

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 541.186+519.86

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ БАЛАНСОВОЙ НОРМАТИВНОЙ МОДЕЛИ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

*В.П. Гергель, В.А. Горбачев, Н.Н. Оленев, В.В. Рябов, С.В. Сидоров*

## PARALLEL GLOBAL OPTIMIZATION METHODS FOR IDENTIFICATION OF THE DYNAMIC BALANCE NORMATIVE MODEL OF REGIONAL ECONOMY

*V.P. Gergel, V.A. Gorbachev, N.N. Olenev, V.V. Ryabov, S.V. Sidorov*

Построенные в ВЦ РАН динамические модели региональной экономики содержат большое число неизвестных параметров, идентифицировать которые можно с помощью минимизации нелинейных критериев близости расчетных и статистических данных. В работе для этого применяется параллельный индексный метод глобальной оптимизации, разработанный в ННГУ. Метод использует редукцию размерности на основе кривых Пеано и информационно-статистический подход, дополненный различными модификациями.

*Ключевые слова: идентификация математической модели, региональная экономика, глобальная оптимизация, индексный метод, локально-глобальная стратегия, параллельные алгоритмы.*

Constructed in Dorodnicyn Computing Center of the Russian Academy of Sciences dynamic models of regional economy contain a lot of unknown parameters. It is possible to identify them by minimization of nonlinear criteria of affinity for calculated and statistical data. In this paper a parallel index method of global optimization developed in Nizhny Novgorod State University is applied for that. The method uses a reduction of dimension on the basis of Peano curves and the information-statistical approach added with different updating.

*Keywords: identification of mathematical model, regional economy, global optimization, index approach, local-global strategy, parallel algorithms.*

## Введение

В работе рассмотрена математическая модель региональной экономики, содержащая неизвестные параметры, которые можно найти косвенно, решая задачу минимизации отклонения между расчетными временными рядами макроэкономических показателей и соответствующими им статистическими историческими данными. Таким образом, возникает задача идентификации математической модели экономики, которая в общем случае является задачей глобальной оптимизации [1].

При построении и идентификации модели решаются задачи анализа и структуризации статистических исходных данных. Идентифицированную модель можно использовать для оценки сценариев возможного развития экономики региона на основе численных экспериментов. Выводы и предсказания, полученные с помощью такой модели, могут быть экспериментально опровергнуты, а гипотезы, на основе которых построена модель, - обоснованно оспорены. Это позволяет модифицировать модель и на постоянно совершенствующейся модели получать более обоснованные предсказания и аналитические выводы.

Задача идентификации представленной здесь многосекторной модели региональной экономики решается на данных Нижегородской области. Такого рода динамические балансовые нормативные модели экономики были идентифицированы для нескольких регионов России: Кировской области [2], Республики Алтай [3], а также для ряда развивающихся стран: Таджикистана [4], Монголии [5]. Нормативные модели содержат огромное число неизвестных параметров (нормативов распределения продуктов и нормативов распределения финансовых средств). Для их идентификации использовались эвристические методы сокращения размерности задачи, основанные на нахождении связи между параметрами на характерных режимах развития экономики с помощью разработанной в ВЦ РАН системы поддержки моделирования экономических систем ЭКОМОД [5], параллельные вычисления на суперкомпьютерах, позволяющие за разумное время сделать перебор возможных значений параметров при равномерном разбиении заданных интервалов их изменения. Эта методика здесь обобщается на использование эффективных методов глобальной оптимизации, скорость сходимости которых на несколько порядков лучше равномерного перебора.

Дальнейшее развитие моделей экономики с большим числом неизвестных параметров невозможно без применения эффективных параллельных методов глобальной оптимизации и высокопроизводительных вычислительных систем [7, 8, 9, 10, 11], которое позволит повысить уровень сложности, выраженный числом внешних параметров. Проведение сценарных расчетов на основе идентифицированных моделей даст возможность более точного прогнозирования экономических последствий тех или иных стратегических решений.

## 1. Анализ исходных статистических данных

Агрегируем экономику Нижегородской области в три основных сектора:

1) отрасли инфраструктуры, производства и распределения сырья (сельское хозяйство, электроэнергетика, строительство, транспорт, госуправление, образование, здравоохранение);

2) обрабатывающие отрасли (машиностроение и металлообработка, химическая и нефтехимическая промышленность, топливная промышленность, черная и цветная металлургия, промышленность строительных материалов, лесная, деревообрабатывающая и целлюлозно-бумажная, легкая, пищевая, химико-фармацевтическая, микробиологическая, мукомольно-крупяная и комбикормовая, полиграфическая промышленность, научный комплекс);

3) отрасли услуг (торговля, операции с недвижимым имуществом, финансовая деятельность, предоставление услуг).

При построении модели выделим следующих экономических агентов: Правительство области, Производителей в лице представленных выше трех секторов, Банковскую систему, Домашние хозяйства области, Внешних потребителей и поставщиков.

В Нижегородской области нет богатых природных ресурсов, но ее экономика является одним из наиболее развитых в промышленном отношении регионов России. Основу промышленности составляют обрабатывающие отрасли, мощный военно-промышленный комплекс, развит фундаментальный научный комплекс, есть хорошие возможности для развития наукоемких производств и инновационных отраслей.

