УДК 519.677+517.544.8

АЛГОРИТМ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЕГО ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В.М. Адуков, А.А. Патрушев

ALGORITHM OF EXACT SOLUTION OF GENERALIZED FOUR-ELEMENT RIEMANN – HILBERT BOUNDARY PROBLEM WITH RATIONAL COEFFICIENTS AND ITS PROGRAMM REALIZATION

V.M. Adukov, A.A. Patrushev

Предложен алгоритм точного решения четырехэлементной задачи линейного сопряжения с рациональными коэффициентами на единичной окружности. Алгоритм основан на сведении задачи к матричной краевой задаче Римана. Создана процедура, реализующая этот алгоритм в среде Maple. Используются вычисления в поле $\mathbb{Q}(i)$.

Ключевые слова: задача Маркушевича, четырехэлементная задача линейного сопряжения, матричная краевая задача Римана, явные и точные решения

An algorithm for an exact solution of the generalized four-element Riemann – Hilbert boundary problem with rational coefficients on unit cirle was suggested. An algorithm is based on a reduction of the problem to the matrix Riemann boundary problem. The Maple procedure for a realization of the algorithm is made. Calculations in the field $\mathbb{Q}(i)$ are used.

Keywords: Markushevich boundary problem, generalized four-element Riemann – Hilbert boundary problem, explicit and exact solutions

Введение

Пусть Γ – единичная окружность $|z| = 1$, D_+ – круг $|z| < 1$, D_- – дополнение замкнутого круга $|z| \leq 1$ в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$. Рассмотрим следующую четырехэлементную задачу линейного сопряжения аналитических функций [1]: найти функции $\varphi_+(z)$, $\varphi_-(z)$, $\varphi_-(\infty) = 0$, аналитические соответственно в областях D_+ и D_-, непрерывно продолжимые на контур Γ, граничные значения которых на Γ удовлетворяют условию сопряжения

$$a(t)\varphi_+(t) + b(t)\overline{\varphi_+(t)} = c(t)\varphi_-(t) + d(t)\overline{\varphi_-(t)} + f(t). \qquad (1)$$

Здесь коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ и свободный член $f(t)$ – заданные на контуре Γ функции класса Гельдера; $\overline{\varphi(t)}$ – функция, комплексно сопряженная с $\varphi(t)$. Если $a(t) \equiv 1$,

$b(t) \equiv 0$, то получаем трехэлементную задачу, которую часто называют задачей Маркушевича. Задача, союзная к задаче Маркушевича, также имеет вид (1) при $c(t) \equiv 1$, $d(t) \equiv 0$. Классическая двухэлементная задача Римана является частным случаем задачи (1), если положить $a(t) \equiv 1$, $b(t) \equiv 0$, $d(t) \equiv 0$. Однако, далее мы считаем, что в граничном условии (1) обязательно содержится операция комплексного сопряжения, т.е. $b(t) \not\equiv 0$ или $d(t) \not\equiv 0$. В этом случае множество всех решений однородной четырехэлементной задачи является линейным простанством над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Частные случаи сформулированной выше задачи имеют многочисленные приложения в теории фильтрации, электродинамике, теории оболочек [1] – [3].

Известно [4], что задача (1) нетерова, если

$$\delta(t) = \overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)} \neq 0$$

на контуре Γ. При этом ее индекс $\varkappa$ совпадает с удвоенным индексом Коши функции $\delta(t)$:

$$\varkappa = 2\ \mathrm{ind}_\Gamma \delta(\mathrm{t}) = \frac{1}{\pi}\left[\arg \delta(\mathrm{t})\right]_\Gamma .$$

Для нетеровой задачи (1) пространство решений однородной задачи конечномерно, а неоднородная задача разрешима, если функция $f(t)$ удовлетворяет конечному числу действительных условий разрешимости. Если l – число линейно независимых решений однородной задачи, а p – число линейно независимых условий разрешимости, то $l - p = \varkappa$.

