УДК 517.711.3

ЗАДАЧА ТЕРМОКОНВЕКЦИИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Т.Г. Сукачева

THE THERMOCONVECTION PROBLEM FOR THE LINEARIZIED MODEL OF THE INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC FLUID

T.G. Sukacheva

Рассматривается задача Коши – Дирихле для гибрида линеаризованной системы Осколкова и уравнения теплопроводности в приближении Обербека – Буссинеска, моделирующего термоконвекцию несжимаемой вязкоупругой жидкости. Данная задача исследуется на основе теории относительно p- секториальных операторов и вырожденных полугрупп операторов. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи и получено описание ее расширенного фазового пространства.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, система уравнений Осколкова, несжимаемая вязкоупругая жидкость, относительно p-секториальный оператор, расширенное фазовое пространство

The Cauchy-Dirichlet problem for the hybrid of linearizied Oskolkov system and heat equation in the approximation of Oberbek-Bussinesq modeling thermoconvection of incompressible viscoelastic fluid is considered. This problem is investigated on the base of the theory of relatively p-sectorial operators and degenerate semigroups of operators. The theorem of existence of the unique solution of this problem is proved and the description of its extended phase space is received.

Keywords: Sobolev type equation, Oskolkov system of equations, an incompressible viscoelastic fluuid, relatively p-sectorial operator, extended phase space

Введение

Система уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)\mathbf{v}_t = \nu\nabla^2\mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{v}} - \nabla p - g\gamma\theta + \mathbf{f}, \\ 0 = \nabla\cdot\mathbf{v}, \\ \theta_t = \kappa\nabla^2\theta - \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + \mathbf{v}\cdot\gamma, \end{cases} \tag{1}$$

является гибридом линеаризованной системы Осколкова [1, 2] и уравнения теплопроводности в приближении Обербека – Буссинеска, моделирующего термоконвекцию несжимаемой вязкоупругой жидкости. Она моделирует эволюцию скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_i = v_i(x,t)$, градиента давления $\nabla p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_i = p_i(x,t)$ и температуры $\theta = \theta(x,t)$

простейшей неньютоновской жидкости — несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта нулевого порядка. Параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\kappa \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругость, вязкость и теплопроводность жидкости соответственно; $g \in \mathbb{R}_+$ — ускорение свободного падения; вектор $\gamma = (0, \ldots, 0, 1)$ — орт в $\mathbb{R}^n$; свободный член $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i = f_i(x,t)$, отвечает внешнему воздействию на жидкость, а вектор-функция $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$, $\tilde{v}_k = \tilde{v}_k(x)$ соответствует стационарному решению исходной системы [1, 2]. Обоснование линеаризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка содержится в [3].

Рассмотрим первую начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x), \qquad \theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad \forall x \in \Omega; \\ &\mathbf{v}(x,t) = 0, \qquad \theta(x,t) = 0, \qquad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{2}$$

для системы (1). Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $n = 2, 3, 4$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $\mathcal{C}^\infty$.

Впервые задачу термоконвекции для несжимаемых вязкоупругих жидкостей Кельвина – Фойгта поставил А.П.Осколков [4]. Им же была исследована разрешимость задачи (2) для соответствующей нелинейной модели нулевого порядка в случае $\lambda^{-1} > -\lambda_1$ (λ_1 – наименьшее собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω)[5]. Первая начально-краевая задача для этой модели рассматривалась в [3, 6], а для ее модификации на случай плоско-параллельного течения в [7]. В этих работах изучалась ситуация, когда свободный член $\mathbf{f}$ не зависит от времени, а в [8] — указанная неавтономная задача. Нестационарная линеаризованная модель нулевого порядка изучалась в [9], а ее обобщение на случай модели ненулевого порядка в [10].

Нашей целью является изучение разрешимости задачи (1), (2) при нестационарном свободном члене $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x,t)$. Эту задачу мы исследуем в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа. Основным инстументом исследования является понятие относительно p-секториального оператора и порожденной им разрешающей вырожденной полугруппы операторов. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи, и получено описание ее расширенного фазового пространства. В первой части статьи в соответствии с [8] рассматривается абстрактная задача Коши для указанного класса уравнений, а затем задача (1), (2) изучается как конкретная интерпретация абстрактрной задачи. Заметим, что указанная задача рассматривается впервые и в силу последнего уравнения системы (1) является нелинейной.