## 2. Описание модели региональной экономики

В основу модели экономики региона положена модель общего равновесия с запасами продуктов, факторов производства и денег, учитывающая налогообложение и теневой оборот [2]. Напомним, что производители в модели экономики Нижегородской области представлены тремя секторами: (1) инфраструктурный комплекс ( $X$ ), (2) комплекс обрабатывающих отраслей ( $Y$ ), (3) комплекс отраслей услуг, торговли, недвижимости, финансов ( $Z$ ). Производители используют в производстве труд, капитал, промежуточную продукцию смежных секторов, поставляют продукцию на внутренний и внешний рынки. Домашние хозяйства  $L$  предлагают труд и потребляют конечную продукцию. Торговый посредник  $T$  перераспределяет материальные и финансовые потоки. Банковская система  $B$  выдает кредиты производителям с целью извлечения банковской прибыли. Правительство региона  $G$  собирает налоги с производителей и домашних хозяйств, регулирует расходы бюджета. Считаем, что свои цены формируются на каждом рынке каждой продукции, а изменение цен обратно пропорционально изменению запасов соответствующих продуктов.

Предполагаем, что произведенный продукт производители делят на открытый и теневой, последний не облагается налогами. В результате у производителя оказывается два вида денег: «белые» и «черные». «Черные» деньги могут отмываться, а их запас подвергается штрафным санкциям. У потребителя все деньги считаются «белыми», а свой доход потребитель делит по заданным нормам потребления легальных и теневых продуктов всех секторов. Производственные сектора  $m = X, Y, Z$  платят налог на прибыль  $n_1$ , налог на добавленную стоимость  $n_2$ , акцизы на валовой выпуск  $n_3^m$ , единый социальный налог на фонд заработной платы  $n_4$ , таможенные платежи на экспорт  $n_5$ . Домашние хозяйства  $L$  в модели оплачивают таможенные платежи с импорта  $n_6$ , подоходный налог с зарплаты  $n_7$ .

Показатели и параметры модели снабжены верхними и нижними индексами, причем верхние индексы используются для агентов, а нижние – для благ. Распределение запаса каждого блага производится по нормативу:  $a_i^{nm}$  – доля запаса блага  $i$ , идущая от агента  $n$  к агенту  $m$ . Распределение денег производится также по некоторому нормативу:  $b_i^{mn}$  – доля запаса денег агента  $m$ , идущая агенту  $n$  за продукт  $i$ . Коэффициенты фондоемкости также задаются нормативами:  $c_i^m$  – норма затрат продукта  $i$  на создание единицы фондообразующего продукта агента  $m$ .

### 2.1. Описание производственного сектора $X$

Приведем описание производственного сектора  $X$  (инфраструктурного комплекса отраслей Нижегородской области), описание других производственных секторов опускаем, оно аналогично. Выпуск  $Y^X(t)$  продукта  $X$  экономическим агентом  $X$  (сектором  $X$ ) описан степенной производственной функцией от используемых факторов производства (запасов  $Q$ ): труда  $L$ , капитала  $K$  и промежуточных продуктов из секторов  $Y$  и  $Z$ .

$$Y_X = (a_L^X \cdot Q_L^X)^{\delta_L^X} \cdot (a_K^X \cdot Q_K^X)^{\delta_K^X} \cdot (a_Y^X \cdot Q_Y^X)^{\delta_Y^X} \cdot (a_Z^X \cdot Q_Z^X)^{\delta_Z^X}, \quad (1)$$

где  $\delta_L^X + \delta_K^X + \delta_Y^X + \delta_Z^X = 1$ ; а остальные параметры принадлежат интервалу  $(0, 1)$ . Производство открытого  $X$  и теневого  $V$  продуктов агент  $X$  осуществляет на общих фондах  $Q_K^X(t)$  и общих трудовых ресурсах  $Q_L^X(t)$ . Доля теневого продукта  $q_X$  в общем выпуске определяет прирост запасов открытого  $Q_X^X(t)$  и теневого  $Q_V^X(t)$  продуктов.

$$\frac{dQ_X^X}{dt} = (1 - q_X) \cdot Y_X - (a_X^{XL} + a_X^{XY} + a_X^{XZ} + a_X^{XO}) \cdot Q_X^X - c_X^X \cdot I_X, \quad (2)$$

где  $I_X$  – инвестиции продукта  $X$  в сектора региональной экономики (предполагаем, что все инвестиции осуществляются за счет открытых денежных средств),  $c_X^X$  – коэффициент

приростной фондоемкости продукта  $X$  при инвестициях в сектор  $X$ . Продукт сектора  $X$ , поступающий на внешний рынок (в другие регионы России и за рубеж)  $X_X^{XO} = a_X^{XO} \cdot Q_X^X$ .

$$I_X = (b_K^X \cdot W^X) / (p_X^X \cdot c_X^X + p_Y^X \cdot c_Y^X + p_Z^X \cdot c_Z^X). \quad (3)$$

Здесь  $b_K^X$  – доля расходов открытых денежных средств  $W^X(t)$  на инвестиции в сектор  $X$ ,  $c_i^X$  – коэффициент приростной фондоемкости продукта  $i$  при инвестициях в сектор  $X$ ,  $p_i^X$  – индекс цен на продукт  $i$  для промежуточного потребления в секторе  $X$ , ( $i = X, Y, Z$ ). Для определения цены на свою продукцию в секторе  $X$  полагаем  $p_X^X = \min\{p_X^Y, p_X^Z\}$ .

