

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЛОЯ В КРУГЛОМ СТЕРЖНЕ

В. Л. Дильман, Т. В. Ерошкина

RESEARCH OF MATHEMATICAL MODELS OF THE STRESS CONDITION OF A NON-HOMOGENEOUS CROSS LAYER IN A ROUND ROD

V. L. Dil'man, T. V. Eroshkina

Строятся и исследуются аналитическими и численными методами математические модели напряженного состояния круглого сплошного стержня, содержащего поперечный менее прочный неоднородный слой, при нагружении стержня осевой силой при пластическом деформировании слоя. Подробно исследуется состояние контактного упрочнения такого слоя. На этой основе получены явные аналитические зависимости для вычисления критических напряженных состояний в слое и критической осевой нагрузки на стержень.

Ключевые слова: менее прочный слой, пластическое деформирование, контактное упрочнение, система уравнений в частных производных гиперболического типа

Mathematical models of the stress conditions of the round continuous rod, containing the transverse less strong inhomogeneous plastic layer are constructed and investigated with analytical and numerical methods, while loading the rod an axial thrust and by plastic forming of layer. The conditions of contact strengthening of such layers is investigated in details. On this basis obvious analytical dependences for definition of the critical stress conditions in a layer are critical axial load are gained.

Keywords: less strong layer, plastic forming, contact strengthening, system of equations in hyperbolic type partial derivatives

Введение

Обозначения и соглашения

В работе используются обычные, принятые в механике твердого тела, обозначения, а также:

λ – отношение толщины слоя к диаметру стержня;

индекс «БП» («МП») сверху указывает на отношение данной величины к более прочной (менее прочной) части соединения (для снижения громоздкости формул индекс «МП» в некоторых случаях не ставится).

В работе приняты следующие сокращения.

ММ – математическая модель (модели); НС – напряженное состояние; НДС – напряженно-деформированное состояние;

МП – менее прочный; БП – более прочный;

ГППС – гипотеза плоских поперечных сечений; ГРП – гипотеза разделения переменных.

Объект изучения, краткая историческая справка, подходы к исследованию

Механические свойства материалов, в частности, пластические, во многих случаях нельзя считать однородными [1]. При изучении прочностных свойств пластического слоя (например, при исследовании НС и несущей способности сварных соединений арматуры, в которых пластическим слоем может быть сварной шов или прослойка в ЗТВ) можно выделить три модельных случая распределения прочности по толщине слоя:

- 1) прочность постоянна;
- 2) прочность минимальна на среднем сечении слоя;
- 3) прочность максимальна на среднем сечении слоя.

Первый случай для сплошного круглого цилиндра исследован в работах [2 – 9 и др.].

Второй случай рассматривался только в задачах плоской деформации [10, 11, с. 56 – 59] на основе работ [12, 1]. В этих работах исследовалось напряженное состояние неоднородной по толщине тонкой МП полосы в составе неразъемного соединения при растяжении. ММ, на которой было основано решение [10, 11], использовало гипотезу Прандтля о постоянстве касательных напряжений по длине полосы. Такие решения не дают существенную систематическую ошибку только для очень тонких прослоек. Кроме того, в упомянутых работах при исследовании НС МП слоя не учитывались особенности НС в окрестности свободных поверхностей. НС в зоне $ACBF$ (рис. 1) полностью определяется формой свободной поверхности AC в силу гиперболичности системы уравнений пластического равнове-

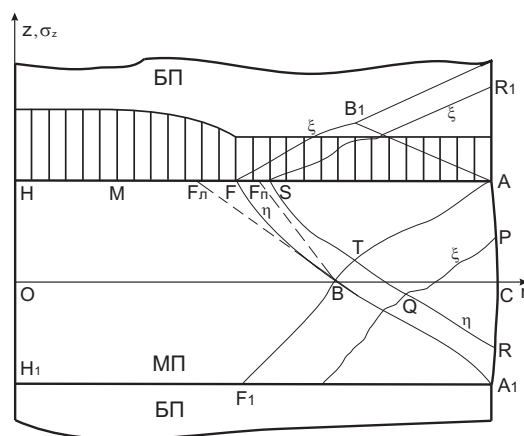


Рис. 1. Половина осевого сечения цилиндрического образца с МП поперечным слоем и фрагмент поля характеристик

сия (случай плоской деформации), и может быть исследовано методом характеристик. В части слоя $BFHO$ для нахождения НС обычно используются предположения, частично предугадывающие внутреннее состояние тела (ГППС, ГРП для касательных напряжений и др.). На последнем шаге эти решения сопрягаются в некоторой точке (например, в точке F на рис. 1):

$$\tau_{rz}(r_F, z) = \tau_F; \quad \sigma_z(r_F, z) = \sigma_{zF}, \quad (1)$$

где $\tau_{rz}(r, z)$ и $\sigma_z(r, z)$ – зависимости касательных и нормальных напряжений, найденные в области $BFHO$ на основе ГППС, τ_F и σ_{zF} – значения касательных и нормальных напряжений, найденные в точке F контактной границы (см. рис. 1) на основе анализа НС в зоне $ACBF$ методом характеристик. Этот подход применялся в работах [5, 14] в задачах плоской деформации, во втором и третьем случаях, для неоднородного по толщине слоя.