Полной теории задачи (1), как и задачи Маркушевича, в настоящее время нет. Характеристики l и p вычислены только в некоторых частных случаях, а решение в явном виде построено еще реже. Эффективный метод решения задачи Маркушевича, основанный на приведении ее к уравнению Фредгольма, разработан в статьях [5, 6].

Поскольку задача (1), вообще говоря, неустойчива, и нет эффективно проверяемых критериев ее устойчивости, то не разработаны и приближенные методы ее решения. Более того, даже если в каких-то частных случаях построен явный или эффективный алгоритм решения задачи (1), то это не гарантирует, в силу неустойчивости, что его можно использовать в вычислительных целях.

Задача (1) на окружности может быть сведена к матричной задаче Римана для двумерного вектора, а числа l и p выражаются через частные индексы матричного коэффициента этой задачи [1, 7]. Но теория матричной задачи Римана испытывает точно такие же трудности, и поэтому применить ее методы к нахождению явного решения задачи (1) до сих пор удавалось только в вырожденных случаях, когда $|a(t)| = |b(t)|$ или $|c(t)| = |d(t)|$.

Если коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ – рациональные функции, то элементы матричного коэффициента соответствующей задачи Римана также будут рациональными функциями. Известно [4], что тогда задача Римана может быть решена эффективно, однако этот алгоритм решения вряд ли может быть реализован программно. В [8, 9] в более общем случае мероморфного коэффициента задачи Римана было получено ее явное решение, включающее и явное вычисление частных индексов средствами линейной алгебры [8, 9]. Была также найдена причина неустойчивости матричной задачи Римана в данной ситуации. Оказалось, что она обусловлена неустойчивостью вычислительных процедур нахождения ранга матриц и решения систем линейных однородных алгебраических уравнений. Это позволило довольно успешно бороться с неустойчивостью задачи Римана. В работе [10] в условиях, когда возможны точные вычисления в рациональной арифметике, алгоритм построения этого явного решения был реализован программно в среде Maple [10]. Кроме того, вычислительные эксперименты, проведенные в [10], показали, что использование сингулярного разложения матриц позволяет преодолеть неустойчивость и в случае приближенных вычислений.

Целью данной работы является применение этих результатов для разработки алгоритма нахождения точного решения четырехэлементной задачи Маркушевича. Под *точным* *решением* данной задачи мы понимаем ее явное решение, которое использует конечное число операций точной арифметики, например, арифметики мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(i)$.

Важность такого решения несомненна ввиду неустойчивости задачи. Разработанный алгоритм реализован в системе компьютерной математики Maple в виде процедуры ExactMarkushevich.

Необходимость проводить вычисления в рациональной арифметике налагает довольно обременительные условия на рациональные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $f(t)$. Мы будем считать, что:

а) коэффициенты при степенях t в этих функциях принадлежат полю $\mathbb{Q}(i)$,

б) нули функции $\delta(t) = \overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)}$ и полюсы $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $f(t)$, лежащие в круге D_+, – также числа из $\mathbb{Q}(i)$.

В некоторых случаях, например, для классической трехэлементной задачи Маркушевича, эти требования могут быть ослаблены. Условие рациональности функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $f(t)$ не являются необходимым условием для реализации предложенного алгоритма, а вызваны неразработанностью программного обеспечения комплексного анализа в системах компьютерной математики. Возможно, это требование также в дальнейшем удастся ослабить.

1. Алгоритм точного решения

Перейдем к построению укрупненного алгоритма нахождения точного решения четырехэлементной задачи Маркушевича.

1 шаг. Сведение задачи к матричной задаче Римана [1, 7].