Запас теневого  $Q_V^X(t)$  продукта сектора  $X$  прирастает за счет части  $q_X$  его выпуска и расходуется на потребление населения и смежных секторов по заданным нормам:

$$\frac{dQ_V^X}{dt} = q_X \cdot Y_X - (a_V^{XL} + a_V^{XY} + a_V^{XZ}) \cdot Q_V^X. \quad (4)$$

Изменения запасов открытых ("белых")  $W^X(t)$  и скрытых ("черных")  $B^X(t)$  денежных средств у агента  $X$  также описываются балансовыми соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{dW^X}{dt} = & w \cdot p_X^O \cdot X_X^{XO} + C^{BX} + (p_X^L \cdot a_X^{XL} + p_X^Y \cdot a_X^{XY} + p_X^Z \cdot a_X^{XZ}) \cdot Q_X^X - \\ & (b_Y^{XY} + b_Z^{XZ} + b_W^{XY} + b_U^{XZ} + b_L^{XL} + b_H^{XB}) \cdot W^X - T^{XG} + T^{GX} + b_B^X \cdot B^X, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{dB^X}{dt} = (p_V^L \cdot a_V^{XL} + p_V^Y \cdot a_V^{XY} + p_V^Z \cdot a_V^{XZ}) \cdot Q_V^X - (b_B^{XL} + b_B^X + b_B^{XG}) \cdot B^X. \quad (6)$$

Здесь  $w(t)$  – рублевый курс доллара,  $p_i^m(t)$  – индексы цен на продукт  $i$  на рынке для агента  $m$  (в случае внешнего рынка  $O$  используется долларовой индекс цен),  $T^{GX}(t)$  – трансферты из бюджета,  $T^{XG}(t)$  – налоговые отчисления в консолидированный бюджет,  $C^{BX}(t)$  – объем новых кредитов,  $b_B^X \cdot B^X(t)$  – поступления «отмытых» денег из теневого оборота.

Отчисления в консолидированный бюджет агента  $X$  (инфраструктурного комплекса Нижегородской области)  $T^{XG}(t)$  складываются из отчислений по налогу на прибыль  $T_1^{XG}(t)$ , налогу на добавленную стоимость  $T_2^{XG}(t)$ , акцизам  $T_3^{XG}(t)$ , единому социальному налогу  $T_4^{XG}(t)$ , таможенным платежам на экспорт  $T_5^{XG}(t)$ .

$$T^{XG} = T_1^{XG} + T_2^{XG} + T_3^{XG} + T_4^{XG} + T_5^{XG}, \quad (7)$$

$$T_5^{XG} = n_5 \cdot w \cdot P_X^O \cdot X_X^{XO}, T_4^{XG} = n_4 \cdot b_L^{XL} \cdot W^X, \quad (8)$$

$$T_3^{XG} = n_3 \cdot [w \cdot P_X^O \cdot X_X^{XO} + (p_X^L \cdot a_X^{XL} + p_X^Y \cdot a_X^{XY} + p_X^Z \cdot a_X^{XZ}) \cdot Q_X^X], \quad (9)$$

$$\begin{aligned} T_2^{XG} = & n_2 \cdot [w \cdot P_X^O \cdot X_X^{XO} + (p_X^L \cdot a_X^{XL} + p_X^Y \cdot a_X^{XY} + p_X^Z \cdot a_X^{XZ}) \cdot Q_X^X - \\ & (b_Y^{XY} + b_Z^{XZ} + b_H^{XB}) \cdot W^X - T_3^{XG} - T_4^{XG} - T_5^{XG}], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} T_1^{XG} = & n_1 \cdot [w \cdot P_X^O \cdot X_X^{XO} + (p_X^L \cdot a_X^{XL} + p_X^Y \cdot a_X^{XY}) \cdot Q_X^X - \\ & (b_Y^{XY} + b_Z^{XZ} + b_H^{XB} + b_L^{XL}) \cdot W^X - T_2^{XG} - T_3^{XG} - T_4^{XG} - T_5^{XG}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Запас промежуточного продукта  $Y$  у агента  $X$  растет за счет покупки открытого продукта  $Y$  у агента  $Y$  (сектора обрабатывающих отраслей Нижегородской области) по цене  $p_Y^X(t)$  и теневого продукта  $W$  у агента  $Y$  по цене  $p_W^X(t)$  и убывает за счет использования его в производстве в качестве сырья и инвестиций. Запас промежуточного продукта  $Z$  у агента  $X$  растет за счет покупки открытого продукта у агента  $Z$  (сектора услуг Нижегородской области) по цене  $p_Z^X(t)$  и теневого продукта  $U$  у агента  $Z$  по цене  $p_U^X(t)$  и убывает за счет использования его в производстве в качестве сырья и инвестиций.

$$\frac{dQ_Y^X}{dt} = b_Y^{XY} \cdot W^X / p_Y^X + b_W^{XY} \cdot W^X / p_W^X - a_Y^X \cdot Q_Y^X - c_Y^X \cdot I_X, \quad (12)$$

$$\frac{dQ_Z^X}{dt} = b_Z^{XZ} \cdot W^X / p_Z^X + b_U^{XZ} \cdot W^X / p_U^X - a_Z^X \cdot Q_Z^X - c_Z^X \cdot I_X. \quad (13)$$