НС неоднородного сплошного стержня, содержащего поперечный неоднородный МП слой, ранее не рассматривались.

Цель работы – получение приближенных формул для вычисления компонент тензора напряжений внутри и на контактной границе пластического слоя с распределением прочности второго и третьего типов.

В работе принимаются обычные допущения и упрощающие условия. Материал слоя предполагается идеальной пластической средой, прочность которого характеризуется единственным параметром – пределом текучести k : в МП слое

$$k^{\text{МП}} = k(z) = T(z)k_0,$$

причем

$$T(0) = 1, \quad T(\varkappa) = K_{\text{сл}}, \quad (2)$$

в БП части параметр пластичности $k^{\text{БП}}$ постоянен. Будем считать функцию $T(z)$ монотонной на отрезке $[0; \varkappa]$ (при возрастании T $K_{\text{сл}} > 1$, при убывании T $K_{\text{сл}} < 1$). Пусть

$$K = \frac{k^{\text{БП}}}{k(\varkappa)} = \frac{1}{k_{\text{сл}}} \frac{k^{\text{БП}}}{k_0}$$

– коэффициент механической неоднородности, характеризующий скачок прочности на контактной поверхности. В БП части размерные напряжения нормируем величиной $k^{\text{БП}}$, в МП слое – величиной k_0 .

Как известно [5], при выполнении ГППС система уравнений равновесия и условия пластичности в осесимметричных задачах имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = 0; \quad (3)$$

$$\sigma_z - \sigma_r = \sqrt{3} \sqrt{T^2 - \tau^2}. \quad (4)$$

В БП части безразмерные напряжения удовлетворяют уравнениям (3) – (4) при $T \equiv 1$. Пусть

$$f(z, \tau) = \sqrt{3} \sqrt{T^2(z) - \tau^2}. \quad (5)$$

1. Исследование ММ НС неоднородного МП слоя

в окрестности свободной границы методом характеристик

1.1. Приближенное интегрирование системы уравнений пластического равновесия, записанной в инвариантах

Систему (3), (4) с учетом (5) можно записать форме:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\tau}{r}. \quad (6)$$

Пусть $\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \tau \end{pmatrix}$. Тогда систему (6) можно записать в векторной форме:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} + A \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} = B, \quad (7)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial \tau} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\tau}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3} T T'}{\sqrt{T^2 - \tau^2}} - \frac{\tau}{r} \end{pmatrix},$$

в силу (5). Характеристическое для матрицы A уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{T^2 - \tau^2}}\lambda - 1 = 0. \quad (8)$$

Решения уравнения (8) – собственные числа матрицы A – имеют вид:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{4T^2 - \tau^2} - 2\sqrt{3}\tau}{2\sqrt{T^2 - \tau^2}}; \quad \lambda_2 = \frac{-\sqrt{4T^2 - \tau^2} - 2\sqrt{3}\tau}{2\sqrt{T^2 - \tau^2}}, \quad (9)$$

а собственные векторы – вид $\bar{l}_1(1; \lambda_1); \bar{l}_2(1; \lambda_2)$. По определению, уравнения

$$\frac{dz}{dr} = \lambda_i; \quad i = 1; 2,$$

являются уравнениями характеристик. В характеристической форме система (7) записывается так:

$$(1; \lambda) \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} + \lambda_i \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} \right) = (1; \lambda_i) B; \quad i = 1; 2. \quad (10)$$

Пусть ν_i – первообразная от λ_i по аргументу τ :

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial \tau} = \lambda_i, \quad \nu_i|_{\tau=0} = T(z). \quad (11)$$

Систему уравнений (10) можно записать, используя «инварианты Римана»:

$$I_i = \sigma_r + \nu_i; \quad \frac{dI_i}{dz} = \frac{\partial \nu_i}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\tau}{r}, \quad i = 1; 2. \quad (12)$$

Дифференцирование в левой части ведется вдоль характеристики (т. е. функция I_i считается зависимой от одной переменной z ; переменная r исключена через уравнение характеристики). Будем использовать для аппроксимации выражений (9) полученные их интерполяцией в узлах 0, 0,3 и 0,6 (для τ/T) полиномами второй степени выражения:

$$\lambda_1 = 1 - 0,812 \frac{\tau}{T} + 0,833 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2; \quad (13)$$

$$\lambda_2 = -1 - 0,657 \frac{\tau}{T} - 1,244 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2. \quad (14)$$

Из (13), (14) и (11) следует, что

$$\begin{aligned} \nu_1 &= T \left(1 + \frac{\tau}{T} - 0,406 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 + 0,028 \left(\frac{\tau}{T} \right)^3 \right), \\ \nu_2 &= T \left(1 - \frac{\tau}{T} - 0,328 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 + 0,415 \left(\frac{\tau}{T} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_1}{\partial z} &= \left(1 + 0,406 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 - 0,056 \left(\frac{\tau}{T} \right)^3 \right) T', \\ \frac{\partial \nu_2}{\partial z} &= \left(1 + 0,328 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 + 0,830 \left(\frac{\tau}{T} \right)^3 \right) T'. \end{aligned} \quad (16)$$

Применяя интерполяцию четным полиномом четвертой степени с узлами в точках 0; 0,3; 0,6, получим

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sqrt{3} \left(1 + 0,450 \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 + 0,679 \left(\frac{\tau}{T} \right)^4 \right) T'. \quad (17)$$