Решение $\varphi_+(z)$, $\varphi_-(z)$ задачи (1) мы будем рассматривать как кусочно аналитическую функцию

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \varphi_+(z), & z \in D_+, \\ \varphi_-(z), & z \in D_-, \end{cases}$$

заданную на $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и исчезающую на бесконечности. Окружность Γ является для нее линией разрыва. Функции $\varphi_\pm(z)$, аналитические в областях $D_\pm$, продолжим с помощью симметрии $z \to \frac{1}{\bar{z}}$ относительно окружности Γ в области $D_\mp$, определив аналитические в $D_\mp$ функции $\overline{\varphi_\pm\left(\bar{z}^{-1}\right)}$. Зададим кусочно аналитическую функцию

$$\Phi_2(z) = z^{-1}\overline{\Phi_1\left(\bar{z}^{-1}\right)} = \begin{cases} z^{-1}\overline{\varphi_-\left(\bar{z}^{-1}\right)}, & z \in D_+, \\ z^{-1}\overline{\varphi_+\left(\bar{z}^{-1}\right)}, & z \in D_-. \end{cases}$$

Множитель z^{-1} введен здесь для того, чтобы выполнялось условие $\Phi_2(\infty) = 0$. Для краткости обозначим $\Phi_1^*(z) = z^{-1}\overline{\Phi_1\left(\bar{z}^{-1}\right)}$. Ясно, что $\Phi_1(z) = \Phi_2^*(z)$.

Функция $\Phi_2(z)$ непрерывно продолжается на контур Γ из областей $D_\pm$, и для ее граничных значений $\Phi_2^\pm(t)$ справедливо

$$\Phi_2^+(t) = \overline{t\varphi_-(t)}, \quad \Phi_2^-(t) = \overline{t\varphi_+(t)}.$$

Присоединим к уравнению (1) уравнение, полученное применением к (1) операции комплексного сопряжения. Полученная система для функций $\Phi_1^\pm(t), \Phi_2^\pm(t)$ может быть записана в виде матричной задачи Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + F(t), \tag{2}$$

где $\Phi(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \end{pmatrix}$ – кусочно аналитический вектор, имеющий граничные значения $\Phi^{\pm}(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1^{\pm}(t) \\ \Phi_2^{\pm}(t) \end{pmatrix}$,

$$G(t) = \frac{1}{\overline{\delta(t)}} \begin{pmatrix} |c(t)|^2 - |d(t)|^2 & t[\overline{a(t)}d(t) - \overline{c(t)}b(t)] \\ -\dfrac{a(t)\overline{d(t)} - \overline{b(t)}c(t)}{t} & |a(t)|^2 - |b(t)|^2 \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \frac{1}{\overline{\delta(t)}} \begin{pmatrix} \overline{c(t)}f(t) - d(t)\overline{f(t)} \\ \dfrac{\overline{b(t)}f(t) - \overline{f(t)}a(t)}{t} \end{pmatrix}.$$

Для кусочно аналитического вектора $\Phi(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \end{pmatrix}$ обозначим $\Phi^*(z) = \begin{pmatrix} \Phi_2^*(z) \\ \Phi_1^*(z) \end{pmatrix}$. Если $\Phi(z) = \Phi^*(z)$, то вектор $\Phi(z)$ будем называть *симметричным.* Таким образом, каждое решение $\Phi_1(z)$ задачи (1) порождает симметричное решение матричной задачи Римана (2).

Легко проверить, что матричный коэффициент $G(t)$ удовлетворяет условию

$$G(t)J\overline{G(t)}J = I, \tag{3}$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, I – единичная матрица второго порядка, а свободный член $F(t)$ – такой, что

$$G(t)J\overline{F(t)} + tF(t) = 0. \tag{4}$$

Эти два условия гарантируют существование симметричных решений задачи (2) в случае, когда эта задача разрешима. В самом деле, если $\Phi(z)$ – произвольное решение (2), то при выполнении условий (3) – (4) вектор $\Phi^*(z)$ – также решение (2), и тогда $\dfrac{1}{2}\left[\Phi(z) + \Phi^*(z)\right]$ – симметричное решение.