Запас труда в секторе  $X$  прирастает за счет покупки у агента  $L$  (домашних хозяйств Нижегородской области) открытого труда  $L$  по официальной ставке заработной платы  $s_L^X(t)$  и теневого труда  $B$  по теневой ставке  $s_B^X(t)$  и убывает в силу спроса на труд агента  $X$ .

$$\frac{dQ_L^X}{dt} = b_L^{XL} \cdot W^X / p_L^X + b_B^{XL} \cdot W^X / p_B^X - a_L^X \cdot Q_L^X. \quad (14)$$

Запас капитала в секторе  $X$  прирастает за счет инвестиций  $b_K^X \cdot W^X(t)$ , убывает при амортизации капитала с темпом  $\mu_K^X$  и при использовании капитала в производстве сектора  $X$ .

$$\frac{dQ_K^X}{dt} = b_K^X \cdot W^X - \mu_K^X \cdot Q_K^X - a_K^X \cdot Q_K^X. \quad (15)$$

Считаем, что агент  $X$  (предприятия сектора  $X$ ) берет весь предлагаемый агентом  $B$  (банковской системой Нижегородской области) кредит, однако объем предоставляемого кредита  $C^{BX}(t)$  ограничен ликвидационной стоимостью производственных фондов.

$$C^{BX} = \sigma^X \cdot Q_K^X, \sigma^X > 0. \quad (16)$$

Задолженность  $Z^X(t)$  агента  $X$  банковской системе  $B$  прирастает за счет выдачи новых кредитов  $C^{BX}(t)$  и начисления текущего процента по кредитам  $r(t)$  на имеющуюся задолженность, а уменьшается в силу платежей погашения  $H^{XB}(t)$ .

$$\frac{dZ^X}{dt} = C^{BX} + r \cdot Z^X - H^{XB}, H^{XB} = b_H^{XB} \cdot W^X. \quad (17)$$

## 2.2. Описание домашних хозяйств Нижегородской области (агента $L$ )

Безработные в составе экономически активного населения Нижегородской области в модели разделены по секторам производства  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , а в них подразделены на безработных в открытой части экономики и безработных в теневой части экономики. Безработица увеличивается, если предложения труда превышает спрос на него и уменьшается в противном случае. Для краткости приведем описание только домашних хозяйств, приписанных в модели к сектору  $X$ . Предложение труда в открытой и теневой части сектора  $X$

$$\frac{dQ_L^{LX}}{dt} = a_L^{LX} \cdot Q_L^{LX} - b_L^{XL} \cdot W^X / s_L^X, \frac{dQ_B^{LX}}{dt} = a_B^{LX} \cdot Q_B^{LX} - b_B^{XL} \cdot W^X / s_B^X. \quad (18)$$

Считаем, что рост открытой  $s_L^X(t)$  и теневой  $s_B^X(t)$  ставок заработной платы в секторе  $X$  может происходить как при нехватке кадров, так и при росте потребительских цен на продукцию сектора. Открытая ставка зарплаты:

$$\frac{ds_L^X}{dt} = \left[ \alpha_L^X \cdot \left( \frac{b_L^{XL} \cdot W^X}{s_L^X} - a_L^{LX} \cdot Q_L^{LX} \right) + \frac{\beta_L^X \cdot s_L^X}{p_X^L} \cdot \left( \frac{b_X^{LX} \cdot W^L}{p_X^L} - a_X^{XL} \cdot Q_X^X \right) \right]_+, \quad (19)$$

где  $\beta_L^X = \delta \cdot \alpha_X^L$  и используется обозначение:  $X_+ = X$ , если  $X > 0$  и  $X_+ = 0$ , если  $X \leq 0$ . Считаем, что доля прироста цен, отражающаяся на росте заработной платы,  $\delta \in (0, 1)$ . Теневая ставка зарплаты в секторе X:

$$\frac{ds_B^X}{dt} = \left[ \alpha_B^X \cdot \left( \frac{b_B^{XL} \cdot W^X}{s_B^X} - a_B^{LX} \cdot Q_B^{LX} \right) + \frac{\beta_B^X \cdot s_B^X}{p_V^L} \cdot \left( \frac{b_V^{LX} \cdot W^L}{p_V^L} - a_V^{XL} \cdot Q_V^X \right) \right]_+, \quad (20)$$

где  $\beta_B^X = \delta \cdot \alpha_V^L$ . Считаем, что все деньги у домашних хозяйств являются открытыми (чистыми) независимо от источника поступления.

$$\begin{aligned} \frac{dW^L}{dt} = & d^{BL} + b_L^{XL} \cdot W^X + b_L^{YL} \cdot W^Y + b_L^{ZL} \cdot W^Z + b_B^{XL} \cdot B^X + b_B^{YL} \cdot B^Y + b_B^{ZL} \cdot B^Z - \\ & - (b_X^{LX} + b_V^{LX} + b_Y^{LY} + b_W^{LY} + b_Z^{LZ} + b_U^{LZ} + b_M^{LO}) \cdot W^L - T^{LG} + T^{GL}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $T^{LG}(t)$  - отчисления в консолидированный бюджет агента L (домашних хозяйств) - складываются из отчислений по таможенным платежам на импорт  $T_6^{LG}(t)$  и отчислений по подоходному налогу  $T_7^{LG}(t)$  с открытой части дохода.