1. Абстрактная задача

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, т.е. линеен и непрерывен, $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$, т.е. $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Через $\mathcal{U}_M$ обозначим линеал $\operatorname{dom} M$, снабженный нормой графика $|||\cdot||| = \|M\cdot\|_{\mathcal{F}} + \|\cdot\|_{\mathcal{U}}$. Пусть оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$, функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+;\mathcal{F})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для *полулинейного нестационарного уравнения соболевского типа*

$$L\dot{u} = Mu + F(u) + f(t). \tag{4}$$

Определение 1. *Локальным решением (далее просто — решением) задачи (3), (4) назовем вектор-функцию $u \in \mathcal{C}^\infty((0,T);\mathcal{U}_M)$, удовлетворяющую уравнению (4) и такую, что $u(t) \to u_0$ при $t \to 0+$.*

Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Определение 2. *Оператор M называется (L,p)-секториальным, если существуют константы $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+$, $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что*

(i) $S^L_{\Theta,a}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\arg(\mu - a)| < \Theta \ , \ \mu \neq a \ \} \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\max\{ \ \| R^L_{(\mu,p)}(M) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \qquad \| L^L_{(\mu,p)}(M) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} \} \ \leq \ \dfrac{k}{\prod_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}$

при любых μ, μ_0, μ_1, $\ldots$,$\mu_p \in S^L_{\Theta,a}(M)$.

Здесь

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \Pi_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M), \qquad L^L_{(\mu,p)}(M) = \Pi_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M)$$

соответственно правая и левая (L,p)-резольвенты оператора M, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ [11].

Определение 3. *Оператор M называется сильно (L,p)-секториальным, если он (L,p)-секториален и при всех μ, $\mu_0, \ldots,$ $\mu_p \in S^L_{\Theta,a}(M)$*

$$\text{(i)} \ \| M R^L_{(\mu,p)}(M) \, (\, \mu L - M \,)^{-1} f \|_{\mathcal{F}} \leq \frac{\text{const}(f)}{|\mu - a| \prod_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}$$

при всех f из некоторого плотного в $\mathcal{F}$ линеала;

$$\text{(ii)} \ \| \, (\, \mu L - M \,)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) \, \|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq \frac{\text{const}}{|\mu - a| \prod_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}.$$

Замечание 1. Если $p = 0$, то (L,p)- и сильно (L,p)-секториальный оператор M называется соответственно L- и сильно L-секториальным [3].

Будем рассматривать задачу (3), (4) в предположении, что оператор M сильно (L,p)-секториален. При условии сильной (L,p)-секториальности оператора M решение задачи (3), (4) может быть неединственным, что показывает пример, приведенный в [12]. Поэтому сузим понятие решения уравнения (4). Также известно [13, 14, 15], что решения задачи (3), (4) существуют не для всех $u_0 \in \mathcal{U}_M$. Поэтому введем два определения.

Определение 4. *Множество $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U}_M \times \bar{\mathbb{R}}_+$ назовем расширенным фазовым пространством уравнения (4), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{U}_M$ такой, что $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$ существует единственное решение задачи (3), (4), причем $(u(t), t) \in \mathcal{B}^t$.*

Замечание 2. Если $\mathcal{B}^t = \mathcal{B} \times \bar{\mathbb{R}}_+$, где $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$, то множество $\mathcal{B}$ называется *фазовым пространством* уравнения (4). Ранее вместо термина «расширенное фазовое пространство»использовался термин «конфигурационное пространство» [8], что вносило некоторую путаницу в терминологию [16].

Определение 5. *Пусть пространство $\mathcal{U}$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \ \mathcal{U}_1$ так, чтобы* $\ker L \subset \mathcal{U}_0$. *Решение $u = v + w$, где $v(t) \in \mathcal{U}_0$, а $w(t) \in \mathcal{U}_1$ при всех $t \in (0, T)$, уравнения (4) назовем квазистационарной полутраекторией, если $L\dot{v} \equiv 0$.*

Замечание 3. Понятие *квазистационарной полутраектории* обобщает понятие *квазистационарной траектории,* введенное для динамического случая [12, 14, 15].

