УДК 517.9+681.2

СВОЙСТВО РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ

А.В. Келлер, Е.И. Назарова

THE REGULARIZATION PROPERTY AND THE COMPUTATIONAL SOLUTION OF THE DYNAMIC MEASURE PROBLEM

A.B. Keller, E.I. Nazarova

Рассмотрена задача восстановления динамически искаженных сигналов, разработан алгоритм численного ее решения при начальных условиях Шоуолтера – Сидорова, приведено численное решение для конкретной модели, обладающей свойством регуляризуемости

Ключевые слова: задача Шоуолтера – Сидорова, модель измерительного устройства, свойство регуляризуемости, критерий Рауса-Гурвица, численное решение

Of concern is the problem of the dynamically deformated signal recovery. We work up the computational algorithm for the solution of the Showalter – Sidorov problem, give the computational solution for the concrete model with the regularization property.

Keywords: the Showalter – Sidorov problem, the model of measuring device, the regularization property, the Rausse – Gourviz criterion, the computational solution

Введение

При измерении кратковременных процессов, длящихся от микро- до наносекунд, часто нет возможности точно измерить пикообразные изменения входного сигнала. Причиной тому является инерционность измерительного устройства. На основе теории автоматического управления А.Л. Шестаковым был предложен и развивается его учениками подход, дающий более точные решения [12]. В измерительное устройство предлагается встраивать модель датчика, генерирующего сигналы, подаваемые на вход измерительного устройства. В том случае, если измерительный сигнал обладает свойством регуляризуемости, а модель датчика близка по своим параметрам к датчику, то при близких значениях на входе от датчика и модели датчика значения на выходе тоже будут мало различаться. Г.А. Свиридюк предложил редуцировать такого рода системы к уравнениям соболевского типа и использовать метод фазового пространства для их решения [13]. Кроме того, при изучении свойства регуляризуемости оказываются полезными результаты исследования устойчивости решений уравнений соболевского типа [6].

В данной работе мы рассмотрим модель измерительного устройства, сводящуюся к задаче Шоуолтера – Сидорова. Будем использовать методы и результаты теории вырожденных полугрупп [13]. Заметим, что данная теория уже сейчас оказалась полезной во многих случаях [3, 4, 9]. Целью данной статьи является разработка алгоритма численного решения, позволяющего находить динанамически искаженные системы, в которых измерительный канал обладает свойством регуляризуемости. Статья состоит из введения и четырех параграфов.

1. Задача Шоуолтера – Сидорова

В прикладных моделях, сводящихся к дифференциальным уравнениям вида

$$L\dot{u} = Mu + f \tag{1.1}$$

часто используются начальные условия Шоуолтера – Сидорова [3], [4]

$$P\left(u(o) - u_0\right) = 0. \tag{1.2}$$

В общем случае операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}), M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\ker L \neq 0$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, P – проектор. В [13] показано, что задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение

$$u\left(t\right) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}\left(I - Q\right) f^{(q)}\left(t\right) + U^t u_0 + \int\limits_0^t R^{t-s} Q f\left(s\right) ds, \tag{1.3}$$

где

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\mu^L\left(M\right) e^{\mu t} d\mu,\ R^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \left(\mu L - M\right)^{-1} e^{\mu t} d\mu,\ Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L_\mu^L\left(M\right) d\mu,$$

контур $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$, H – нильпотентная матрица со степенью нильпотентности p.

Если L и M – квадратные матрицы порядка n, при этом $\det L = 0$, то в качестве примеров задачи (1.1), (1.2) можно назвать экономические модели [5], задачи оптимального управления системами леонтьевского типа [7], задачи динамического измерения как задачи оптимального управления [11].