$$\begin{aligned} T^{LG} = & T_6^{LG} + T_7^{LG}, T_6^{LG} = n_6 \cdot b_M^{LO} \cdot W^X, \\ T_7^{LG} = & n_7 \cdot (d^{BL} + b_L^{XL} \cdot W^X + b_L^{YL} \cdot W^Y + b_L^{ZL} \cdot W^Z). \end{aligned} \quad (22)$$

### 2.3. Описание консолидированного бюджета Правительства Нижегородской области (агента G)

Запас денег на счетах консолидированного бюджета прирастает от налоговых поступлений и убывает при трансфертах секторам экономики и домашним хозяйствам. Может принимать отрицательные значения, если область является дотационной. Область является дотационной, когда трансферты из федерального бюджета превышают налоговые отчисления в него. В модели все налоги остаются на счетах консолидированного бюджета.

$$\frac{dW^G}{dt} = b_V^{XG} \cdot B^X + b_W^{YG} \cdot B^Y + b_U^{ZG} \cdot B^Z + T^{XG} + T^{YG} + T^{ZG} + T^{LG} - T^{GX} - T^{GY} - T^{GZ} - T^{GL}, \quad (23)$$

где  $T^{GX} = b_X^{GX} \cdot W^G$ ,  $T^{GY} = b_Y^{GY} \cdot W^G$ ,  $T^{GZ} = b_Z^{GZ} \cdot W^G$ ,  $T^{GL} = b_L^{GL} \cdot W^G$ .

Текущий дефицит (а если  $< 0$  - профицит) консолидированного бюджета Нижегородской области  $D^G(t)$  определяется правой частью (23) с обратным знаком.

$$D^G = -b_V^{XG} \cdot B^X - b_W^{YG} \cdot B^Y - b_U^{ZG} \cdot B^Z - T^{XG} - T^{YG} - T^{ZG} - T^{LG} + T^{GX} + T^{GY} + T^{GZ} + T^{GL}. \quad (24)$$

### 2.4. Описание банковской системы Нижегородской области (агента B)

Банковская система Нижегородской области не является замкнутой, большую роль в инвестиционных решениях играют филиалы Российских банков других регионов. Считаем,

что часть золотовалютных резервов России обеспечивает резервирование активов области. Банковские активы областной банковской системы состоят из золото-валютных резервов  $R(t)$  и суммарной задолженности секторов  $Z(t)$ , а пассивы – из суммарных запасов денег у контрагентов банковской системы  $W(t)$ , которые подчиняются финансовому балансу:

$$w \cdot R(t) + Z(t) = W(t), \quad (25)$$

где  $w(t)$  – рублевый курс доллара, рублей за один доллар. Срочные депозиты, на которые начисляют процент, не учитываем. Золото-валютные резервы  $R(t)$  определяются балансом

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{i=X}^Z p_i^O \cdot X_i^{iO} - M_M^{OL}, M_M^{OL} = (1 - n_6) \cdot b_M^{LO} \cdot W^L / w. \quad (26)$$

Здесь  $p_i^O$  – цена на экспортный товар  $X_i^{iO}$  сектора  $i$  на внешнем рынке  $O$ , в долларах за единицу. Рассматриваем весь импорт как отдельный товар, доля которого  $b_M^{LO}$  в потреблении населения фиксирована. Мы не учитываем внешние заимствования и перетоки капитала.

Суммарная задолженность агентов  $Z(t)$  растет при выдаче новых кредитов  $C^{Bi}(t)$ , начислении процентов на остаток задолженности, снижается при погашении задолженности

$$\frac{dZ}{dt} = \sum_{i=X}^Z C^{Bi}(t) + r(t) \cdot Z(t) - \sum_{i=X}^Z H^{iB}(t), (Z = Z^X + Z^Y + Z^Z). \quad (27)$$

Прибыль банков  $d^{BL}(t) = r(t) \cdot Z(t)$  идет в доходы населения. Суммарные запасы денег

$$W(t) = W^X + W^Y + W^Z + W^T + W^L + W^G. \quad (28)$$

Резервы банковской системы  $wR(t)$  обеспечивают вклады контрагентов при законодательно установленной норме резервирования  $\xi$ .

$$w \cdot R(t) \geq \xi \cdot W(t). \quad (29)$$

Тогда банковская система стремится предоставить максимальный кредит, который допускают соотношения (25) и (29):

$$Z = \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot w \cdot R. \quad (30)$$

Считаем, что спрос на кредиты, обеспеченные ликвидационной стоимостью производственных фондов, полностью удовлетворяется банковской системой.

В результате, соотношения (26), (27) и (30) определяют процент по кредитам  $r(t)$ :

$$r(t) = \left( \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot w \cdot \left( \sum_{i=X}^Z p_i^O \cdot X_i^{iO} - M_M^{OL} \right) + \sum_{i=X}^Z H^{iB} - \sum_{i=X}^Z C^{Bi}(t) \right) / Z(t). \quad (31)$$

## 2.5. Описание посредника (агента $T$ )

Агент  $T$  в модели играет роль чистого посредника, не получающего доходов и потому не имеющего ответственности по налогам. Описание этого агента введено для описания областных рынков продукции, на которых определяются внутренние цены на все продукты.