В силу того, что оператор M сильно (L,p)-секториален, пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathcal{U}=\mathcal{U}^0\oplus\mathcal{U}^1$, $\mathcal{F}=\mathcal{F}^0\oplus\mathcal{F}^1$ [11], где

$$\mathcal{U}^0=\{\varphi\in\mathcal{U}: U^t\varphi=0\ \ \exists t\in\mathbb{R}_+\},\quad \mathcal{F}^0=\{\psi\in\mathcal{F}: F^t\psi=0\ \ \exists t\in\mathbb{R}_+\}\ -$$

ядра, а

$$\mathcal{U}^1=\{u\in\mathcal{U}: \lim_{t\to0+}U^tu=u\},\quad \mathcal{F}^1=\{f\in\mathcal{F}: \lim_{t\to0+}F^tf=f\}\ -$$

образы аналитических разрешающих полугрупп

$$U^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,\qquad F^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \tag{5}$$

($\Gamma\subset S^L_{\Theta,a}(M)$ — контур такой, что $\arg\mu\to\pm\Theta$ при $|\mu|\to+\infty$) линейного однородного уравнения $L\dot u=Mu$.

Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^k$ $(\mathcal{U}^k\cap\mathrm{dom}\,M)$, $\quad k=0,\ 1$. Тогда $L_k:\mathcal{U}^k\to\mathcal{F}^k$, $\quad M_k:\mathcal{U}^k\cap\mathrm{dom}\,M\to\mathcal{F}^k$, $\quad k=0,\ 1$, причем сужения M_0 и L_1 операторов M и L на пространства $\mathcal{U}^0\cap\mathrm{dom}\,M$ и $\mathcal{U}^1$ соответственно являются линейными непрерывными операторами и имеют ограниченные обратные операторы. Эти утверждения следуют из соответствующих результатов [11]. Поэтому приведем уравнение (4) к эквивалентной форме

$$\begin{aligned} R\dot u^0&=u^0+G(u)+g(t)\qquad u^0(0)=u^0_0,\\ \dot u^1&=Su^1+H(u)+h(t)\qquad u^1(0)=u^1_0, \end{aligned}\tag{6}$$

где $u^k\in\mathcal{U}^k$, $\ k=0,1$, $\ u=u^0+u^1$, операторы $R=M_0^{-1}L_0$, $\ S=L_1^{-1}M_1$, $\ G=M_0^{-1}(I-Q)F$, $\ H=L_1^{-1}QF$, $\ g=M_0^{-1}(I-Q)f$, $\ h=L_1^{-1}Qf$. Здесь $Q\in\mathcal{L}(F)(\equiv\mathcal{L}(F;F))$ — проектор, расщепляющий пространство $\mathcal{F}$ требуемым образом.

Определение 6. *Систему уравнений (6) назовем нормальной формой уравнения (4).*

Замечание 4. В случае, когда оператор M сильно L-секториален, нормальная форма уравнения (4) (в случае $f(t)\equiv0$) имеет вид (5.1) в [7].

В дальнейшем ограничимся изучением таких квазистационарных полутраекторий уравнения (4), для которых $R\dot u^0\equiv0$. Для этого предположим, что оператор R — *бирасщепляющий* [17], т.е. его ядро $\ker R$ и образ $\mathrm{im}\,R$ дополняемы в пространстве $\mathcal{U}$. Положим $\mathcal{U}^{00}=\ker R$, а через $\mathcal{U}^{01}=\mathcal{U}^0\ominus\mathcal{U}^{00}$ обозначим некоторое дополнение к подпространству $\mathcal{U}^{00}$. Тогда первое уравнение нормальной формы (6) редуцируется к виду

$$R\dot u^{01}=u^{00}+u^{01}+G(u)+g(t), \tag{7}$$

где $u=u^{00}+u^{01}+u^1$.

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, а оператор R — бирасщепляющий. Пусть существует квазистационарная полутраектория $u=u(t)$ уравнения* (4). *Тогда она удовлетворяет соотношениям*

$$0=u^{00}+u^{01}+G(u)+g(t),\quad u^{01}=\mathrm{const}. \tag{8}$$

Доказательство. Первое соотношение вытекает из (7) в силу требования квазистационарности $R\dot u^0=R\dot u^{01}\equiv0$. Второе соотношение вытекает из тождества $R\dot u^{01}\equiv0$, так как по теореме Банаха об обратном операторе сужение оператора $Q_RR(I-P_R)$ на $\mathcal{U}^{01}$ есть непрерывно обратимый оператор. Здесь Q_R и P_R — проекторы на $\mathrm{im}\,R$ и $\ker R$ соответственно, $\ker P_R=\mathcal{U}^{01}$. □

Замечание 5. Второе соотношение в (8) поясняет смысл термина «квазистацинарные полутраектории», т.е. это такие полутраектории, которые «стационарны по некоторым переменным». Другими словами, квазистационарная полутраектория обязательно лежит в некоторой плоскости $(I - P_R)u^0 = \mathrm{const}$.

