УДК 517.9

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ХОФФА НА ГРАФЕ

С.А. Загребина, П.О. Пивоварова

THE STABILITY OF THE HOFF LINEAR EQUATIONS ON A GRAPH

S.A. Zagrebina, P.O. Pivovarova

Рассмотрена устойчивость стационарного решения линейных уравнений Хоффа на графе, являющегося моделью конструкции из двутавровых балок. Основной подход – второй метод Ляпунова, модифицированный сообразно нашей ситуации.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, граф, фазовое пространство, функция Ляпунова

The stability of stationary solution of the Hoff linear equations on a graph which is a model design of I-beams is considered. The main approach is the second Lyapunov method modifying respectively to our situation.

Keywords: Sobolev type equation, graph, phase spase, Lyapunov function

Введение

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер, причем каждое ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим линейные уравнения Хоффа

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j, \quad u_j = u_j(x,t), \quad x \in (0, l_j), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

моделирующие динамику выпучивания конструкции из двутавровых балок в линейном приближении. Параметры $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ характеризуют нагрузку на конструкцию, параметр $\alpha \in \mathbb{R}_+$ отвечает свойствам материала балок. Нас интересуют решения уравнений (0.1), удовлетворяющие «условиям непрерывности»

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \quad E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i), E_m, E_n \in E^{\omega}(V_i), \tag{0.2}$$

и «условиям баланса потоков»

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0 \tag{0.3}$$

в вершинах графа. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине V_i, $t \in \mathbb{R}$. (Обсуждение условий (0.2), (0.3) см. напр. в [1]). Основной целью статьи является доказательство асимптотической устойчивости по Ляпунову нулевых решений задачи (0.1) – (0.3) при параметрах $\lambda \in [0, \lambda_0]$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Дифференциальные уравнения на графах — сравнительно новая область математического знания. Первая монография по данной проблематике вышла в 2004 г. [2]. В ней содержится обстоятельный исторический обзор всех достижений в этой области. За последующие годы количество публикаций, посвященных дифференциальным уравнениям на графах лавинообразно выросло, и авторы, стесненные рамками статьи, воздерживаются от какого-либо их обзора. Еще более стремительно растет число публикаций, посвященных уравнениям соболевского типа, к которым относятся уравнения (0.1). Здесь мы сошлемся на две монографии [3], [4], исторические обзоры в которых взаимно дополняют друг друга. Заметим еще, что первым уравнения соболевского типа на графах начал изучать Г.А. Свиридюк [5].

Вернемся к задаче (0.1) – (0.3). Пользуясь понятиями, методами и результатами монографии [6], мы редуцируем ее к линейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \tag{0.4}$$

где L и M — линейные непрерывные операторы, действующие в специально построенных банаховых пространствах. Отметим универсальность нашего подхода — сейчас все большее число исследователей его придерживается (см. например, [7 – 9]). Исследование устойчивости уравнений (0.4) (в терминах дихотомии решений) было начато в [10]. Затем данный подход был обобщен на полулинейные уравнения соболевского типа [11 – 13] (в терминах инвариантных многообразий). Однако эти методы применить к исследованию устойчивости в нашем случае не представляется возможным. Дело здесь в том, что L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M является замыканием множества

$$\left\{\mu \in \mathbb{C} : \mu = -\alpha(\lambda_0 - \lambda + \lambda_k)^{-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_k = \lambda - \lambda_0\}\right\},$$

и значит,

$$\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset. \tag{0.5}$$

(Здесь $\{\lambda_k\}$ – последовательность собственных значений задачи Штурма – Лиувилля на графе, занумерованных по неубыванию с учетом кратности, $\{\lambda_k\} \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+$. Пояснения об этом можно посмотреть в статье А.А. Баязитовой в данном Вестнике.) Именно нарушение условия (0.5) является главным требованием в работах [10] – [13].