Изменение запаса  $Q_X^L(t)$  конечного продукта  $X$  сектора  $X$ , предназначенного агенту  $L$  (домашним хозяйствам области), у посредника  $T$  определяет изменение индекса потребительских цен  $p_X^L(t)$  на продукцию сектора  $X$ .

$$\frac{dQ_X^L}{dt} = a_X^{XL} \cdot Q_X^X - b_X^{LX} \cdot W^L / p_X^L, \quad (32)$$

$$\frac{dp_X^L}{dt} = \alpha_X^L \cdot (b_X^{LX} \cdot W^L / p_X^L - a_X^{XL} \cdot Q_X^X), \quad (33)$$

Общее число уравнений в модели почти 100, общее число параметров превышает 80.

### 3. Задача идентификации

В общем виде задача идентификации математической модели состоит в том, что ее неизвестные параметры могут быть найдены из оптимальных соотношений, отражающих степень близости расчетных и экспериментальных (статистических) данных. Отсюда возникает задача поиска глобального оптимума многомерной нелинейной функции. Большое количество неопределяемых напрямую из статистики параметров модели определяем при верификации, сравнивая выходные временные ряды переменных модели с доступными статистическими временными рядами 2000 – 2008 гг. Временные ряды считаются похожими, если они близки как функции времени. В качестве критериев близости расчетного и статистического временных рядов используем индекс несовпадения Тэйла, который измеряет несовпадение временных рядов  $X$  и  $Y$  и чем ближе он к нулю, тем ближе сравниваемые ряды.

Декомпозиция модели на отдельные блоки дает возможность за разумное время определить независимые параметры благодаря параллельным вычислениям для перебора параметров модели на заданных интервалах их изменения с последовательно уменьшающимся интервалом изменения параметров.

### 4. Постановка задачи многоэкстремальной оптимизации

Алгоритмы, развиваемые Нижегородской научной школой многоэкстремальной оптимизации, предполагают следующую постановку задачи<sup>1</sup>:

$$\varphi^* = \varphi(y^*) = \min \{ \varphi(y) : y \in D \}, D = \{ y \in R^N : a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N \}, \quad (34)$$

где целевая функция  $\varphi(y)$  удовлетворяет условию Липшица с соответствующей константой  $L$ , а именно

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leq L \|y_1 - y_2\|, y_1, y_2 \in D. \quad (35)$$

Используя кривые типа развертки Пеано  $y(x)$ , однозначно отображающие отрезок  $[0, 1]$  на  $N$ -мерный гиперкуб  $P$

$$P = \{ y \in R^N : -2^{-1} \leq y_i \leq 2^{-1}, 1 \leq i \leq N \} = \{ y(x) : 0 \leq x \leq 1 \}, \quad (36)$$

исходную задачу можно редуцировать к следующей одномерной задаче:

$$\varphi(y_D(x^*)) = \min \{ \varphi(y_D(x)) : x \in [0, 1] \}. \quad (37)$$

<sup>1</sup>Здесь применяются общепринятые обозначения для задач многоэкстремальной оптимизации. Следует помнить, что в приложении к задачам идентификации параметров модели региональной экономики роль вектора  $y$  играет вектор искомым параметров рассматриваемой модели экономики.



Рассматриваемая схема редукции размерности сопоставляет многомерной задаче с липшицевой минимизируемой функцией одномерную задачу, в которой целевая функция удовлетворяет равномерному условию Гельдера (см. [7]), т.е.

$$\left| \varphi(y_D(x')) - \varphi(y_D(x'')) \right| \leq K \cdot |x' - x''|^{1/N}, \quad x', x'' \in [0, 1], \quad (38)$$

где  $N$  есть размерность исходной многомерной задачи, а коэффициент  $K$  связан с константой Липшица  $L$  исходной задачи соотношением  $K \leq 4L\sqrt{N}$ .

Различные варианты индексного алгоритма для решения одномерных задач и соответствующая теория сходимости представлены в работах [1], [8].

## 5. Индексный метод глобальной оптимизации

### 5.1. Редукция размерности и множественные отображения

Редукция многомерных задач к одномерным с помощью разверток имеет такие важные свойства, как непрерывность и сохранение равномерной ограниченности разностей функций при ограниченности вариации аргумента. Однако при этом происходит потеря части информации о близости точек в многомерном пространстве, так как точка  $x \in [0, 1]$  имеет лишь левых и правых соседей, а соответствующая ей точка  $y(x) \in R^N$  имеет соседей по  $2^N$  направлениям. Как результат, единственной точке глобального минимума в многомерной задаче соответствует несколько (не более  $2^N$ ) локальных экстремумов в одномерной задаче, что ухудшает свойства одномерной задачи.

Сохранить часть информации о близости точек позволяет использование множества отображений

$$Y_L(x) = \{y^1(x), \dots, y^L(x)\} \quad (39)$$

вместо применения единственной кривой Пеано  $y(x)$  (см. [7], [10]). Каждая кривая Пеано  $y^i(x)$  из  $Y_L(x)$  может быть получена в результате поворота развертки вокруг начала координат. При этом найдется отображение  $y^i(x)$ , которое точкам многомерного пространства  $y', y''$ , которым при исходном отображении соответствовали достаточно далекие прообразы на отрезке  $[0, 1]$ , будет сопоставлять более близкие прообразы  $x', x''$ .