Теорема 1 устанавливает необходимые условия существования квазистационарной полутраектории уравнения (4). Перейдем к рассмотрению достаточных условий. Известно, что при условии сильной (L, p)-секториальности оператора M оператор S секториален [11]. Значит, он порождает на $\mathcal{U}^1$ аналитическую полугруппу, которую мы обозначим через $\{U_1^t : t \geq 0\}$, так как в действительности оператор U_1^t есть сужение оператора U^t на $\mathcal{U}^1$. Из того, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ следует, что существует проектор $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, соответствующий данному расщеплению. Можно показать, что $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M)$ [11]. Тогда пространство $\mathcal{U}_M$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_M^0 \oplus \mathcal{U}_M^1$ так, что вложение $\mathcal{U}_M^k \subset \mathcal{U}^k, \quad k = 0,\ 1$, плотно и непрерывно. Символом A'_v обозначена производная Фреше в точке $v \in \mathcal{V}$ оператора A, определенного на некотором банаховом пространстве $\mathcal{V}$.

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален, оператор R — бирасщепляющий, оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$, а вектор-функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{F})$. Пусть*

(i) *в некоторой окрестности $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$ точки u_0 выполнено соотношение*

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)); \tag{9}$$

(ii) *проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, и оператор $I + P_R G'_{u_0^0} : \mathcal{U}_M^{00} \to \mathcal{U}_M^{00}$ — топлинейный изоморфизм ($\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^{00}$);*

(iii) *для аналитической полугруппы $\{U_1^t : t \geq 0\}$ выполнено соотношение*

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Тогда существует единственное решение задачи (3), (4), *являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения* (4).

Доказательство. Рассмотрим окрестность $\mathcal{O}_{u_0}$ точки u_0. В этой окрестности первое уравнение (6) приобретет вид

$$0 = u^{00} + P_R(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)) \tag{11}$$

в силу условия (i). Далее, из (i) в силу теоремы о неявной функции существуют окрестности $\mathcal{O}_{u_0^{00}} \subset \mathcal{U}_M^{00}$, ($\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}^{00} \cap \mathcal{U}_M$) $\mathcal{O}_{u_0^1} \subset \mathcal{U}_M^1$ ($\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}^1 \cap \mathcal{U}_M$) точек $u_0^{00} = P_R(I - P)u_0$, u_0^1 соответственно и отображение $\delta : \mathcal{O}_{u_0^1} \to \mathcal{O}_{u_0^{00}}$ класса $\mathcal{C}^\infty$ такое, что уравнение

$$u^{00} = \delta(u^1, t) \tag{12}$$

эквивалентно уравнению (11).

Теперь в силу (12) второе уравнение (6) в окрестности $\mathcal{O}_{u_0^1}$ приобретет вид

$$\dot{u}^1 = Su^1 + H(\delta(u^1) + u_0^{01} + u^1) + h(t), \tag{13}$$

где оператор $H((I + \delta)(\cdot) + u_0^{01}) : \mathcal{O}_{u_0^1} \to \mathcal{U}^1$ принадлежит классу $\mathcal{C}^\infty$ по построению.

Для доказательства однозначной разрешимости задачи $u^1(0) = u_0^1$ для уравнения (13) воспользуемся методом Соболевского – Танабэ, изложенным в [18, гл. 9]. В силу (iii), гладкости оператора H и вектор-функции h все условия теорем 9.4, 9.6 и 9.7 в [18] выполнены. Поэтому если $u_0^1 \in \mathcal{U}_M^1$, то при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u^1 = u^1(t),\ t \in [0, T)$ уравнения (13) такое, что $u^1(t) \to u_0^1$ при $t \to 0+$ в топологии $\mathcal{U}_M^1$.

Итак, решение задачи (3), (4) в данном случае будет иметь вид $u = u^1 + \delta(u^1) + u_0^{01}$, и это решение будет квазистационарной полутраекторией по построению. $\square$

Замечание 6. Для любой квазистационарной полутраектории уравнения (4) соотношение (9) непосредственно вытекает из первого уравнения (8).

Замечание 7. Условие (10) для обычных аналитических полугрупп, имеющих оценку $\|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}^1_M)} < t^{-1}\mathrm{const}$, не выполняется. В дальнейшем мы собираемся использовать теорему 2 именно в такой ситуации, и потому необходимо сделать некоторые пояснения. Пусть $\mathcal{U}^1_\alpha = [\mathcal{U}^1;\mathcal{U}^1_M]_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ — некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору S. В теореме 2 условие «оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}^1_M;\mathcal{F})$, вектор-функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+;\mathcal{F})$» дополним условием «оператор $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}^1_M;\mathcal{U}^1_\alpha)$, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{U}^1_\alpha)$», а соотношение (10) заменим соотношением

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}^1_\alpha)} dt < \infty \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{14}$$

Тогда утверждение теоремы 2 не изменится. Обсуждение этого круга вопросов см. в [18, глава 9].