Теорема 1. *Пусть пучок $\mu L - M$ регулярен, $p \in \{0\} \cup N$ – порядок полюса L-резольвенты матрицы M. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1} L\right]^{k(p+1)} = U^t,\ \lim_{k\to\infty}\left[kL_k^L\left(M\right)\right]^{p+1} = Q,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1} L\right]^{k(p+1)-1}\left(L - \frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1} = R^t.$$

Теорема 2. *Пусть пучок $\mu L - M$ регулярен, $p \in \{0\} \cup N$ – порядок полюса L -резольвенты матрицы M в точке ∞. Тогда существует константа $C = C\left(L, M, T\right) \in \mathfrak{R}_+$ такая, что $\|u(t) - u_k(t)\| \leq \frac{C}{k}$ при всех $t \in [0;T]$, $u_0 \in \mathfrak{R}^n$ и $f \in C^{p+1}\left((0;T);\mathfrak{R}^n\right) \cap C^p\left([0;T];\mathfrak{R}^n\right)$.*

Доказательство. Доказательство теоремы основывается на оценках

$$\left\|\left[kL_k^L\left(M\right)\right]^{p+1} - Q\right\| \leq \sum_{k=2}^{p+1} \frac{KC_{p+1}^k}{(p+1)\mu^{k-1}\beta^{p+1-k}}\left\|R_\beta^L(M)\right\|,$$

$$\left\|U_k^t U^t\right\| \leq \frac{(p+1)K^3 t^2}{2\beta^{p-1}k}\left\|\left(\left(\beta L - M\right)^{-1} M\right)^2\right\|$$

взятых из [13], гл. 2, где $\beta \in \mathfrak{R}_+$. □

Подчеркнем, что использование начального условия Шоуолтера – Сидорова особо значимо при численном решении указанных выше задач, т.к. позволяет проводить расчеты при больших n. Алгоритм численного решения задачи (1.1), (1.2) разработан в [5].

2. Задача динамического измерения как задача Шоуолтера – Сидорова

Пусть модернизированное измерительное устройство представлено системой уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ y = Cx, \tag{2.1}$$

где $x = x(t)$ – вектор-функция состояний измерительного устройства, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $u = u(t)$, $y = y(t)$ – вектор функции входа и выхода сигнала соответственно, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_l)$, а матрицы измерительного устройства A, модели датчика B и выхода C соответственно размерности $[n \times n]$, $[n \times m]$, $[n \times l]$.

Редуцируем систему уравнений (2.1) к системе уравнений

$$L\dot{z} = Mz + Du, \tag{2.2}$$

$$P(z(0) - z_0) = 0, \tag{2.3}$$

где $z = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_l)$, проектор $P = \left[(\alpha L - M)^{-1} L\right]^p$ следующим образом

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & -\mathbb{I}_l \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} B & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_l \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Поскольку L-спектр матрицы M совпадает со спектром матрицы A, то система (2.1) обладает свойством регуляризуемости, при условии, что спектр матрицы M лежит в левой полуплоскости [10]. При рассмотрении вопроса о расположении точек спектра матрицы M для решения задачи (2.2), (2.3) будем использовать критерий Рауса – Гурвица [2, 8]. Он устанавливает необходимые и достаточные условия расположения корней многочлена в левой полуплоскости на основе вычисления определителей Гурвица, составленных из коэффициентов этого многочлена

$$\det(\mu L - M) = a_q \mu^q + a_{q-1}\mu^{q-1} + ... + a_1 \mu + a_0, \tag{2.5}$$

где $q = n - p$, p – порядок полюса L-резольвенты матрицы M в точке ∞, $a_l = (-1)^{n-l} \sum\limits_{r=1}^{C_n^{n-l}} \Delta_{n-l}^r \ \left(l = \overline{0, n}\right)$, Δ_{n-l}^r – определители, получаемые из определителя матрицы L путем замены $n-l$ столбцов соответствующими столбцами матрицы M, r – порядковый номер определителя, $q \le \mathrm{rank} L$.

