_1), $t_1 < t_0$, такая, что имеет место равенство $u(x_1,t_1,\varepsilon) = \overline{U}(x_1,t_1,\varepsilon)$, а в точках (x,t) характеристики $x = x(t)$ между точками (x_1,t_1) и (x_0,t_0) выполняется неравенство $u(x,t,\varepsilon) > \overline{U}(x,t,\varepsilon)$. Поскольку из (1.7) имеем равенство

$$\varepsilon^r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(\overline{U},x,t,\varepsilon),$$

а из определения верхнего решения – неравенство

$$\varepsilon^r \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}\right) \geq f(\overline{U},x,t,\varepsilon)$$

на характеристике $x = x(t)$ между точками (x_1,t_1) и (x_0,t_0), то получаем (интеграл вычисляется вдоль характеристики):

$$\varepsilon^r (u - \overline{U})\,\big|_{(x_0,t_0,\varepsilon)} = \varepsilon^r \int\limits_{t_1}^{t_0} \left(\frac{\partial (u-\overline{U})}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial (u-\overline{U})}{\partial x}\right) dt \leq 0,$$

но последнее противоречит (1.8) в области D. Следовательно, $u \leq \overline{U}$. Аналогично можно доказать, что $u \geq \underline{U}$ в области D. Таким образом, решение (1.7), (1.2) удовлетворяет неравенствам (1.6), что и доказывает теорему.

2. Начальная задача для уравнения с малым параметром при производных

2.1. Постановка задачи и условия

Рассмотрим следующую задачу ($\varepsilon > 0$ – малый параметр):

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in D, \tag{2.1}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = u^0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{2.2}$$

Решение задачи (2.1), (2.2) ищется в области вида (1.3).

Хорошо известно [5, с.135 – 139], что если вырожденное уравнение

$$f(u,x,t,0) = 0, \tag{2.3}$$

имеет корень $u = \varphi(x,t)$, который устойчив в области D, т.е. выполнено неравенство

$$f_u(\varphi(x,t),x,t,0) < 0, \quad (x,t) \in D, \tag{2.4}$$

и если начальная функция $u^0(x)$ принадлежит области притяжения этого корня, то решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (2.1), (2.2) существует и удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = \varphi(x,t), \quad x_0(t) \le x \le x_1(t), \quad 0 < t \le T.$$

Более сложная ситуация возникает тогда, когда уравнение (2.3) имеет корни $u = \varphi_1(x,t)$ и $u = \varphi_2(x,t)$, пересекающиеся по некоторой кривой, проекция которой на плоскость (x,t) лежит в области D. В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда проекция пересечения корней расположена выше начального отрезка $\{t = 0, 0 \le x \le 1\}$.

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. Функция $f(u,x,t,\varepsilon)$ достаточно гладкая (дважды непрерывно дифференцируемая) в области $G = I_u \times D \times [0,\varepsilon_0]$, где I_u – некоторый интервал $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число.

Условие 2. Уравнение (2.3) в области $I_u \times D$ имеет относительно u два корня $u = \varphi_1(x,t)$, $u = \varphi_2(x,t)$, имеющие ту же гладкость, что и f, и удовлетворяющие соотношениям

$$\varphi_1(x,t) = \varphi_2(x,t) \quad \text{при} \quad t = \psi(x), \tag{2.5}$$

где $\psi(x)$ – гладкая функция, $0 < \psi(x) < T$. Для краткости будем обозначать кривую $t = \psi(x)$ буквой Γ. Образуются две подобласти области D: D_1, ограниченная характеристиками $x = x_1(t)$ и $x = x_2(t)$, начальным отрезком $\{(x,t) : t = 0, 0 \le x \le 1\}$ и кривой Γ, а также подобласть $D_2 = D \backslash D_1$.

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(x,t) > \varphi_2(x,t) & \text{при} & (x,t) \in D_1 \backslash \Gamma; \\ \varphi_1(x,t) < \varphi_2(x,t) & \text{при} & (x,t) \in D_2 \backslash \Gamma. \end{array} \tag{2.6}$$

И пусть

$$\begin{array}{ll} f_u(\varphi_1(x,t),x,t,0) < 0, & \\ f_u(\varphi_2(x,t),x,t,0) > 0 & \text{при} \quad (x,t) \in D_1 \backslash \Gamma, \\ f_u(\varphi_1(x,t),x,t,0) > 0, & \\ f_u(\varphi_2(x,t),x,t,0) < 0 & \text{при} \quad (x,t) \in D_2 \backslash \Gamma. \end{array}$$

Условие 2 означает, что корни $u = \varphi_1(x,t)$ и $u = \varphi_2(x,t)$ уравнения (2.3) пересекаются по кривой, проекция которой Γ на плоскость (x,t) лежит в области D и описывается уравнением $t = \psi(x)$.