Замечание 8. Пусть выполнены условия теоремы 2 (возможно, с учетом замечания 7). Построим плоскость $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{U}_M : (I - P_R)(I - P)u = u_0^{01}\}$ и множество $\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{U}_M : P_R((I - P)u + G(u) + g(t)) = 0\}$. По условию теоремы их пересечение $\mathcal{A} \cap \mathcal{M} \neq \varnothing$, так как содержит по крайней мере точку u_0. Более того, существует $\mathcal{C}^\infty$-диффеоморфизм $I + \delta$, отображающий окрестность $\mathcal{O}_{u_0^1}$ на некоторую окрестность $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$. Следовательно, в качестве начального значения можно брать не только точку u_0, но и любую из некоторой ее окрестности $\mathcal{O}_{u_0}$. Это значит, что $\mathcal{O}_{u_0}$ является частью *расширенного фазового пространства* $\mathcal{B}^t$ уравнения (4).

Теперь пусть $\mathcal{U}_k$ и $\mathcal{F}_k$ — банаховы пространства, операторы $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{F}_k)$, а операторы $B_k :\ \mathrm{dom}\, B_k \to \mathcal{F}$ линейны и замкнуты с областями определений $\mathrm{dom}\, B_k$ плотными в $\mathcal{U}_k$, $k = 1, 2$. Построим пространства $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ и операторы $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M :\ \mathrm{dom}\, M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\mathrm{dom}\, M = \mathrm{dom}\, B_1 \times \mathrm{dom}\, B_2$.

Теорема 3. *[19] Пусть операторы B_k сильно (A_k, p_k)-секториальны, $k = 1, 2$; причем $p_1 \geq p_2$. Тогда оператор M сильно (L, p_1)-секториален.*

2. Конкретная интерпретация

Рассмотрим задачу (2) для системы (1), представленной в виде

$$\begin{cases} (1 - \lambda\nabla^2)\mathbf{v}_t = \nu\nabla^2\mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{p} - g\gamma\theta + \mathbf{f}, \\ 0 = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \theta_t = \kappa\nabla^2\theta - \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + \mathbf{v} \cdot \gamma. \end{cases} \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{p} = \nabla p$, т.к. во многих гидродинамических задачах знание градиента давления предпочтительнее, чем знание давления [20]. Впервые такая замена уравнения неразрывности сделана в [21]. Нас будет интересовать локальная однозначная разрешимость задачи (15), (2), эквивалентной исходной задаче (1), (2). Эту задачу удобно рассматривать в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа, изложенной вкратце в п.1.

Для того, чтобы редуцировать задачу (15), (2) к задаче (3), (4) введем, следуя [21], пространства $\mathbf{H}^2_\sigma$, $\mathbf{H}^2_\pi$, $\mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$. Здесь $\mathbf{H}^2_\sigma$ и $\mathbf{H}_\sigma$ — подпространства соленоидальных функций в пространствах $(W_2^2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$ и $(L_2(\Omega))^n$ соответственно, а $\mathbf{H}_\pi^2$ и $\mathbf{H}_\pi$ — их ортогональные (в смысле $(L_2(\Omega))^n$) дополнения. Через Σ обозначим ортопроектор на $\mathbf{H}_\sigma$, причем его сужение на пространство $(W_2^2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$ будем обозначать тем же символом. Положим $\Pi = I - \Sigma$.

Формулой $A = \nabla^2 E_n : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \to \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где E_n — единичная матрица порядка n, зададим линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Формулой $B : \mathbf{v} \to \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \to \mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker B = \mathbf{H}_\sigma^2$.

Пользуясь естественным изоморфизмом прямой суммы и декартова произведения банаховых пространств, введем в рассмотрение пространства $\mathcal{U}_1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p$ и $\mathcal{F}_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$. Построим операторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I - \lambda A) & \Sigma(I - \lambda A) & O \\ \Pi(I - \lambda A) & \Pi(I - \lambda A) & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \nu\Sigma A & \nu\Sigma A & O \\ \nu\Pi A & \nu\Pi A & -I \\ O & B & O \end{pmatrix}.$$

Замечание 9. Обозначим через A_σ сужение оператора ΣA на $\mathbf{H}_\sigma^2$. По теореме Солонникова-Воровича-Юдовича спектр $\sigma(A_\sigma)$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$.