Теорема 3. (Обобщенный критерий Рауса – Гурвица) *Для того, чтобы у вещественного многочлена (2.5) все корни имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$a_q\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 > 0, \qquad a_q\Delta_3 > 0, \qquad \Delta_4 > 0, \ \ ..., \ \left.\begin{matrix} a_q\Delta_q > 0, & \textit{если} \ \ q \ \ \textit{нечетно}, \\ \Delta_q > 0, & \textit{если} \ \ q \ \ \textit{четно}, \end{matrix}\right\}$$

где определители имеют вид

$$\Delta_1 = a_{q-1}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{q-1} & a_{q-3} \\ a_q & a_{q-2} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{q-1} & a_{q-3} & a_{q-5} \\ a_q & a_{q-2} & a_{q-4} \\ 0 & a_{q-1} & a_{q-3} \end{vmatrix}, \qquad ...$$

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} a_{q-1} & a_{q-3} & a_{q-5} & \dots & 0 \\ a_q & a_{q-2} & a_{q-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{q-1} & a_{q-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_q & a_{q-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix},$$

и $a_{q-j} = 0$ *при* $q - j < 0$ *для всех* j.

Доказательство. Доказательство основано на Теореме Рауса [2], при условии, что количество корней вещественного многочлена, лежащих в правой полуплоскости, должно быть равно нулю, а значит, и число перемен знака в первом столбце схемы Рауса также будет равно нулю. □

При выполнении условий критерия Рауса – Гурвица система (2.2) имеет единственное решение задачи (2.3)

$$z(t, z_0) = Z^t z_0 + \int\limits_0^t R^{t-s} Q D u(s)\, ds, \tag{2.6}$$

где $Z^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t}\, d\mu$, $R^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t}\, d\mu$, $Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma L(\mu L - M)^{-1}\, d\mu$, $\gamma = \{|\mu| = r\}$, $r > \max\{|\mu|_1, |\mu|_2, ..., |\mu|_q\}$.

Поскольку $(\mathbb{I} - Q)D = \mathbb{O}$, то в формуле (2.6) отсутствует первое слагаемое из формулы (1.3).

3. Алгоритм численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) где L и M – квадратные матрицы порядка n, причем $\det L = 0$, матрица M – L-регулярна ($\exists \mu \in \mathbb{C} : \det(\mu L - M) = 0$), $u : [0, T) \to \mathbb{R}^n$ f – некоторая вектор-функция, проектор $P = \left[(\alpha L - M)^{-1} L\right]^p$.

В [5] показано, что численное решение задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$u_k(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} (I - Q) f^{(q)}(t) + U^t u_0 + \int_0^t R^{t-s} Q f(s)\, ds, \tag{3.1}$$

где

$$U_k^t = \left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M\right)^{-1} L\right]^{k(p+1)}, \quad Q_k = \left[k L_k^L(M)\right]^{p+1}, \tag{3.2}$$

$$R_k^t = \left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M\right)^{-1} L\right]^{k(p+1)-1} \cdot \left(L - \frac{t}{k(p+1)} M\right)^{-1}. \tag{3.3}$$

На первом этапе алгоритма находим числа $\alpha \in R$ и $p \in \{0\} \cup N$

$$|\alpha| > \max\left\{1, |a_q|^{-1} \left(\sum_{l=0}^{q} |a_l|\right)\right\}, \; p = n - q,$$

где $a_l = (-1)^{n-l} \sum\limits_{r=1}^{C_n^{n-l}} \Delta_{n-l}^r \; \left(l = \overline{0, n}\right)$, Δ_{n-l}^r – определители, получаемые из определителя матрицы L путем замены $n - l$ столбцов соответствующими столбцами матрицы M, r – порядковый номер определителя, $q \leq \mathrm{rank} L$.