Не ограничивая общности, можно считать, что функция, для которой выполняются Условия 1, 2, представима в виде

$$f(u,x,t,\varepsilon) = -f_0(u,x,t)\,(u - \varphi_1(x,t))\,(u - \varphi_2(x,t)) + \varepsilon f_1(u,x,t,\varepsilon), \tag{2.7}$$

где $f_0 > 0$, φ_1, φ_2, f_1 – достаточно гладкие, и φ_1, φ_2 удовлетворяют (2.5), (2.6). С использованием корней φ_1 и φ_2 определим составные решения вырожденного уравнения (2.3):

$$\check{u}(x,t) = \begin{cases} \varphi_1(x,t), & (x,t) \in D_1, \\ \varphi_2(x,t), & (x,t) \in D_2; \end{cases}$$

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} \varphi_2(x,t), & (x,t) \in D_1, \\ \varphi_1(x,t), & (x,t) \in D_2. \end{cases}$$

Отметим, что составные корни $\check{u}$ и $\hat{u}$ являются непрерывными, но, вообще говоря, негладкими на кривой Γ. Из Условия 2 следует, что

$$\check{u}(x,t) > \hat{u}(x,t), \quad (x,t) \in D \backslash \Gamma;$$

$$\check{u}(x,t) = \hat{u}(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma;$$

$$f_u(\check{u}(x,t),x,t,0) < 0, \quad f_u(\hat{u}(x,t),x,t,0) > 0, \quad (x,t) \in D\backslash\Gamma; \tag{2.8}$$

$$f_u(\check{u}(x,t),x,t,0) = f_u(\hat{u}(x,t),x,t,0) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma. \tag{2.9}$$

На основании неравенств (2.8) можно назвать корень $\check{u}(x,t)$ устойчивым, а корень $\hat{u}(x,t)$ неустойчивым (см. (2.4)). Следует, однако, заметить, что в точках кривой Γ неравенство $f_u(\check{u}(x,t),x,t,0) < 0$ не выполнено (см. (2.9)), и это обстоятельство не позволяет однозначно ответить на вопрос о том, будет ли решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (2.1), (2.2) стремиться при $\varepsilon \to 0$ к составному корню $\check{u}(x,t)$ в области D (за исключением начального отрезка). Как оказывается, при Условиях 1, 2 и некоторых дополнительных условиях этот предельный переход будет иметь место.

Потребуем выполнения еще одного условия, которое обеспечивает принадлежность начальной функции $u^0(x)$ области притяжения составного устойчивого корня $\check{u}(x,t)$.

Условие 3. $u^0(x) > \hat{u}(x,0)$ при $0 \le x \le 1$, $u^0(x) \in I_u$, где I_u – интервал из Условий 1, 2.

Для доказательства предельного перехода от решения задачи (2.1), (2.2) к устойчивому составному решению вырожденного уравнения (при $\varepsilon \to 0$) потребуются еще два условия:

Условие 4. $f_{uu}(\check{u}(x,t),x,t,0)\,\big|_{(x,t)\in\Gamma} < 0.$

Заметим, что для функции (2.7) это условие выполнено, так как $f_{uu}(\check{u},x,\psi(x),0) = -2f_0(\check{u}(x,\psi(x)),x,\psi(x)) < 0$.

Условие 5.

$$\left(\frac{\partial \check{u}}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial \check{u}}{\partial x}\right)\bigg|_{t=\psi(x)\pm 0} - f_\varepsilon(\check{u}(x,t),x,t,0)|_{t=\psi(x)} < 0.$$

Ниже будет показано, что справедливо следующее утверждение

Теорема 2. *При выполнении Условий 1 – 5 решение задачи (2.1), (2.2) существует, и имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = \check{u}(x,t) \tag{2.10}$$

для всех $(x,t) \in D$ кроме начального отрезка $\{t = 0, 0 \le x \le 1\}$.