Поэтому для исследования устойчивости в случае (0.4) мы избрали второй метод Ляпунова, обобщение которого на полные метрические пространства дано в [14], гл. 4. Внимательный анализ приведенной там теоремы 4.1.4 показал, что ее можно распространить на необходимые нам нормированные пространства (т. е. без требования их полноты), правда, с потерей равномерности в устойчивости и асимптотической устойчивости (см. определение 4.1.2 [14]). Отметим еще, что в силу (0.5) первый метод Ляпунова здесь тоже не годится.

Статья кроме введения содержит две части и список литературы, который, как было отмечено выше, не претендует на полноту, а лишь отражает вкусы и пристрастия авторов. В первой части делается описание фазовых пространств задачи (0.1) – (0.3) в случаях $\lambda \in [0, \lambda_0)$ и $\lambda = \lambda_0$. Во второй части модифицированный нами второй метод Ляпунова применяется к исследованию устойчивости задачи (0.1) – (0.3).

1. Фазовое пространство

Введем в рассмотрение множество $\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \ldots g_j, \ldots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$, которое станет гильбертовым пространством, если ввести скалярное произведение $< \cdot, \cdot >$ и норму $\|\cdot\|_0$ следующим образом:

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx \text{ и } \|g\|^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j^2 dx.$$

Введем еще банахово пространство

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots) : u_j \in W_2^1(0, l_j), \text{ причем выполнено } (0.2)\}$$

с нормой

$$||u||^2_{\mathfrak{U}} = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u^2_{jx} + u^2_j) dx.$$

(Его естественная гильбертова структура нам не нужна). В силу теорем вложения Соболева пространства $W_2^1(0, l_j)$ состоят из абсолютно непрерывных функций, поэтому пространство $\mathfrak{U}$ корректно определено, а в силу теоремы Кондрашева – Реллиха оно компактно вложено в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. По теореме Ф. Рисса отождествим пространство $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное пространство к $\mathfrak{U}$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пространство $\mathfrak{F}$ – банахово, причем имеют место непрерывные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathfrak{F}$. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+, \lambda \in [0, \lambda_0]$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Построим операторы

$$< Lu, v >= \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + (\lambda_0 - \lambda) u_j v_j) dx, \quad < Mu, v >= -\alpha < u, v >,$$

где $u, v \in \mathfrak{U}$. Заметим, что операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, то есть линейны и непрерывны.

Лемма 1.

(i) если $\lambda \in [0, \lambda_0)$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$, то существуют операторы $L^{-1}, M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})$;

(ii) если $\lambda = \lambda_0$, то $\ker L = \operatorname{span}\{\varphi\}$, где

$$\varphi = \left(\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j l_j \right)^{-1/2} (1, 1, \ldots, 1, \ldots).$$

Доказательство. Заметим, что (i) вытекает из [14], а (ii) справедливо в силу неравенства

$$< Lu, u >= \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u^2_{jx} dx \geq 0.$$

□

Лемма 2. *При любых $\lambda_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [0, \lambda_0)$ оператор M $(L, 0)$-ограничен.*

Доказательство есть, например, в [1].

Итак, редукция задачи (0.1) – (0.3) к уравнению (0.4) закончена. Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ назовем *решением* уравнения (0.4), если она удовлетворяет этому уравнению. Решение $u = u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнения (0.4) назовем *решением задачи Коши*, если при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$

$$u(0) = u_0. \tag{1.1}$$

Определение 1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством уравнения (0.4)*, если

(i) любое решение $u = u(t)$ лежит в $\mathfrak{P}$ поточечно, т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$, $t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (0.4), (1.1).

Теорема 1. *(i) При всех $\lambda_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [0, \lambda_0)$ фазовым пространством $\mathfrak{P}$ задачи (0.1) – (0.3) служит пространство $\mathfrak{U}$.*

(ii) При всех $\lambda_0, \alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda = \lambda_0$ фазовым пространством $\mathfrak{P}$ задачи (0.1) – (0.3) служит подпространство $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} :< u, \varphi >= 0\}$.

Доказательство. Следуя [6], гл. 4, построим проектор

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\mu L - M)^{-1}L d\mu,$$

где замкнутый контур $\gamma \in \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M. Очевидно,

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если } \lambda \in [0, \lambda_0); \\ \mathbb{I} - <\cdot, \varphi>, \text{ если } \lambda = \lambda_0. \end{cases}$$

□

2. Устойчивость

Введем в рассмотрение нормированное пространство $\mathfrak{V}$ с нормой $|||\cdot|||$.