Рассмотрим входящее в правую часть (13) при $i = 2$ выражение $\frac{\partial \nu_2}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}$. Используя (16) и (17), получим:

$$\frac{\partial \nu_2}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} = -(\sqrt{3} - 1)(1 + \mu_2(t))T', \quad (18)$$

где

$$\mu_2(t) = 0,616t^2 - 1,134t^3 + 1,606t^4, \quad t = \tau/T.$$

При $t \in [0; 0,706]$ $\mu_2(t) < 0,616t^2$. На η -характеристике, в силу формулы (18),

$$\int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \nu_2}{\partial z} \right) dz = -(\sqrt{3} - 1) \left(T(z) - T(z_0) + \int_{T(z_0)}^{T(z)} \mu_2 dT \right). \quad (19)$$

Оценим последний интеграл в (19). Используя оценку для μ , получим

$$\left| \int_{T(z_0)}^{T(z)} \mu_2 dt \right| < 0,616 \int_{T(z_0)}^{T(z)} \left| \frac{\tau^2}{T^2} \right| |dT| < 0,616\alpha^2 \left| \frac{T(z) - T(z_0)}{T(z)T(z_0)} \right|.$$

Здесь α – наибольшее значение касательных напряжений в МП слое. Следовательно, интеграл в правой части (19) составляет от $T(z) - T(z_0)$ часть, не превышающую $0,616\alpha^2/T(z)T(z_0)$. Поэтому, если касательные напряжения невелики, равенство (18) можно заменить на приближенное

$$\frac{\partial \nu_2}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} = -(\sqrt{3} - 1)T', \quad (20)$$

допуская после интегрирования этого уравнения относительную ошибку примерно $\alpha^2/2T(z)T(z_0)$.

Интегрируя уравнение (12) по η -характеристике RS (см. рис. 1) с использованием равенства (20), получим приближенно, что функция

$$I_{2U} = \sigma_{rU} + (\nu_2)_U + \int_R^U \frac{\tau}{r} dz + (\sqrt{3} - 1)T_U - (\nu_2)_R - (\sqrt{3} - 1)T_R \quad (21)$$

постоянна для всех точек U характеристики RS , т. к. $\sigma_{rR} = 0$. В силу (11) или (15) $(\nu_2)_R = T_R$. Тогда из (21) получается, что на η -характеристике RS

$$\sigma_{rU} + (\nu_2)_U + \int_R^U \frac{\tau}{r} dz + (\sqrt{3} - 1)T_U - \sqrt{3}T_R = 0. \quad (22)$$

Вычисляя интеграл в (22) по частям, запишем равенство (22) в виде:

$$\sigma_{rU} + (\nu_2)_U - \Delta_U \tau_U (\lambda_2)_U + (\sqrt{3} - 1)T_U = \sqrt{3}T_R. \quad (23)$$

Здесь $\Delta_U = \ln(r_{Ucp}/r_U)$, где $r_{Ucp} \in (r_U; r_T)$ при $U \in TS$ и определяется равенством:

$$\ln r_{Ucp} = \frac{\int_{TU} \ln rd(\lambda_2 \tau)}{\int_{TU} d(\lambda_2 \tau)} = \frac{\int_{TU} \ln rd(\lambda_2 \tau)}{(\lambda_2)_U \tau_U}.$$

Геометрические соображения и сравнение с экспериментальными данными работ [2, и др.] позволяют предположить, что $r_{Ucp} = r + q(1 - r)$, где $q = 0, 10...0, 15$. В работе используется значение $q = 0, 10$.

1.2. Вычисление напряжений на контактной границе в критический момент нагружения

В критический момент нагружения основной металл вовлечен в пластическое деформирование. Формула (23) позволяет найти зависимость в этот момент между σ_r и τ на контактной границе. Запишем формулу (23) в развернутой форме. Для упрощения дальнейших вычислений представим интерполяцией в узлах 0; 0,3 и 0,6 величины ν_1 и ν_2 , $\tau\lambda_1$ и $\tau\lambda_2$ как полиномы второй степени от τ . Получим

$$\nu_1 \approx T + 0,993\tau - 0,377\frac{\tau^2}{T}; \quad \nu_2 \approx T - 0,925\tau - 0,7\frac{\tau^2}{T}; \quad (24)$$

$$\tau\lambda_1 \approx 0,985\tau - 0,738\frac{\tau^2}{T}; \quad \tau\lambda_2 \approx -0,776\tau - 1,777\frac{\tau^2}{T}. \quad (25)$$