Ясно, что для любого симметричного решения $\Phi(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_1^*(z) \end{pmatrix}$ задачи (2) функция $\Phi_1(z)$ будет решением задачи (1).

Итак, четырехэлементная задача (1) эквивалентна задаче отыскания всех симметричных решений матричной задачи Римана (2).

2 шаг. Построение канонической матрицы для матричной задачи Римана.

Известно (см., например, [4]), что, если найдена так называемая *каноническая матрица* $X(z)$ задачи (2), то легко проверить условия разрешимости этой задачи и построить ее общее решение. В свою очередь, нахождение $X(z)$ равносильно построению левой факторизации матричного коэффициента $G(t)$:

$$G(t) = G_+(t)d(t)G_-(t).$$

Здесь $G_{\pm}(t)$ – матрицы-функции, аналитические и обратимые в областях $D_{\pm}$, напрерывно продолжимые на контур Γ, а $d(t) = \operatorname{diag}[t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}]$ – диагональная матрица-функция, $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa = 2\ \operatorname{ind}_\Gamma \delta(\mathrm{t})$. Целые числа $\kappa_1 \geq \kappa_2$ называются *частными индексами.* Они являются важными инвариантами задачи (2), а, следовательно, и (1). Каноническая матрица $X(z)$ в терминах факторизации строится следующим образом:

$$X(z) = \begin{cases} G_+(z), & z \in D_+, \\ G_-^{-1}(z)d^{-1}(z), & z \in D_-. \end{cases}$$

Мы предполагаем, что коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ задачи (1) – рациональные функции. На единичной окружности выполняется условие $\bar{t} = \dfrac{1}{t}$. Поэтому функции, комплексно сопряженные к рациональным, также будут рациональными, и, следовательно, матричный коэффициент $G(t)$ задачи (2) – рациональная матрица-функция.

В этом случае задача факторизации может быть решена явно [8]. Алгоритм точного решения описан в работе [10]. Точное решение предполагает вычисления в рациональной арифметике. Это объясняет ограничения а), б), наложенные на $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $\delta(t)$. При данных ограничениях алгоритм реализован программно в среде Maple в виде процедуры ExactFactorization [10]. Воспользовавшись этой процедурой, мы можем построить каноническую матрицу $X(z)$, которая, очевидно, также является рациональной матрицей-функцией.

3 шаг. Построение общего решения однородной четырехэлементной задачи.

В соответствии с вышесказанным, для нахождения всех решений однородной задачи (1) требуется найти множество всех симметричных решений однородной задачи Римана (2). Легко видеть, что это множество является конечномерным пространством над полем $\mathbb{R}$, и, значит, нам необходимо построить базис $\Phi^1(z) = \begin{pmatrix}\varphi_1(z)\\ \varphi_1^*(z)\end{pmatrix}, \ldots, \Phi^l(z) = \begin{pmatrix}\varphi_l(z)\\ \varphi_l^*(z)\end{pmatrix}$ этого пространства. Тогда кусочно аналитические функции $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_l(z)$ будут образовывать базис пространства решений однородной задачи (2).

Если частные индексы $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ неположительны, то однородная задача (2), а, значит, и однородная задача (1) допускает в классе исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций только нулевое решение.

Если среди частных индексов имеются положительные, то размерность λ (над $\mathbb{C}$) пространства решений однородной задачи (2) совпадает с суммой положительных частных индексов. При этом, если $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 \le 0$, то базисом является система кусочно аналитических векторов $X^1(z), zX^1(z), \ldots, z^{\varkappa_1 - 1}X^1(z)$, а при $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$ – система $X^1(z)$, $zX^1(z), \ldots, z^{\varkappa_1-1}X^1(z), X^2(z), zX^2(z), \ldots, z^{\varkappa_2-1}X^2(z)$. Здесь $X^1(z)$, $X^2(z)$ – соответственно первый и второй столбцы канонической матрицы $X(z)$. Далее этот базис мы обозначаем через $\Psi^1(z), \ldots, \Psi^\lambda(z)$, $\lambda = \varkappa_1$ или $\lambda = \varkappa_1 + \varkappa_2$.