При этом разность $u(x,t,\varepsilon) - \check{u}(x,t)$ имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$ в малой окрестности кривой Γ и порядок $O(\varepsilon)$ в остальной части области D (за исключением малой окрестности начального отрезка).

2.2. Асимптотическое поведение решения

Рассмотрим задачу в области, ограниченной характеристиками $x = x_0(t)$ и $x = x_1(t)$, начальным отрезком и кривой $t = \psi(x) - \delta$, где $\delta > 0$ – сколь угодно малое, но фиксированное при $\varepsilon \to 0$ число. Здесь применима стандартная теория [5]: уравнение (2.1) с начальным условием (2.2) имеет единственное решение, и для него справедливо асимптотическое представление:

$$u(x,t,\varepsilon) = \check{u}(x,t) + \Pi_0(x,\tau) + O(\varepsilon), \tag{2.11}$$

где $\check{u}(x,t) = \varphi_1(x,t)$ – функция регулярной части асимптотики, $\Pi_0(x,\tau)$ – пограничная функция, $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$ – погранслойная переменная. Для функции $\Pi_0(x,\tau)$ имеем задачу:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = f(\check{u}(x,0) + \Pi_0(x,\tau),x,0,0), \quad \Pi_0(x,0) = u^0(x) - \check{u}(x,0).$$

В силу Условий 2, 3 функция Π_0 экспоненциально убывает при $\tau \to \infty$.

Замечание 1. Заметим, что пограничная функция определена в прямоугольнике $(0 \le x \le 1) \times (0 \le t \le T)$, который не совпадает, вообще говоря, с областью D. Чтобы определить ее во всей области D, поступим так. Продолжим гладким образом функции $f(u,x,0,0)$, $u^0(x)$ и $\check{u}(x,0)$, входящие в задачу для пограничной функции, за границы отрезка $0 \le x \le 1$, и рассмотрим эту задачу при $X_0 \le x \le X_1$, $\tau \ge 0$, где $X_0 = \min\limits_{0\le t\le T} x_0(t)$, $X_1 = \max\limits_{0\le t\le T} x_1(t)$. Тогда пограничная функция будет определена во всей области D.

На кривой $t = \psi(x) - \delta$ из представления (2.11) имеем:

$$u(x,\psi(x)-\delta,\varepsilon) = \check{u}(x,\psi(x)-\delta) + O(\varepsilon), \tag{2.12}$$

так как пограничная функция экспоненциально мала.

Рассмотрим теперь задачу в области D_δ, ограниченную характеристиками $x = x_1(t)$, $x = x_2(t)$ и кривыми $t = \psi(x) - \delta$, $t = \psi(x) + \delta$.

Замечание 2. Кривые $t = \psi(x) - \delta$ и $t = \psi(x) + \delta$ определены при тех же x, что и кривая $t = \psi(x)$. Гладко продолжим их за область определения, чтобы их концы лежали на характеристиках $x = x_0(t)$ и $x = x_1(t)$.

Построим нижнее и верхнее решения в виде:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \check{u}(x,t) - A\varepsilon \\ \overline{U} &= \check{u}(x,t) + A\sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где число $A > 0$ будет выбрано ниже. Проверим выполнение условий 1^0, 2^0 Определения применительно к области D_δ для указанных функций. Имеем:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U} &= \varepsilon\left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial \underline{U}}{\partial x}\right) - f(\underline{U},x,t,\varepsilon) = \\ &= \varepsilon\left(\frac{\partial \check{u}}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial \check{u}}{\partial x}\right) - \check{f}(x,t) + \check{f}_u(x,t)A\varepsilon - \check{f}_\varepsilon(x,t)\varepsilon + o(\varepsilon) = \\ &= \varepsilon\left(\frac{\partial \check{u}}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial \check{u}}{\partial x} - \check{f}_\varepsilon(x,t)\right) - \check{f}(x,t) + \check{f}_u(x,t)A\varepsilon + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь $\check{f}(x,t) = f(\check{u}(x,t),x,t,0)$, и такой же смысл имеют обозначения $\check{f}_u(x,t)$, $\check{f}_\varepsilon(x,t)$. Так как $\check{f}(x,t) = 0$ и $\check{f}_u(x,t) \le 0$, и так как неравенство из Условия 5 выполняется на кривой $t = \psi(x)$, а значит и в $\delta-$окрестности нее, если только δ достаточно мало, то для достаточно малых ε