Подставим в (23) вместо ν_2 и $\tau\lambda_2$ их выражения по формулам (24) и (25). Получим приближенно

$$\begin{aligned} \sigma_{rU} &= -(\nu_2)_U + \Delta_U \tau_U (\lambda_2)_U - \sqrt{3}(T_U - T_R) + T_U = \\ &= 0,925\tau_U + 0,7\frac{\tau_U^2}{T_U} - \Delta_U(0,776\tau_U + 1,777\frac{\tau_U^2}{T_U}) - \sqrt{3}(T_U - T_R); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zU} &= \sigma_{rU} + \sqrt{3}\sqrt{T_U^2 - \tau_U^2} = \sigma_{rU} + \sqrt{3}T_U + 0,04\tau_U - 1,036\frac{\tau_U^2}{T_U} = \\ &= (0,929 - 0,776\Delta_U)\tau_U - (0,336 + 1,777\Delta_U)\frac{\tau_U^2}{T_U} + \sqrt{3}T_R. \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично, в БП части, интегралы уравнения (12) вдоль ξ -характеристик можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rU}^{\text{БП}} &= -(\nu_1)_U + \Delta_U \tau_U^{\text{БП}} (\lambda_1)_U - \sqrt{3}(T_U - T_R) + T_U = 0,993\tau_U^{\text{БП}} + \\ &+ 0,377\frac{(\tau_U^{\text{БП}})^2}{T_U} - \Delta_U(0,985\tau_U^{\text{БП}} - 0,738\frac{(\tau_U^{\text{БП}})^2}{T_U}) - \sqrt{3}(T_U - T_{R1}); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\sigma_{zU}^{\text{БП}} = \sqrt{3}T_{R1} - (0,953 - 0,985\Delta_U)\tau_U^{\text{БП}} - (0,659 + 0,738\Delta_U)\frac{(\tau_U^{\text{БП}})^2}{T_U}. \quad (29)$$

В уравнениях (26) и (27) точка R свободной границы лежит на одной η -характеристике с точкой U (см. рис. 1). В уравнениях (28) и (29) точка R_1 свободной границы лежит на одной ξ -характеристике с точкой U . В частности, если точка U лежит на контактной поверхности, $T_U = K_{\text{сл}}$. В этом случае формула (27) приобретает вид:

$$\sigma_{zF} = (0,929 - 0,985\Delta_F)\tau_F - (0,336 + 1,777\Delta_F)\frac{\tau_F^2}{K_{\text{сл}}} + \sqrt{3}K_{\text{сл}}. \quad (30)$$

БП часть стержня предполагается однородной, поэтому в формуле (29) $T_{R1} = T_U = 1$, т. е. для точки F эта формула приобретает вид:

$$\sigma_{zF}^{\text{БП}} = \sqrt{3} - (0,953 - 0,985\Delta_F)\tau_F^{\text{БП}} - (0,659 + 0,738\Delta_F)(\tau_U^{\text{БП}})^2. \quad (31)$$

Для вычисления касательных и нормальных напряжений в критическом состоянии обратимся к уравнениям равновесия на контактной границе, которые в безразмерных напряжениях имеют вид:

$$\sigma_z = \sigma_z^{\text{БП}} K K_{\text{сл}}, \quad \tau = \tau^{\text{БП}} K K_{\text{сл}}. \quad (32)$$

Подставив в первое уравнение (32) вместо σ_z и $\sigma_z^{\text{БП}}$ их выражения в точке F (30) и (31), и исключая из полученного уравнения неизвестную $\tau_F^{\text{БП}}$ с помощью второго уравнения (32), получим уравнение для вычисления значений касательных напряжений в точке F :

$$a \left(\frac{\tau}{K_{\text{сл}}} \right)^2 - b \frac{\tau}{K_{\text{сл}}} + c = 0, \quad (33)$$

где a и b вычисляются по формулам:

$$a = 0,336 - \frac{0,659}{K} + \left(1,777 - \frac{0,738}{K} \right) \Delta, \quad b = (1,882 - 1,761\Delta); \quad c = \sqrt{3}(K - 1).$$

Интерполяция точного (громоздкого в записи) решения уравнения (33) полиномом второй степени по r и K с узлами в точках $(0,5; 1,2)$, $(0,7; 1,2)$, $(1; 1,2)$, $(0,5; 1,4)$, $(0,7; 1,4)$, $(1; 1,4)$ приводит, с относительной ошибкой порядка 0,01, к выражению

$$\begin{aligned} \tau_F = K_{\text{сл}} & \left((1,195 - 0,532r_F + 0,243(r_F)^2)(K - 1) + \right. \\ & \left. + (0,244 - 0,543r_F + 0,275(r_F)^2)(K - 1)^2 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя найденное для τ выражение (34) в (30), можно получить (очень громоздкую) формулу для вычисления значения σ_{zF} в зависимости от K , $K_{\text{сл}}$, и r_F . Интерполяция полиномом второй степени относительно r и K дает приближенное выражение для вычисления σ_{zF} в виде:

$$\sigma_{zF} = \sqrt{3}K_{\text{сл}}(1 + a(r_F)(K - 1) + b(r_F)(K - 1)^2), \quad (35)$$

где

$$a(r) = 0,5 - 0,023r + 0,008r^2; \quad b(r) = -0,579 + 0,788r - 0,375r^2. \quad (36)$$

Аналогично находится зависимость $\sigma_z(r, \varkappa)$ в любой точке $S \in [F; A]$:

$$\sigma_{zS} = \sqrt{3}T(z_R)(1 + a(r_S)(K - 1) + b(r_S)(K - 1)^2). \quad (37)$$

Здесь точка R лежит на свободной границе, причем точки R и S принадлежат общей η -характеристике (рис. 1). В частности, если $R = A_1$, то $T(z_R) = T(\varkappa) = K_{\text{сл}}$, и формула (37) обращается в формулу (35).