Теорема 4. (i) *Операторы* $A_1, B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$, *и, если* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, *то оператор* A_1 — *бирасщепляющий,* $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p$, $\operatorname{im} A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\}$.

(ii) *Если* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, *то оператор* B_1 $(A_1, 1)$-*ограничен.*

Замечание 10. Доказательство теоремы 4 приведено в [8], только в другой терминологии. Впервые понятие относительно ограниченного оператора введенно в [22]. Случай относительно секториального оператора рассматривался в [7, 23, 24].

Далее положим $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(\Omega)$ и формулой $B_2 = \kappa\nabla^2 : \operatorname{dom} B_2 \to \mathcal{F}_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2, $\operatorname{dom} B_2 = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если оператор A_2 положить равным I, то в силу секториальности оператора B_2 [25, гл. 1] справедлива

Теорема 5. *Оператор* B_2 *сильно* A_2-*секториален.*

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Вектор u пространства $\mathcal{U}$ имеет вид $u = \operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, u_\theta)$, где $\operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p) \in \mathcal{U}_1$, а $u_\theta \in \mathcal{U}_2$. Аналогичный вид имеет вектор $f \in \mathcal{F}$. Операторы L и M определим формулами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom} M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Из теоремы 4 и соответствующих результатов [11] следует, что оператор B_1 сильно $(A_1, 1)$-секториален. В силу этого и теорем 3 и 5 справедлива

Теорема 6. *Пусть* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, *тогда оператор* M *сильно* $(L, 1)$-*секториален.*

Перейдем к построению нелинейного оператора F. В данном случае его удобно представить в виде $F = F_1 \otimes F_2$, где $F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = \operatorname{col}(-\Sigma(((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + g\gamma u_\theta + f), -\Pi(((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + g\gamma u_\theta + f), 0)$, а $F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = (u_\sigma + u_\pi) \cdot (\gamma - \nabla u_\theta)$.

Формально найдем производную Фреше F'_u оператора F в точке u,

$$F'_u = \begin{pmatrix} \Sigma a(u_\sigma, u_\pi) & \Sigma a(u_\sigma, u_\pi) & O & -g\Sigma\gamma \\ \Pi a(u_\sigma, u_\pi) & \Pi a(u_\sigma, u_\pi) & O & -g\Pi\gamma \\ O & O & O & O \\ (\gamma - \nabla u_\theta)\cdot(*) & (\gamma - \nabla u_\theta)\cdot(*) & O & -(u_\sigma + u_\pi)\cdot(*) \end{pmatrix},$$

где $a(u_\sigma, u_\pi) = -((*)\cdot\nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi)\cdot\nabla)(*)$, а на место символа $*$ следует ставить соответствующую координату вектора v в случае, когда мы хотим найти вектор $F'_u v$.

Далее, в нашем случае пространство $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \mathrm{dom}\, B_2$ (в силу непрерывности оператора B_1). Используя стандартную технику (см., например, [14, 15]), нетрудно показать, что при любых $u \in \mathcal{U}_M$ оператор $F'_u \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$. Аналогично устанавливается, что вторая производная Фреше F''_u оператора F — непрерывный билинейный оператор из $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$ в $\mathcal{F}$, а $F'''_u \equiv O$. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Оператор* $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.

Вектор-функцию f представим в виде $f = f_1 \otimes f_2$, где $f_1 = \mathrm{col}(\Sigma\mathbf{f}, \Pi\mathbf{f}, 0)$, $f_2 = 0$. Будем предполагать, что $f \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathcal{F})$.

Итак, редукция задачи (15), (2) к задаче (3), (4) закончена. В дальнейшем всюду отождествляем задачи (15), (2) и (3), (4). Теперь перейдем к проверке выполнения условий теорем 1 и 2.

В силу теоремы 6 и соответствующих результатов [11] существует аналитическая полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ разрешающих операторов уравнения (4), которую в данном случае естественно представить в виде $U^t = V^t \otimes W^t$, где $V^t(W^t)$ — сужение оператора U^t на $\mathcal{U}_1(\mathcal{U}_2)$. Поскольку оператор B_2 секториален, то $W^t = \exp(tB_2)$, что влечет за собой $\mathcal{W}^\circ = \{0\}$ и $\mathcal{W}^1 = \mathcal{U}_2$.

Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. В силу теорем 4 и 6 и цитируемой монографии [11] данная полугруппа продолжима до группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Ее ядро $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ где $\mathcal{U}_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p (= \ker A_1$ по теореме 5), а $\mathcal{U}_1^{01} = \Sigma A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \{0\}$. Здесь $A_\lambda = I - \lambda A$, $A_{\lambda\pi}$ — сужение оператора ΠA_λ^{-1}на $\mathbf{H}_\pi$. Известно , что если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор $A_{\lambda\pi} : \mathbf{H}_\pi \to \mathbf{H}_\pi^2$ — топлинейный изоморфизм (см., например, [8]). Обозначим через $\mathcal{U}_1^1$ образ $\mathcal{V}^1$. Тогда пространство $\mathcal{U}_1$ разлагается в прямую сумму подпространств: $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01} \oplus \mathcal{U}_1^1$.

Построим оператор $R = B_{10}^{-1} A_{10} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$, где $A_{10}(B_{10})$ — сужение оператора $A_1(B_1)$ на $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$. (Оператор B_{10}^{-1} существует в силу теоремы 6 и соответствующих результатов [11]). По построению $\ker R = \mathcal{U}_1^{00}$, а в [21] показано, что $\mathrm{im}\, R = \mathcal{U}_1^{00}$. Значит, оператор R — бирасщепляющий. Обозначим через P_R проектор пространства $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ на $\mathcal{U}_1^{00}$ вдоль $\mathcal{U}_1^{01}$. В силу конструкции пространства $\mathcal{U}_M$ проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, где $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}_M \cap (\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}) (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$. Зафиксируем это в следующем утверждении.

Лемма 1. *Пусть* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. *Тогда оператор* R *— бирасщепляющий, причем* $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$.

Введем в рассмотрение проекторы

$$P_0 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & \Pi \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} O & P_1^{12} & O \\ O & \Pi & O \\ O & O & O \end{pmatrix},$$

где $P_1^{12} = \Sigma A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1}$. Из [21] и в силу того, что ядро $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, следует $I - P = (P_0 + P_1) \otimes O$. Применяя проектор $I - P$ к уравнению (4) в данной транскрипции, получаем

$$\Pi(\nu A(u_\sigma + u_\pi) - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) - u_p - g\gamma u_\theta + f(t)) = 0,$$
$$Bu_\pi = 0. \tag{16}$$

Отсюда в силу теоремы 1 и свойств оператора B получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi \equiv 0$. Другими словами, все решения нашей задачи (если они существуют) с необходимостью должны лежать в плоскости $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0\}$. А так как $\Pi u_p = u_p$, то из первого уравнения (16) получаем соотношение (8) в нашей транскрипции

$$u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi)\cdot\nabla)u_\sigma - (u_\sigma\cdot\nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) - g\gamma u_\theta + f(t)). \tag{17}$$

Очевидно, $P_0 \equiv P_R$, поэтому второе уравнение (16) есть соотношение (9) применительно к нашей ситуации. Итак, справедлива

Лемма 2. *В условиях леммы 1 любое решение задачи* (3), (4) *лежит во множестве*

$$\mathcal{A}^t = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0, \quad u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi)\cdot\nabla)u_\sigma - (u_\sigma\cdot\nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) - g\gamma u_\theta) + f_\pi(t)\}.$$

Замечание 11. Из (17) сразу следует условие (iii) теоремы 2 для любой точки $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00} (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\})$. Поэтому ввиду замечания 8 множество $\mathcal{A}^t$ — простое банахово многообразие $\mathcal{C}^\infty$-диффеоморфное подпространству $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$ — является кандидатом на роль расширенного фазового пространства задачи (15), (2).

Приступим к проверке условий (10) и (14). Построим пространство $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Данное пространство, очевидно, будет интерполяционным пространством для пары $[\mathcal{U}, \mathcal{U}_M]_\alpha$, причем $\alpha = 1/2$. Как отмечено выше, полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ продолжается до группы $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ на $\mathcal{U}_1^1$, где V_1^t — сужение оператора V^t на $\mathcal{U}_1^1$. Поскольку $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$ (по построению), и оператор B_1 непрерывен (теорема 4), то в силу равномерной ограниченности полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ имеем

$$\int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1;\mathcal{U}_M^1)} dt \leq$$
$$\mathrm{const}\|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1;\mathcal{F}_1)} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)} dt < \infty \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{18}$$

Далее, в силу неравенства Соболева [18, гл. 9] полугруппа $\{W^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\mathrm{dom}\, B_2;\, \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} dt < \infty. \tag{19}$$

Положим $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$, где $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. Тогда из (18) и (19) вытекает

Лемма 3. *В условиях леммы 1 выполняется соотношение* (10).