Говорят, что на $\mathfrak{V}$ задан *поток*, если существует отображение $S : \mathbb{R} \times \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ такое, что для любого $v \in \mathfrak{V}$ и всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполняются соотношения

(i) $S = S(t, v) \in \mathfrak{V}$, при всех $t \in \mathbb{R}$; $\quad S(0, v) = v$;

(ii) $S(t + s, v) = S(t, S(s, v))$ при всех $s, t \in \mathbb{R}$.

Точка $v \in \mathfrak{V}$ такая, что

(iii) $S(t, v) = v, t \in \mathbb{R}$,

называется *стационарной точкой* потока S.

Определение 2. Стационарная точка $v \in \mathfrak{V}$ потока S называется

(i) *устойчивой (по Ляпунову)*, если для любой окрестности $\mathfrak{O}_v \subset \mathfrak{V}$ точки v существует (возможно, другая) окрестность $\mathfrak{O}'_v$ той же точки, что $S(t, w) \in \mathfrak{O}'_v$ при всех $w \in \mathfrak{O}_v$ и $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) *асимптотически устойчивой (по Ляпунову)*, если она устойчива и для любой точки w из некоторой окрестности $\mathfrak{O}_v$ выполняется $S(t, w) \to v$ при $t \to +\infty$.

Определение 3. Функционал $V \in C(\mathfrak{U}; \mathbb{R})$ называется *функцией Ляпунова* потока S, если

$$\dot{V}(v) = \overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{1}{t}\left(V(S(t, v)) - V(v)\right) \leq 0$$

для всех $v \in \mathfrak{V}$.

В дальнейшем стационарной точкой потока S на $\mathfrak{V}$ будем считать точку нуль. Введем в рассмотрение строго возрастающие функции и непрерывные функции $\varphi_k : \{0\} \cup \mathbb{R}_+ \to \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ такие, что $\varphi_k(0) = 0, \quad k = 1, 2.$

Теорема 2. *Если для потока S существует функция Ляпунова V такая, что $V(0) = 0$ и $V(v) \geq \varphi_1(|||v|||)$ при всех $v \in \mathfrak{V}$, то точка нуль устойчива. Если вдобавок $\dot{V}(v) \leq -\varphi_2(|||v|||)$ при всех $v \in \mathfrak{V}$, то точка нуль асимптотически устойчива.*

Доказательство. Итак, для всякого $r \in \mathbb{R}_+$ положим $\mathfrak{O}_r = \{v \in \mathfrak{V} : V(v) < r\}$. Каждое из множеств $\mathfrak{O}_r$ является окрестностью точки v, причем $V \in \mathfrak{O}_r \Rightarrow V(S(t, v)) \leq V(v) < r$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Если $V(v) \geq \varphi(|||v|||)$, то для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ существует такое $r = \varphi(\varepsilon) > 0$, что $V(v) < r \Rightarrow |||v||| < \varepsilon$. В силу непрерывности V существует $\delta \in \mathbb{R}_+$ такое, что при $|||v||| < \delta$ будет $v \in \mathfrak{O}_r$, а значит, и $S(t, v) \in \mathfrak{O}_r$, так что $\|S(t, v)\| \leq \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть точка $v \in \mathfrak{O}_v$, тогда $V(S(t, v))$ – невозрастающая неотрицательная функция $t \in \mathbb{R}_+$. Пусть $l = \lim\limits_{t\to+\infty} V(S(t, v))$, и $l > 0$, тогда $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \|S(t, v)\| > 0$, значит, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \dot{V}(S(t, v)) \leq -m$

для некоторого $m \in \mathbb{R}_+$, что противоречит неотрицательности $V(S(t,v))$. Таким образом, $V(S(t,v))$ и $\|S(t,v)\|$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$. $\square$