Условие (3) гарантирует нам, что векторы $(\Psi^1(z))^*, \ldots, (\Psi^\lambda(z))^*$ также являются решениями однородной задачи (2). Это позволяет нам построить 2λ симметричных решений этой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left[\Psi^1(z) + (\Psi^1(z))^*\right], \ldots, \frac{1}{2}\left[\Psi^\lambda(z) + (\Psi^\lambda(z))^*\right], \\ \frac{i}{2}\left[\Psi^1(z) - (\Psi^1(z))^*\right], \ldots, \frac{i}{2}\left[\Psi^\lambda(z) - (\Psi^\lambda(z))^*\right].\end{gathered} \tag{5}$$

Легко видеть, что система (5) является полной в пространстве над $\mathbb{C}$ всех решений однородной задачи (2) и полной в пространстве над $\mathbb{R}$ всех симметричных решений однородной задачи (2). Поэтому ранг над $\mathbb{C}$ системы (5) равен λ. С другой стороны, легко проверить, что линейная независимость над $\mathbb{C}$ любой системы симметричных векторов равносильна линейной независимости над $\mathbb{R}$. Поэтому ранг системы (5) над $\mathbb{R}$ также равен λ. По этой причине мы можем далее не уточнять, над каким полем рассматривается линейная независимость любой подсистемы системы (5).

Таким образом, размерность l пространства всех симметричных решений однородной задачи (2), а, значит, и пространства всех решений однородной задачи (1) совпадает с суммой λ положительных частных индексов.

Осталось выбрать базис системы (5). Из условия сопряжения $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$ следует, что линейную независимость любой подсистемы системы (5) достаточно проверять только в области D_+, т.е. для «плюс»-компонент кусочно аналитических векторов. Эти компоненты являются рациональными вектор-функциями, не имеющими полюсов в $\overline{D}_+$. Поэтому, умножив все векторы системы (5) на подходящий полином, мы сведем дело к проверке линейной независимости полиномиальных векторов. Пусть N – максимальная из степеней полиномов, входящих в преобразованную систему (5). Каждый полином из этой системы мы будем рассматривать как полином формальной степени N и поставим ему в соответствие $(N+1)$-мерный вектор, составленный из коэффициентов этого полинома. Таким образом, системе (5) мы поставим в соответствие систему, состоящую из $(2N+2)$-мерных векторов. Базис этой системы можно найти стандартыми методами линейной алгебры. В системе Maple для этих целей служит процедура Basis. Найдя номера векторов, входящих в базис, мы можем восстановить и базис системы (5). Таким образом, алгоритм нахождения базиса пространства решений однородной задачи (1) построен.

4 шаг. Построение общего решения неоднородной четырехэлементной задачи.

Чтобы найти общее решение неоднородной четырехэлементной задачи (1), нам нужно выяснить, когда эта задача разрешима, и отыскать ее частное решение. Как уже отмечалось при описании шага 1 алгоритма, неоднородная задача (1) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима соответствующая матричная задача Римана (2). Известно (см., например, [4]), что задача (2) разрешима безусловно (т.е. при любой правой части $F(t)$), только если индексы κ_1, κ_2 являются неотрицательными. В этом случае кусочно аналитический вектор $\Psi(z)=X(z)\Omega(z)$ является решением неоднородной задачи (2). Здесь вектор $\Omega(z)$ находится по формуле