Полагая приближенно $AS/AF = AR/AA_1$, получаем

$$AR = \frac{1 - r_S}{1 - r_F} 2\varkappa, \quad z_R = \varkappa - AR = \varkappa - \frac{1 - r_S}{1 - r_F} 2\varkappa = \frac{\varkappa(2r_S - r_F - 1)}{1 - r_F}.$$

Подставив это выражение в формулу (37), получим зависимость $\sigma_z(r, \varkappa)$ в любой точке отрезка $[F; A]$:

$$\sigma_z(r, \varkappa) = \sqrt{3}T \left(\frac{\varkappa(2r - r_F - 1)}{1 - r_F} \right) (1 + a(r)(K - 1) + b(r)(K - 1)^2), \quad (38)$$

где функции $a(r)$ и $b(r)$ определены равенствами (36). Зависимость σ_z от r на участке контактной границы $[F; A]$, когда $\varkappa = 0,25$ (тогда $r_F = 0,53$), $K = 1,3$, $K_{\text{сл}} = 0,8$ (случай «а»), $K_{\text{сл}} = 1,2$ (случай «б»), показана на рис. 2. В качестве функции неоднородности на этом рисунке использовалась предложенная ниже функция (52), коэффициенты в записи которой определены формулами (54) и (55) при указанных выше значениях параметров.

Вычислим координату точки F . Положив приближенно

$$r_F = 1 - 2\varkappa \left(1 - 0,2 \frac{\tau_F}{K_{\text{сл}}} \right), \quad (39)$$

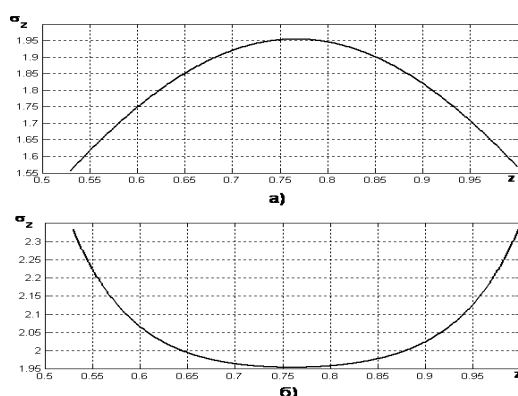


Рис. 2. Зависимость σ_z от r на участке контактной границы $[F; A]$, когда $\varkappa = 0,25$, $K = 1,3$, а) $K_{\text{сл}} = 0,8$, б) $K_{\text{сл}} = 1,2$

решим систему уравнений (34), (39). Исключая из этой системы неизвестную τ_F , получим квадратное уравнение относительно r_F . Из решения этого уравнения и (39) следует, что

$$\begin{aligned} \tau_F &= K_{\text{сл}}(K - 1)(0,8 + 0,707\varkappa) + 0,013 - 0,043\varkappa, \\ r_F &= 1 - 1,995\varkappa - 0,017\varkappa^2 + (0,32\varkappa + 0,283\varkappa^2)(K - 1). \end{aligned} \quad (40)$$

Подставляя найденное для r_F выражение в формулу (35), получим значение σ_z в точке F как функцию от параметров $K_{\text{сл}}$, \varkappa и K . Интерполяция точной зависимости полиномом второй степени по \varkappa и K с узлами в точках, соответствующих значениям $\varkappa = 0,05; 0,15; 0,25$ и $K = 1,1; 1,3; 1,5$, приводит, с точностью до 0,002, к выражению:

$$\begin{aligned} \sigma_{zF} &= K_{\text{сл}}(1 + (0,487 - 0,008\varkappa - 0,035\varkappa^2)(K - 1) - \\ &\quad - (0,169 + 0,049\varkappa + 1,066\varkappa^2)(K - 1)^2). \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим, что для слоя с переменной по толщине прочностью аналитические выражения для вычисления r_F , $\sigma_{zF}/K_{\text{сл}}$ и $\tau_{zF}/K_{\text{сл}}$ совпадают с соответствующими выражениями для слоя постоянной прочности, у которого $K_{\text{сл}} = 1$.

2. Исследование ММ НС МП слоя с переменной по толщине прочностью в окрестности оси стержня при ГРП

Будем использовать приближенный вариант уравнения (4):

$$\sigma_z - \sigma_r = \sqrt{3}(\Gamma - \tau^2/(2\Gamma)). \quad (42)$$

Исключая из системы (3), (42) нормальные напряжения, можно получить уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2(\tau^2/\Gamma(z))}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau}{r} \right) = 0. \quad (43)$$

Уравнение (43) определяет касательные напряжения. Будем предполагать выполнение ГРП для касательных напряжений:

$$\tau = R(r)Z(z) \quad (44)$$

Подставив в (43) условие (44), получим:

$$\sqrt{3}R' \frac{(Z^2/\Gamma)'}{Z} + \frac{Z''}{Z} - \frac{R''}{R} - \frac{(R/r)'}{R} = 0. \quad (45)$$

Для исследования уравнения (45) сформулируем следующую лемму ([5, с. 80]).

Лемма 1. *Функциональное уравнение*

$$\varphi(r)\psi(z) + \varphi_1(r) + \psi_1(z) = 0$$

относительно неизвестных функций φ , ψ , φ_1 и ψ_1 разрешимо тогда и только тогда, когда либо $\varphi(r) = \varphi$ и $\varphi_1(r) = \varphi_1$ – постоянные, а функции $\psi(z)$ и $\psi_1(z)$ связаны линейным соотношением $\varphi\psi(z) + \varphi_1 + \psi_1(z) = 0$, либо $\psi(z)$ и $\psi_1(z)$ – постоянные, а $\varphi(r)$ и $\varphi_1(r)$ связаны соответствующим соотношением.