Теперь применим теорему 2 к исследованию устойчивости задачи (0.1) – (0.3). Фазовым пространством $\mathfrak{P}$ задачи (0.1) – (0.3) в обоих случаях ($\lambda \in [0, \lambda_0)$ и $\lambda = \lambda_0$) является банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{U}}$, индуцированной из $\mathfrak{U}$. Введя в $\mathfrak{P}$ норму $\|\cdot\|$ из $\mathbf{L_2(G)}$, превратим его в нормированное пространство (которое, очевидно, совпадет с $\mathbf{L_2(G)}$ в случае $\lambda \in [0, \lambda_0)$ при его естественном понимании). В силу результатов [6], гл. 4 на $\mathfrak{P}$ существует поток S, определяемый формулой

$$S(t,u) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L u e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

где замкнутый контур γ ограничивает L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M. Очевидно, точка нуль является стационарной точкой этого потока.

Теперь рассмотрим оба случая по отдельности. Пусть сначала $\lambda \in [0; \lambda_0)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$. В этом случае функцию Ляпунова определим следующим образом:

$$V(u) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + (\lambda - \lambda_0) u_j^2) dx.$$

Очевидно, $V(u) \geq (\lambda - \lambda_0)\|u\|^2$ и $V(0) = 0$, поэтому в силу теоремы 2 точка нуль устойчива по Ляпунову. Далее, умножив (0.1) скалярно в $\mathbf{L_2(G)}$ на u, получим

$$\dot{V}(u) = -2\alpha \|u\|^2, \tag{2.1}$$

что в силу теоремы 2 означает асимптотическую устойчивость точки нуль.

Рассмотрим теперь случай $\lambda = \lambda_0$. В этом случае фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$, в котором, согласно принципу Куранта, можно ввести норму

$$\|u\|_1^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j^2 dx,$$

эквивалентную индуцированной из $\mathfrak{U}$ норме $\|\cdot\|_{\mathfrak{U}}$. Причем в силу теорем вложения Соболева $\|u\|_1 \geq c\|u\|$, где $c \in \mathbb{R}_+$ — константа вложения. Задав функцию Ляпунова $V(u) = \|u\|_1^2$, в силу теоремы 2 получаем устойчивость точки нуль. Далее, уравнения (0.1) в силу линейности на $\mathfrak{U}^1$ выглядят точно таким же образом. Поэтому поступая аналогично предыдущему, получаем справедливость (2.1). Итак, и в этом случае точка нуль является асимптотически устойчивой. Таким образом, доказана

Теорема 3. *При всех $\alpha, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [0, \lambda_0]$ стационарная точка нуль задачи (0.1) – (0.3) является асимптотически устойчивой.*

Замечание 1. В реальной ситуации число $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ можно трактовать как критическую нагрузку на конструкцию из двутавровых балок. Теорема 3 показывает, что при всех нагрузках $\lambda \in \mathbb{R}_+$, не превышающих критическую, стационарная точка нуль не теряет асимптотической устойчивости. В дальнейшем авторы в численном эксперименте собираются показать потерю устойчивости при $\lambda > \lambda_0$.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить профессора Г.А. Свиридюка за ценные советы в процессе подготовки статьи.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №1. – С. 126 – 131.
2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N. Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
4. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
5. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
6. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov – Utrecht; Boston: VSP, 2003.
7. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технологии. – 2003. – Т. 8, №4. – С. 45 – 54.
8. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185 – 1192.
9. Келлер, А.В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 345 – 346.
10. Свиридюк, Г. А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. ВУЗ. Математика. 1997. №5. С. 60-68.
11. Китаева, О.Г. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова / О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 2005. С. 160 – 166.
12. Загребина, С.А. О существовании и устойчивости решений уравнений Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. – Магнитогорск, 2005. – Вып. 8. – С. 74 – 86.
13. Загребина, С.А. Существование и устойчивость решений одного класса полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.М. Якупов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – Челябинск, 2008. – № 27(127), вып. 2. – С. 10 – 18.
14. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.

Кафедра «Уравнения математической физики»,
Южно-Уральский государственный университет
zsophya@mail.ru

Поступила в редакцию 25 февраля 2010 г.