Максимальное число различных поворотов развертки, отображающей  $N$ -мерный гиперкуб на одномерный отрезок, составляет  $2^N$ . Использование всех из них является избыточным. В используемой схеме (см. [10]) преобразование развертки осуществляется в виде поворота на угол  $\pm\pi/2$  в каждой из координатных плоскостей. Число подобных пар поворотов определяется числом координатных плоскостей пространства, которое равно  $C_N^2 = N(N-1)/2$ , а общее число преобразований будет равно  $N(N-1)$ . Учитывая исходное отображение, данный способ позволяет строить до  $N(N-1) + 1$  разверток.

### 5.2. Параллельный индексный метод и локально-глобальная стратегия

Использование множества отображений (39) приводит к формированию соответствующего множества одномерных многоэкстремальных задач

$$\min \left\{ \varphi(y^l(x)) : x \in [0, 1], \right\}, \quad 1 \leq l \leq L. \quad (40)$$

Каждая задача из данного набора может решаться независимо, при этом любое вычисленное значение  $z = \varphi(y')$ ,  $y' = y^i(x')$  функции  $\varphi(y)$  в  $i$ -й задаче может интерпретироваться

как вычисление значения  $z = \varphi(y')$ ,  $y' = y^s(x'')$  для любой другой  $s$ -й задачи без повторных трудоемких вычислений функции  $\varphi(y)$ . Подобное информационное единство позволяет решать исходную задачу (34) путем параллельного решения индексным методом  $L$  задач вида (40) на наборе отрезков  $[0,1]$ . Каждая одномерная задача решается на отдельном процессоре. Для организации взаимодействия на каждом процессоре создается  $L$  очередей, в которые процессоры помещают информацию о выполненных итерациях [9].

*Локально-адаптивный алгоритм* является модификацией индексного метода глобального поиска, состоящей в том, что, начиная с некоторого шага, при выборе точек итераций используется дополнительная информация - текущие оценки плотности вероятности для расположения точки искомого оптимума [9]. Существенным параметром этого метода является целое число  $0 \leq \alpha \leq 30$ , влияющее на характер сходимости. При  $\alpha = 0$  поиск носит глобальный характер, при  $\alpha = 30$  - локальный.

*Смешанный алгоритм* является модификацией индексного метода глобального поиска, состоящей в том, что, начиная с некоторого шага итерации, определяемые правилами индексного метода, чередуются с итерациями, определяемыми правилами локально-адаптивного алгоритма. Частота чередования является параметром метода. В работе [11] показано значительное преимущество такой стратегии.

## 6. Результаты вычислительных экспериментов

Численные эксперименты с моделью проводились, чтобы найти работоспособный вариант, качественно верно отражающий процессы, происходящие в экономике Нижегородской области. Численные эксперименты показали работоспособность полной модели и отдельных ее частей. Это значит, что модель может использоваться в дальнейшей работе. Внешние параметры этого варианта можно взять за основу для более точной идентификации модели в будущем, а сам вариант использовать как базовый при проведении качественных сценарных расчетов.

Критерием качества идентификации параметров модели является количественное соответствие основных макроэкономических показателей статистическим показателям экономики региона за период с начала 2000 года и до конца 2008 г. При этом все реальные показатели выражены в постоянных ценах 2000 г. Решение системы получено с привлечением современных вычислительных и программных средств.

Изменения в сценарном расчете по сравнению с базовым сценарием будем представлять вариацией изменения макропоказателей, выраженной в процентах.

В сценарии 1 предполагается, что с 2007 года происходит увеличение трансфертов консолидированного бюджета Нижегородской области в сектор обрабатывающих отраслей на поддержку инноваций. Но при этом структура расходов сектора остается неизменной. А именно, пусть бюджетные трансферты в сектор биотехнологий возрастут с 3 до 20% консолидированного бюджета. Реальные трансферты в сектор  $Y$  в сценарии 1 увеличиваются немногим более чем в пять раз в сравнении с базовым сценарием, инвестиции сектора  $Y$  возрастают на 50%, выпуск сектора через 40 лет увеличивается на треть в сравнении с базовым вариантом. Прирост выпуска приводит к росту объемов продаж и по всем каналам. При этом запас «белых» денег прирастает в полтора раза, а «черных» увеличивается на четверть. Однако, при этом ставки заработной платы снижаются до 5%, а прирост «черных» денег в секторах  $X$  и  $Z$  увеличивается до 10%. Изменение структуры цен, сопровождающееся уменьшением уровня потребительских цен и ставок заработной платы, приводит падению номинальных доходов консолидированного бюджета от налогообложения секторов  $Y$  и  $Z$ , при малом росте поступлений от сектора  $X$ .

В оптимистическом сценарии 2 в результате мер по поддержке инновационных процес-

сов, по трансферу технологий в 2012 году происходит увеличение отдачи от всех факторов производства на 5%. Тогда выпуск комплекса инфраструктурных отраслей  $X$  удваивается через 5 лет, а секторов обрабатывающих отраслей  $Y$  и сектора услуг  $Z$  – через 13 лет. При этом, несмотря на рост производительности труда, немного возрастает занятость в секторах экономики. Значительно увеличивается объем производственных фондов. Индексы цен меняются разнонаправлено: в секторе  $X$  индексы цен на продукцию, реализуемую по легальным каналам падают, а по теневым каналам – растут; в секторах  $Y$  и  $Z$  все индексы цен растут. Все ставки заработной платы растут за исключением легальной ставки сектора  $X$ . Запасы денег у всех экономических агентов возрастают, инвестиции секторов возрастают, доходы бюджета и домашних хозяйств возрастают.