И наконец, выполняя требование (14), найдем оператор H и вектор-функцию h. Для этого построим проектор $Q : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^1$. Согласно [21] $Q = (I - Q_0 - Q_1) \otimes I$, где

$$Q_0 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & \Pi & Q_0^{23} \\ O & O & O \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} O & O & Q_1^{13} \\ O & O & Q_1^{23} \\ O & O & \Pi \end{pmatrix},$$

$Q_1^{13} = \Sigma A A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1} B_\pi^{-1}$, $Q_1^{23} = \Pi A A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1} B_\pi^{-1}$, $Q_0^{23} = -Q_1^{23}$, а оператор B_π есть сужение оператора B на $\mathbf{H}_\pi^2$ (в силу теоремы Банаха об обратном операторе оператор $B_\pi : \mathbf{H}_\pi^2 \to \mathbf{H}_\pi$ — топлинейный изоморфизм). Таким образом, оператор $H = H_1 \otimes H_2$, где $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 = F_2(A_{11}$ — сужение оператора A на $\mathcal{U}_1^1$). Включение $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$, где $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$ показывается аналогично тому, как было показано включение $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$. Вектор-функция $h(t)$ определяется как $h_1(t) \otimes h_2(t)$, где $h_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)f_1$, а $h_2 = 0$. В силу бесконечной гладкости $f = f_1 \otimes f_2$, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{U}_\alpha^1)$.

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому справедлива

Теорема 8. *Пусть $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда при любом u_0 таком, что $(u_0, 0) \in \mathcal{A}^0$ и некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_\theta)$ задачи (1), (2), являющееся квазистационарной полутраекторией, причем $(u(t), t) \in \mathcal{A}^t$, при всех $t \in (0, T)$.*

Автор выражает благодарность профессору Г.А. Свиридюку за поддержку и интерес к данным исследованиям, а также профессору Favini и организаторам программы Erastus Mundus за прекрасную возможность работы над этой статьей в г. Болонья, Италия.

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Тр. ин-та математики АН СССР. – 1988. – №179. – С. 126 – 164.
2. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31 – 48.
3. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49, №4. – С. 47 – 74.
4. Осколков, А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П. Осколков // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1976. – Т. 59. – С. 133 – 177.
5. Осколков, А.П. К теории жидкостей Фойгта / А.П. Осколков // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1980. – Т. 96. – С. 233 – 236.
6. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1990. – №12. – С. 65 – 70.
7. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, №5. – С. 216 – 237.
8. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Т.Г. Сукачева // Новгород. гос. ун-т. – Великий Новгород, 2004. – 249 с.
9. Сукачева, Т.Г. Нестационарная линеаризованная модель движения несжимаемой вязкоупругой жидкости / Т.Г. Сукачева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – №20 (158), вып. 11. – С. 77 – 83.
10. Сукачева, Т.Г. Нестационарная линеаризованная модель движения несжимаемой вязкоупругой жидкости высокого порядка / Т.Г. Сукачева // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – № 17 (150), вып. 3. – С. 86 – 93.
11. Sviridyuk G.A. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov // Utrecht-Boston: VSP, 2003. – 179 p.

12. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. математика. – 1993. – Т. 57, №3. – С. 192 – 207.

13. Levine, H.A. Some nonexistance and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$ / H.A. Levine // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1973. – V.51, № 5. – P. 371 – 386.

14. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31, №5. – С. 109 – 119.

15. Свиридюк Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, №2. – С. 250 – 258.

16. Свиридюк Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Вестн. МаГУ. Математика. – 2005. – Вып. 8. – С. 5 – 33.

17. Борисович, Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1977. – Т. 32, №4. – С. 3 – 54.

18. Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения /Дж. Марсден, М. Мак-Кракен – М.: Мир, 1980. – 368 с.

19. Бокарева, Т.А. Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Т.А. Бокарева // Санкт-Петербург, 1993. – 107 с.

20. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – Изд. 2. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

21. Свиридюк, Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 1. – С. 62 – 70.

22. Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1991. – Т.318, № 4. – С. 828 – 831.

23. Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальными операторами / Г.А. Свиридюк // Докл. РАН. – 1993. – Т. 329, №3. – С. 274 – 277.

24. Свиридюк, Г.А. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т.36, №5. – С. 1130 – 1145.

25. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

Кафедра математического анализа,
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого
tamara.sukacheva@novsu.ru

Поступила в редакцию 2 марта 2010 г.