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{G_+^{-1}(t)F(t)}{t-z}dt.$$

В нашем случае, когда элементы матрицы $G_+^{-1}(t)$ и вектора $F(t)$ являются рациональными функциями, мы можем найти компоненты $\Omega_\pm(z)$ кусочно аналитического вектора $\Omega(z)$, не используя интегралы типа Коши. Пусть $R(z)$ – рациональная функция, имеющая полюсы в точках $z_1,\dots,z_m$ области D_+, и $G_1(z),\dots,G_m(z)$ – главные части рядов Лорана $R(z)$ в окрестности этих точек. Тогда $R_-(z)=-G_1(z)-\dots-G_m(z)$ – аналитическая в D_- функция, исчезающая на бесконечности, а $R_+(z)=R(z)+R_-(z)$ – функция, аналитическая в D_+. Таким образом, разложение $R(z)=R_+(z)-R_-(z)$ является разложением по формулам Сохоцкого и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R(t)}{t-z}dt=\begin{cases}R_+(z), & z\in D_+,\\ R_-(z), & z\in D_-.\end{cases} \tag{6}$$

Этот способ построения кусочно рациональной функции реализован в виде процедуры Sokhotckii. Применив ее к элементам вектора $G_+^{-1}(t)F(t)$, мы найдем кусочно аналитический вектор $\Omega(z)$ и получим решение неоднородной задачи Римана в виде

$$\Psi(z)=\begin{cases}G_+^{-1}(z)\Omega_+(z), & z\in D_+,\\ G_-^{-1}(z)d^{-1}(z)\Omega_-(z), & z\in D_-.\end{cases} \tag{7}$$

Теперь мы можем отыскать симметричное решение

$$\frac{1}{2}\left[\Psi(z)+\Psi^*(z)\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Psi_1(z)+\Psi_2^*(z)\\ \Psi_2(z)+\Psi_1^*(z)\end{pmatrix}$$

задачи (2) и решение $\frac{1}{2}\left[\Psi_1(z)+\Psi_2^*(z)\right]$ неоднородной задачи (1).

Если среди индексов κ_1, κ_2 есть отрицательные, то неоднородная задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда правая часть $F(t)$ удовлетворяет некоторым условиям разрешимости. При $\kappa_1\geq 0$, $\kappa_2<0$ эти условия состоят в том, что элемент $\Omega_2(z)$ кусочно аналитического вектора $\Omega(z)$ должен иметь в бесконечно удаленной точке нуль порядка не ниже, чем $|\kappa_2|+1$. Если же $\kappa_1<0$, $\kappa_2<0$, то к этому условию добавляется требование, что $\Omega_1(z)$ имеет в бесконечности нуль порядка не ниже, чем $|\kappa_1|+1$. Таким образом, число p условий разрешимости задачи (2) равно сумме отрицательных частных индексов, взятой с обратным знаком. Для проверки выполнимости данных условий мы разлагаем рациональные функции $\Omega_j^-(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности и проверяем равенство нулю коэффициентов при $\frac{1}{z}, \dots, \frac{1}{z^{|\kappa_j|}}$, $j = 1, 2$. При выполнении условий разрешимости вектор-функция (7) по-прежнему является решением неоднородной задачи (2), а, значит, $\frac{1}{2}\left[\Psi_1(z) + \Psi_2^*(z)\right]$ будет решением исходной задачи (1).

2. Описание процедуры

Опишем теперь процедуру ExactMarkushevich, реализующую вышеуказанный алгоритм. Ей передается пять параметров a, b, c, d, f – коэффициенты задачи (1) и ее свободный член. Перед обращением к процедуре требуется подключить пакет LinearAlgebra. Приведем пример обращения к процедуре

```
>with(LinearAlgebra)
>a:=1; b:=0; c:=t; d:=(1+3*t^3)/t^4; f:=1/(2*t+1)^4;
>ExactMarkushevich(a,b,c,d,f).
```

Поскольку точные вычисления предполагают использование рациональной арифметики, то должны быть выполнены условия а), б). Выполнимость а) обеспечивает пользователь. Процедура проверяет выполнение условия б) и условие нетеровости $\delta(t) \neq 0$. Если они нарушены, то процедура выдает соответствующее сообщение и заканчивает работу.