Приближенные значения по формулам (3.1) – (3.2) можно считать уже при

$$k_1 > \frac{1}{|a|} \sum_{l=q+1}^{n} |a_l| + 1,$$

но при рассмотрении многочлена

$$\det(\mu(p+1)L - tM) = a_q t^q \mu^q (p+1)^q + a_{q-1} t^{q+1} \mu^{q-1} (p+1)^{q-1} + ... + a_1 t^{n-1} \mu + t^n a_0,$$

где $a_q \neq 0$, $q \leq \mathrm{rank} L$, возникает еще условие на k

$$k_2 > \begin{cases} \frac{1}{|a_q|(n-q)^{n-q}} \sum\limits_{l=0}^{q} |a_l| (n-q+1)^{n-l} + 1, & |t| < 1, \\ \frac{1}{|a_q||t|^q (n-q)^{n-q}} \sum\limits_{l=0}^{q} |a_l| (n-q+1)^{n-l} |t|^l + 1, & |t| > 1. \end{cases}$$

Для приближенных вычислений, когда мы не сможем оказаться вблизи точки L-спектра оператора M, выберем

$$k = \max\{k_1; k_2\}.$$

На втором шаге определяем значения U_k^t, Q_k и R_k^t и находим $u_k(t)$ по формулам (3.1) – (3.3), причем, т.к. существует M^{-1}, то справедливо тождество

$$H^k M_0^{-1}(I-Q) = (M^{-1}(I-Q)L)^k M_0^{-1}(I-Q).$$

4. Пример решения задачи динамического измерения

В качестве примера рассмотрим модель модернизированного устройства, приведенную в [1]. В системе (2.1)

$$A = \begin{pmatrix} -44 & 0 \\ -117 & -16 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -0,594 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.4) получим матрицы L, M и D:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -117 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -0,594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда система (2.2) примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{z} = \begin{pmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -117 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -0,594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u, \tag{4.1}$$

где $z = (x_1(t), x_2(t), y(t))$, $z_0 = (0,0,0)$. Проверим, обладает ли система (4.1) свойством регуляризуемости. Точки L-спектра матрицы M являются корнями многочлена (2.5)

$$\det(\mu L - M) = \mu^2 + 60\mu + 704 = 0,$$

коэффициенты которого определили следующим образом

$$a_2 = (-1) \left(\begin{vmatrix} -44 & 0 & 0 \\ -117 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right) = 1,$$

$$a_1 = (-1)^2\left(\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -16 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-44 & 0 & 0\\ -117 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-44 & 0 & 0\\ -117 & -16 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\right) = 60,$$

$$a_0 = (-1)^3 \det M = 704.$$

По обобщенному критерию Рауса-Гурвица (при $q = 2$) получим

$$a_2\Delta_1 = 60, \quad \begin{vmatrix}a_1 & 0\\ a_2 & a_0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}60 & 0\\ 1 & 704\end{vmatrix} = 42240.$$

Условия **Теоремы 1** выполняются, значит, полюса передаточной функции системы $\dot{x} = Ax$ лежат в левой полуплоскости, т.е. система устойчива по отношению к помехам.

В ходе точного вычисления $z(t)$ по формулам, приведенным в первом разделе данной статьи, было получено точное решение задачи (2.3):

$$x_1(t) = -A\left(\frac{44}{44^2+4\omega^2}\sin^2\omega t - \frac{1}{44^2+4\omega^2}\sin 2\omega t + \frac{1-e^{-44t}}{88} - \frac{22\left(1-e^{-44t}\right)}{44^2+4\omega^2}\right),$$

$$x_2(t) = \frac{117A}{28}\left(\frac{16}{16^2+4\omega^2}\sin^2\omega t - \frac{1}{16^2+4\omega^2}\sin 2\omega t + \frac{1-e^{-16t}}{32} - \frac{8\left(1-e^{-16t}\right)}{16^2+4\omega^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{44}{44^2+4\omega^2}\sin^2\omega t + \frac{1}{44^2+4\omega^2}\sin 2\omega t - \frac{1-e^{-44t}}{88} + \frac{22\left(1-e^{-44t}\right)}{44^2+4\omega^2}\right),$$

$$y(t) = \frac{117A}{28}\left(\frac{16}{16^2+4\omega^2}\sin^2\omega t - \frac{1}{16^2+4\omega^2}\sin 2\omega t + \frac{1-e^{-16t}}{32} - \frac{8\left(1-e^{-16t}\right)}{16^2+4\omega^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{44}{44^2+4\omega^2}\sin^2\omega t + \frac{1}{44^2+4\omega^2}\sin 2\omega t - \frac{1-e^{-44t}}{88} + \frac{22\left(1-e^{-44t}\right)}{44^2+4\omega^2}\right).$$