## 7. Заключение

Улучшен предложенный ранее подход к распараллеливанию поисковых методов на многопроцессорных кластерных системах, не требующий синхронизации работы процессоров и характеризуемый высокими показателями масштабируемости и надежности, впервые позволяющий эффективно использовать сотни процессоров для методов глобальной оптимизации, имеющих серьезные неявные зависимости по данным. Подход основан на новом оригинальном способе построения множества отображений типа кривых Пеано.

Оказалось, что поведение макропоказателей региональной экономики существенно зависит от политики, проводимой Правительством региона. При осуществлении задуманной политики повышения производительности факторов производства за счет инновационной деятельности выпуск продукции и доходы всех агентов растут, однако, наличие теневой составляющей в производстве сохраняет высокие темпы инфляции.

Построена многосекторная динамическая балансовая нормативная модель региональной экономики Нижегородской области. Ее идентификация с помощью эффективных параллельных методов глобальной оптимизации на вычислительном кластере создают условия к проведению сценарных расчетов по прогнозированию экономического развития области.

В результате на стыке двух научных направлений получена новая методика идентификации моделей региональной экономики с применением эффективных алгоритмов глобальной оптимизации.

*Работа выполнена при поддержке совета по грантам Президента Российской Федерации (грант № НШ-64729.2010.9), ПФИ ОМН РАН №3 (проект №3.14), ПФИ Президиума РАН №14 (проект №103) и Российского фонда фундаментальных исследований (номера проектов 11-07-97017-р\_поволжье\_а).*

*Статья рекомендована к публикации программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2011».*

## Литература

1. Стронгин, Р.Г. Поиск глобального оптимума. – М.: Знание, 1990. – 47 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика; вып. 2).
2. Оленев, Н.Н. Модель оценки инновационного потенциала региональной экономики / Н.Н. Оленев // Экономика депрессивных регионов: Проблемы и перспективы развития региональных экономик: тр. междунар. науч.-практ. конф. / под ред. В.И. Беляева, И.Н. Дубины, О.П. Мамченко. – Барнаул, 2007. – С. 178 – 188.
3. Оленев, Н.Н. Исследование влияния теневого оборота на социально-экономическое положение в Республике Алтай / Н.Н. Оленев, В.С. Стародубцева // Региональная эконо-

- мика: теория и практика. – 2008, апрель. – № 11(68). – С. 32 – 37.
4. Оленев, Н.Н. Имитационная модель развивающейся экономики на примере республики Таджикистан / Н.Н. Оленев, Х.Ю. Солиев // Математика. Компьютер. Образование: сб. тр. XVII междунар. конф. / под общей ред. Г.Ю. Ризниченко. – Ижевск, 2010. – Т. 2. – С. 173 – 181.
  5. Горбачев, В.А. Идентификация модели добывающего сектора экономики Монголии / Н.Н. Оленев, В.А. Горбачев // VI Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2010), – Москва, 19 – 23 октября 2010 г.: тр. /отв.ред. П.С. Краснощеков, А.А. Васин. – М., 2010. – С. 97 – 98.
  6. Завриев, Н.К. Исследование математических моделей экономики средствами системы ЭКОМОД / Н.К. Завриев, И.Г. Поспелов, Л.Я. Поспелова // Матем. моделирование. – №15:8. – 2003. – С. 57 – 74.
  7. Стронгин, Р.Г. Параллельная многоэкстремальная оптимизация с использованием множества разверток / Р.Г. Стронгин // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1991. – Т. 31, № 8. – С. 1173 – 1185.
  8. Strongin, R.G. Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms. / R.G. Strongin, Ya.D. Sergeyev. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
  9. Баркалов, К.А. Ускорение сходимости в задачах условной глобальной оптимизации / К.А. Баркалов. – Нижний Новгород: изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2005.
  10. Баркалов, К.А. Использование кривых Пеано в параллельной глобальной оптимизации / К.А. Баркалов, В.В. Рябов, С.В. Сидоров // Материалы Девятой международной конференции-семинара «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах». – Владимир, 2009. – С. 44 – 47.
  11. Баркалов, К.А. О некоторых способах балансировки локального и глобального поиска в параллельных алгоритмах глобальной оптимизации / К.А. Баркалов, В.В. Рябов, С.В. Сидоров // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11. – С. 382 – 387.

Виктор Павлович Гергель, доктор технических наук, профессор, декан, кафедра математического обеспечения ЭВМ, Нижегородский государственный университет, [gergel@unn.ru](mailto:gergel@unn.ru).

Владимир Александрович Горбачев, аспирант, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, Российский университет дружбы народов, [g\\_vova@inbox.ru](mailto:g_vova@inbox.ru).

Николай Николаевич Оленев, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, [olenev@ccas.ru](mailto:olenev@ccas.ru).

Василий Владимирович Рябов, младший научный сотрудник, кафедра математического обеспечения ЭВМ, Нижегородский государственный университет, [vasily.v.ryabov@gmail.com](mailto:vasily.v.ryabov@gmail.com).

Сергей Владимирович Сидоров, ассистент, кафедра математического обеспечения ЭВМ, Нижегородский государственный университет, [sidorovsergei@mail.ru](mailto:sidorovsergei@mail.ru).

*Поступила в редакцию 11 апреля 2011 г.*