Используя лемму 1, легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Уравнение (45) при условиях*

$$R(0) = 0; \quad Z(0) = 0 \tag{46}$$

не имеет решений, за исключением следующих частных вариантов.

1. *Функция R линейна.*
2. *Если функция неоднородности $T(z)$ имеет вид $T(z) = \cos^2(\mu z/2)$ для некоторой постоянной μ , то функция $Z(z)$ точно до постоянного множителя имеет вид $Z(z) = \sin(\mu z)$.*
3. *Если функция неоднородности $T(z)$ имеет вид $T(z) = \text{ch}^2(\mu z/2)$ для некоторой постоянной μ , то функция $Z(z)$ точно до постоянного множителя имеет вид $Z(z) = \text{sh}(\mu z)$.*

Доказательство. Положив $\varphi(r) = -R''/R - (R/r)'/R$; $\varphi_1(r) = \sqrt{3}R'$; $\psi(z) = Z''/Z$; $\psi_1(z) = (Z^2/T)'/Z$ и, применив лемму 1, получим два случая: либо $\varphi(r)$ и $\varphi_1(r)$ постоянны, либо $\psi(z)$ и $\psi_1(z)$ постоянны. В первом случае функция R линейна. Во втором случае

$$Z''/Z = \text{const} \quad \text{и} \quad (Z^2/T)'/Z = \text{const}. \tag{47}$$

Из первого равенства (47), с учетом условия (46), следует, что $Z = \sin(\mu z)$ или $Z = (\text{sh } \mu z)$. Подставляя эти выражения во второе равенство (47), получим, с использованием (46), что $T = \cos^2(\mu z/2)$ или, соответственно, $T = \text{ch}^2(\mu z/2)$.

Рассмотрим случай, когда τ линейно по r , т. е.

$$\tau = rZ(z). \tag{48}$$

Тогда в уравнении (45) разделяются переменные, откуда $\sqrt{3}(Z^2)/T + Z' = C$, где C – некоторая константа, или

$$T = \frac{\sqrt{3}Z^2}{C - Z'}, \tag{49}$$

причем

$$Z(0) = 0. \tag{50}$$

Решение задачи (49), (50) можно находить «обратным» методом, подбирая функцию Z из указанных условий, а затем находя по ней функцию неоднородности прослойки $T = T(z)$ из (49). Выбирая функцию Z в форме выражения, удовлетворяющего условию (50) и содержащего не менее трех независимых параметров, можно удовлетворить условиям (2) и

первому из условий (1). По смыслу задачи функция Z нечетна. Рассмотрим аппроксимацию функции Z полиномом пятой степени:

$$Z = Az + Bz^3 + Dz^5.$$

Тогда, в соответствии с (48),

$$\tau = r(Az + Bz^3 + Dz^5). \quad (51)$$

Так как $Z'(0) = A$, то $C = A$ (см. (49)). В силу (49) и (50) имеем:

$$T(z) = \frac{-\sqrt{3}(A + Bz^2 + Dz^4)^2}{3B + 5Dz^2}. \quad (52)$$

Для определения параметров A , B и D запишем систему из трех уравнений, исходя из условий (2) и (1):

$$\begin{cases} -\sqrt{3}B = A^2; \\ -\sqrt{3}(A + B\kappa^2 + D\kappa^4)^2 = K_{\text{сл}}(3B + 5D\kappa^2); \\ A\kappa + B\kappa^3 + D\kappa^5 = \tau_F/r_F. \end{cases} \quad (53)$$

Исключив из (53) B и D , получим квадратное уравнение относительно параметра A :

$$\frac{2\kappa^2}{5\sqrt{3}}A^2 - A + \frac{\tau_F}{\kappa r_F} + \frac{\sqrt{3}\tau_F^2}{5K_{\text{сл}}r_F^2} = 0.$$

Решение этого уравнения можно представить в виде (надо взять меньший корень):

$$A = \frac{2 \left(\frac{\tau_F}{\kappa r_F} + \frac{\sqrt{3}\tau_F^2}{5K_{\text{сл}}r_F^2} \right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{8\kappa^2}{5\sqrt{3}} \left(\frac{\tau_F}{\kappa r_F} + \frac{\sqrt{3}\tau_F^2}{5K_{\text{сл}}r_F^2} \right)}}. \quad (54)$$

Коэффициенты B и D можно вычислить по формулам

$$B = -\frac{A^2}{\sqrt{3}}, \quad D = -\frac{\sqrt{3}\tau_F^2}{5\kappa^4 K_{\text{сл}}r_F^2} - \frac{3B}{5\kappa^2}. \quad (55)$$