$$L_\varepsilon \underline{U} \le 0, \quad (x,t) \in D_\delta.$$

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \overline{U} &= \varepsilon\left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}\right) - f(\overline{U},x,t,\varepsilon) = \\ &= \varepsilon\left(\frac{\partial \check{u}}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial \check{u}}{\partial x}\right) - \check{f}(x,t) - \check{f}_u(x,t)A\sqrt{\varepsilon} - \check{f}_\varepsilon(x,t)\varepsilon - \frac{1}{2}\check{f}_{uu}(x,t)A^2\varepsilon + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

Так как $\check{f} = 0$, $\check{f}_u \le 0$ и выполняется Условие 4, то при достаточно большом A и достаточно малых ε слагаемое $-\dfrac{1}{2}\check{f}_{uu}(x,t)A^2\varepsilon$ будет доминирующим и обеспечит выполнение неравенства

$$L_\varepsilon \overline{U} \ge 0, \quad (x,t) \in D_\delta.$$

Таким образом, условие 1^0 Определения выполнено. Проверим выполнение условия 2^0 Определения, имея в виду, что в D_δ начальным множеством является кривая $t = \psi(x) - \delta$. При достаточно большом A и достаточно малых ε из (2.12) имеем:

$$\begin{aligned} (\underline{U} - u)\big|_{t=\psi(x)-\delta} &= -A\varepsilon + O(\varepsilon) < 0 \\ (\overline{U} - u)\big|_{t=\psi(x)-\delta} &= A\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon) > 0. \end{aligned}$$

Тем самым условия Определения применительно к области D_δ выполнены. Уравнение (2.1) с начальным условием (2.12) имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$ в области D_δ, и справедливо представление

$$u(x,t,\varepsilon) = \check{u}(x,t) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (x,t) \in D_\delta. \tag{2.13}$$

Рассмотрим область между характеристиками $x = x_0(t)$, $x = x_1(t)$, кривой $t = \psi(x) + \dfrac{\delta}{2}$ (см. Замечание 2) и линией $t = T$. В этой области снова работает стандартная теория. Корень $\check{u}(x,t) = \varphi_2(x,t)$ в силу (2.6) и (2.8) является изолированным и устойчивым. Как следует из (2.13), начальное условие для решения $u(x,t,\varepsilon)$ в этой области представимо так:

$$u\left(x, \psi(x) + \frac{\delta}{2}, \varepsilon\right) = \check{u}\left(x, \psi(x) + \frac{\delta}{2}\right) + O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{2.14}$$

Пограничная функция, как это следует из (2.14), имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$, однако, уже в области выше кривой $t = \psi(x) + \delta$ в силу экспоненциального затухания Π_0 для решения $u(x,t,\varepsilon)$ справедлива асимптотика:

$$u(x,t,\varepsilon) = \check{u}(x,t) + O(\varepsilon).$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если выполнены Условия 1 – 5, то при достаточно малых ε задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение $u(x,t,\varepsilon)$, и для него справедливо асимптотическое представление*

$$u(x,t,\varepsilon) = \check{u}(x,t) + \Pi_0(x, t/\varepsilon) + w(x,t,\varepsilon),$$

где $w(x,t,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ в δ - окрестности кривой $t = \psi(x)$, и $w(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ в остальной части области D.

Из этого асимптотического представления решения задачи (2.1), (2.2) непосредственно следует предельное равенство (2.10).

Литература

1. Тихонов, А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А. Н. Тихонов // Математический сборник. – 1948.– Т. 22(64), № 2.– С. 193 – 204.
2. Васильева, А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных / А. Б. Васильева // УМН. – 1963. – Т.18, № 3.– С. 15 – 86.
3. Lebovitz, N. R. Exchange of stabilities in autonomous system – II. Vertical bifurcaition / N. R. Lebovitz, R. J. Schaar // Stud. Appl. Math.– 1977: V. 56. – P. 1 – 50.
4. Nefedov, N. N. Singularly perturbed systems: Case of exchange of stability / N. N. Nefedov, K. R. Schneider// Weierstraß - Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin.– Preprint № 158.
5. Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.

Кафедра функционального анализа,
Южно-Уральский государственный университет
derk@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 4 сентября 2009 г.