Поскольку наблюдения показывают, что вектор-функция выхода при начальных значениях t имеет скачок, то было положено $-0,594u(t) = A\sin^2\omega t$. По алгоритму, разработанному во втором разделе статьи, получено приближенное решение задачи (2.3). При расчете взяты значения параметров $A = 15$, $\omega = \pi$.

Таблица 1

Точное и приближенное решение задачи динамического измерения

	Точное решение			Приближенное решение		
t	x_1	x_2	y	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0	0	0	0
1/12	–0,013772	0,029317	0,029317	–0,013771	0,029312	0,029312
1/6	–0,066270	0,237976	0,237976	–0,066267	0,237938	0,237938
1/4	–0,14660	0,67492	0,67492	–0,146596	0,674819	0,674819
1/3	–0,233320	1,253870	1,253870	–0,233314	1,253692	1,253692
5/12	–0,303195	1,827893	1,827893	–0,303189	1,827654	1,827654
1/2	–0,337503	2,245344	2,245344	–0,337497	2,245077	2,245508
7/12	–0,327050	2,394938	2,394938	–0,327046	2,394683	2,394683
2/3	–0,274637	2,236741	2,236741	–0,274635	2,236538	2,236538
3/4	–0,194309	1,813182	1,813182	–0,194309	1,813055	1,813055
5/6	–0,107589	1,237764	1,237764	–0,107590	1,237718	1,237718
11/12	–0,037714	0,664672	0,664672	–0,037715	0,664689	0,664689
1	–0,003406	0,247466	0,247466	–0,003407	0,247513	0,247513

Таким образом, разработанный алгоритм позволяет численно находить динамически искаженные сигналы с достаточной степенью точности: расхождения в точном и приближенном решении порядка не более 10^{-3}.

Литература

1. Бизяев, М.Н. Динамические модели и алгоритмы восстановления динамически искаженных сигналов измерительных систем в скользящем режиме: дис. ... канд. тех. наук / М.Н. Бизяев. – Челябинск: ЮУрГУ, 2004.
2. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 4-е издание. – М.: Наука, 1988.
3. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22 – 28.
4. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 3. – С. 45 – 54.
5. Келлер, А.В. Алгоритм численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова для систем леонтьевского типа / А.В. Келлер // Методы оптимизации и их приложения: труды XIV Байкальской школы-семинара, Иркутск – Северобайкальск. – 2008. – С. 343 – 350.
6. Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. вузов. Математика – 1997. – № 5(420) – С. 60 – 68.
7. Келлер, А.В. Об оптимальном управлении системами леонтьеского типа / А.В. Келлер // Оптимизация, управление, интеллект. – 2006. – № 1(12) – С. 82 – 89.
8. Келлер, А.В. Об устойчивости решений систем леоньевского типа / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2010: тез. докл. – Воронеж, 2010. – С. 78 – 79.
9. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185 – 1192.
10. Шестаков, А.Л. Свойство регуляризуемости измерительного устройства и нахождение динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – (В настоящем номере).
11. Шестаков, А.Л. Динамические измерение как задача оптимального управления / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Е.В. Захарова // Обозрение прикл. и пром. математики. – 2009. – Т. 16, № 4. – С. 732 – 733.
12. Шестаков, А.Л. Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика / А.Л. Шестаков // Метрология. – 1987. – № 2. – С. 26 – 34.
13. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semi-groups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.

Кафедра «Общеобразовательные дисциплины»
Южно-Уральский государственный университет
alevtinak@inbox.ru

Поступила в редакцию 10 февраля 2010 г.