Например, при $\kappa = 0, 3$, $K = 1, 3$, $r_F = 0, 530$, $\tau_F/K_{\text{сл}} = 0, 425$. Если $K_{\text{сл}} = 1, 2$, то $A = 3, 584$, $B = -7, 414$, $D = 23, 534$. Если $K_{\text{сл}} = 0, 8$, то $A = 1, 516$, $B = -1, 327$, $D = -1, 383$. На рис. 3 построены графики функции неоднородности слоя $T(z)$ при этих значениях параметров. Подставив выражение для τ (51) в уравнения (3), получим после интегрирования:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{r^2}{2}(A + 3Bz^2 + 5Dz^4) + \varphi(z), \\ \sigma_z &= -\left(Az^2 + \frac{Bz^4}{2} + \frac{Dz^6}{3} \right) + \psi(r). \end{aligned} \quad (56)$$

Так как, очевидно, $\sigma_r(0; 0) = \varphi(0)$, $\sigma_z(0; 0) = \psi(0)$ и выполняется (2), то из (4) следует, что $\psi(0) - \varphi(0) = \sqrt{3}$. Обозначим $\varphi(0) = G$, тогда $\psi(0) = G + \sqrt{3}$. Полагая в уравнении (4) поочередно $r = 0$ и $z = 0$, получим:

$$\varphi(z) = -Az^2 - \frac{Bz^4}{2} - \frac{Dz^6}{3} + \frac{3(A + Bz^2 + Dz^4)^2}{3B + 5Dz^2} + G;$$

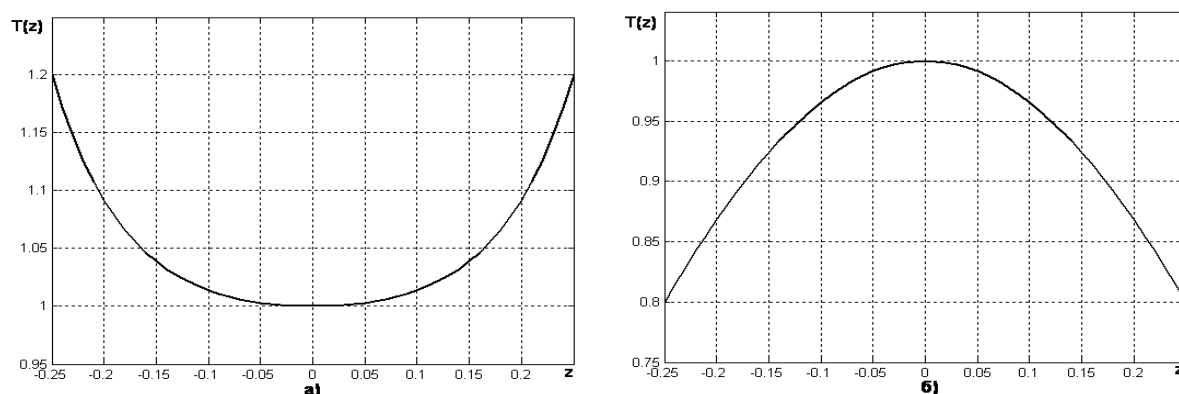


Рис. 3. Графики функции неоднородности слоя $T(z)$, когда $\varkappa = 0, 30$, $K = 1, 3$, а) $K_{\text{сл}} = 1, 2$, б) $K_{\text{сл}} = 0, 8$

$$\psi(r) = -\frac{Ar^2}{2} + G + \sqrt{3}. \quad (57)$$

Подставляя (57) в (56), получим:

$$\sigma_z = -\left(Az^2 + \frac{Bz^4}{2} + \frac{Dz^6}{3}\right) - \frac{Ar^2}{2} + G + \sqrt{3}. \quad (58)$$

Для вычисления постоянной G рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть для всех $r \in [0; r_F]$ $\sigma_z < \sqrt{3}KK_{\text{сл}}$. Тогда для вычисления постоянной G в формуле (58) надо положить $\sigma_z = \sigma_{zF}$, $r = r_F$, $z = \varkappa$. Получим

$$G + \sqrt{3} = \sigma_{zF} + Ar_F^2/2 + A\varkappa^2 + B\varkappa^4/2 + D\varkappa^6/3,$$

а решение системы (3), (4) в зоне $ОНВF$ (рис. 1) можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = r(Az + Bz^3 + Dz^5); \\ \sigma_z = A(\varkappa^2 - z^2) + B(\varkappa^4 - z^4)/2 + D(\varkappa^6 - z^6)/3 + A(r_F^2 - r^2)/2 + \sigma_{zF}; \\ \sigma_r = -r^2(A + 3Bz^2 + 5Dz^4)/2 + A(\varkappa^2 - z^2) + B(\varkappa^4 - z^4)/2 + \\ \quad + D(\varkappa^6 - z^6)/3 + \frac{3(A + Bz^2 + Dz^4)^2}{3B + 5Dz^2} + \sigma_{zF}, \end{array} \right. \quad (59)$$

причем постоянные A , B и D вычисляются по формулам (54) и (55). Тогда при $z = \varkappa$, используя формулу (38), получим

$$\sigma_z(r, \varkappa) = \left\{ \begin{array}{l} A(r_F^2 - r^2)/2 + \sigma_{zF}, \quad 0 \leq r \leq r_F; \\ \sqrt{3}\Gamma \left(\frac{\varkappa(2r - r_F - 1)}{1 - r_F} \right) (1 + a(r)(K - 1) + b(r)(K - 1)^2), \quad r_F \leq r \leq 1, \end{array} \right. \quad (60)$$

где функции $a(r)$ и $b(r)$ определены равенствами (36), постоянные r_F и σ_{zF} — формулами (40) и (40).