Процедура возвращает числа l, p и базис пространства решений однородной задачи, если это пространство нетривиально. Кусочно аналитические функции, входящие в базис, представлены двумерными строками, в которых первый элемент есть компонента, аналитическая в области D_+, а второй – компонента, аналитическая в D_-.

Условие б) для свободного члена $f(t)$ и условия разрешимости задачи процедура проверяет после решения однородной задачи. При невыполнении их процедура выдает соответствующие сообщения и заканчивает работу. В случае разрешимости задачи процедура возвращает частное решение неоднородной задачи в виде двумерной строки.

Пример 1. Приведем пример точного решения неустойчивой неоднородной задачи Маркушевича с помощью процедуры ExactMarkushevich. Зададим

$$a(t) = 1,\ b(t) = 0,\ c(t) = t,\ d(t) = \frac{1 + 3t^3}{t^4},\ f(t) = \frac{1}{(2t + 1)^4}.$$

В результате работы процедуры мы получаем значения $l = 4$, $p = 2$ и базис

$$\left(-\frac{3}{2} + \frac{3t^3}{2},\ \frac{1}{2t^4} - \frac{1}{2t}\right), \left(-\frac{3t}{2} + \frac{3t^2}{2},\ \frac{1}{2t^3} - \frac{1}{2t^2}\right),$$

$$\left(-\frac{3i}{2} - \frac{3it^3}{2},\ \frac{i}{2t^4} + \frac{i}{2t}\right), \left(-\frac{3it}{2} - \frac{3it^2}{2},\ \frac{i}{2t^3} + \frac{i}{2t^2}\right)$$

пространства решений однородной задачи Маркушевича. Далее процедура проверяет условия разрешимости неоднородной задачи Маркушевича, определяет, что данная задача разрешима, и возвращает ее частное решение

$$\left(-\frac{t(2 + 3t^3)}{2(t + 2)^4},\ \frac{3t^3 - 2}{2t(2t + 1)^4}\right).$$

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ-Урал, грант №07-01-96010

Литература

1. Литвинчук, Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г.С. Литвинчук. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
2. Емец, Ю.П. Точное решение задачи о формировании тока в двоякопериодической гетерогенной системе / Ю.П. Емец, Ю.В. Обносов // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 309, № 2. – С. 319 – 322.
3. Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
4. Векуа, Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений / Н.П. Векуа. – М.: Наука, 1970. – 380 с.
5. Расулов, К.М. Об одном методе решения граничной задачи Маркушевича в классе аналитических функций / К.М. Расулов // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: межвуз. сб. науч. тр. – Смоленск, 2001. – Вып. 3. – С. 98 – 108.
6. Расулов, К.М. О решении обобщенной граничной задачи Маркушевича в классе аналитических функций / К.М. Расулов // Системы компьютерной математики и их приложения: сб. тр. Междунар. науч. конф. – Смоленск, 2002. – С. 137 – 142.
7. Чибрикова, Л.П. К решению одной общей задачи линейного сопряжения аналитических функций в случае алгебраических контуров / Л.И. Чибрикова, Л.Г. Салехов // Тр. семинара по краев. задачам. – Казань, 1968. – Вып. 5. – С. 224 – 249.
8. Адуков, В.М. Факторизация Винера – Хопфа мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4, вып 1. – С. 54 – 74.
9. Адуков, В.М. Факторизация Винера – Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // Матем. сборник. – 2009. – Т. 200, № 8. – С. 3 – 24.
10. Адуков, В.М. О точном и приближенном решении задачи факторизации Винера – Хопфа для мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та, серия «Математика, физика, химия». – 2008. – № 7(107), вып. 10. – С. 3 – 12.

Адуков Виктор Михайлович, доктор физико-математических наук, кафедра дифференциальных уравнений и динамических систем, Южно-Уральский государственный университет, avm@susu.ac.ru.

Патрушев Алексей Алексеевич, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет, avm@susu.ac.ru.

Поступила в редакцию 22 июня 2010 г.