Второй случай. Пусть σ_z при $z = \varkappa$ в некоторой точке $M \in [HF]$ достигает своего наибольшего значения, ограниченного прочностью основного металла стержня, и равного числу $\sqrt{3}KK_{\text{сл}}$. В первом случае на контактной поверхности на участке HF

$$\sigma_z(r, \varkappa) = -Ar^2/2 + C,$$

где C – некоторая константа. Во втором случае таким должно быть НС на отрезке MF , т. е. на этом отрезке

$$\sigma_z(r, \varkappa) = -A(r - r_M)^2/2 + C. \quad (61)$$

При этом

$$\sigma_z(r_M, \varkappa) = \sqrt{3}KK_{\text{сл}}, \quad \sigma_z(r_F, \varkappa) = \sigma_F.$$

Отсюда

$$C = \sqrt{3}KK_{\text{сл}}, \quad \sqrt{3}KK_{\text{сл}} - \sigma_F = A(r_F - r_M)^2/2.$$

Находя из последнего выражения r_M , получим $r_M = r_F - \sqrt{2(\sqrt{3}KK_{\text{сл}} - \sigma_F)/A}$. Подставим это выражение в (61). Тогда

$$\sigma_z(r, \varkappa) = \begin{cases} \sqrt{3}KK_{\text{сл}}, & 0 \leq r \leq r_M; \\ -A(r - r_F + \sqrt{2(\sqrt{3}KK_{\text{сл}} - \sigma_F)/A})^2/2 + \sqrt{3}KK_{\text{сл}}, & r_M \leq r \leq r_F; \\ \sqrt{3}T \left(\frac{\varkappa(2r - r_F - 1)}{1 - r_F} \right) (1 + a(r)(K - 1) + b(r)(K - 1)^2), & r_F \leq r \leq 1. \end{cases} \quad (62)$$

Аналитические выражения (60) и (62) можно непосредственно использовать для вычисления осевой критической растягивающей нагрузки, при которой соединение теряет свою несущую способность.

Литература

1. Ольшак, В. Теория пластичности неоднородных тел / В. Ольшак. – М.: Мир, 1964. – 232 с.
2. Satoh, K. Joint strength of heavy plastics with lower strength weld metal / K. Satoh, M. Toyoda // Welding J. – Sept. – 1975. – №9. – P. 311 – 319.
3. Шахматов, М. В. О некоторых особенностях метода линий скольжения при решении осесимметричных задач теории пластичности / М. В. Шахматов, В. В. Ерофеев, А. А. Остсемин // Проблемы прочности. – 1985. – №3. – С. 88 – 94.
4. Шахматов, М. В. Влияние геометрических параметров механически неоднородных сварных соединений арматуры железобетона на их предельную несущую способность / М. В. Шахматов, Л. И. Хмарова, О. А. Бакши // Свароч. пр-во. – 1986. – №6. – С. 28 – 30.
5. Дильман, В. Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В. Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.
6. Дильман, В. Л. Об одной модели, описывающей напряженное состояние в круглом стержне / В. Л. Дильман, Т. В. Ерошкина // Обзорение приклад. и пром. математики. – 2004. – Т. 11, вып. 2. – С. 793 – 794.
7. Дильман, В. Л. Математические модели осесимметричного напряженного состояния при гипотезе разделения переменных для касательных напряжений / В. Л. Дильман, Т. В. Ерошкина // Изв. Челяб. науч. центра. – 2006. – Вып. 2(32). – С. 1 – 4.
8. Дильман, В. Л. Прочность механически неоднородных сварных соединений стержней арматуры / В. Л. Дильман, А. А. Остсемин, Т. В. Ерошкина // Вестник машиностроения. – 2008. – №9. – С. 13 – 17.
9. Ерошкина, Т. В. Напряженное состояние поперечной мягкой прослойки в растягиваемом круглом стержне при гипотезе параболических сечений / Т. В. Ерошкина // Обзорение прикл. и пром. математики. – 2007. – Т. 14, вып. 1. – С. 109 – 110.

10. Шахматов, М. В. Напряженное состояние и прочность сварных соединений с переменными механическими свойствами металла мягкого участка / М. В. Шахматов, В. В. Ерофеев // Свароч. пр-во. – 1982. – №3. – С. 6 – 7.
11. Когут, Н. С. Несущая способность сварных соединений / Н. С. Когут, М. В. Шахматов, В. В. Ерофеев. – Львов.: Свит, 1991. – 184 с.
12. Кузнецов, А. И. Задача о неоднородном пластическом слое / А. И. Кузнецов // *Archiwum mechaniki stosowanej*. – 1960. – Т. 12, №2. – С. 163 – 172.
13. Дильман, В. Л. Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине / В. Л. Дильман, А. А. Остсемин // *Изв.РАН. Механика твердого тела*. – 2000. – № 1. – С. 141 – 148.
14. Дильман, В. Л. Исследование системы уравнений напряженного состояния неоднородного пластического слоя / В. Л. Дильман // *Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Ильи Нестеровича Векуа (Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г.): тез. докл.* – Новосибирск, 2007. – С. 136 – 137.

Кафедра общей математики,
Южно-Уральский государственный университет
dilman49@mail.ru

Поступила в редакцию 7 сентября 2009 г.