УДК 519.642.8

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРВЫХ ЧЕТЫРЕХ ПОПРАВОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ СНИЗУ ОПЕРАТОРОВ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРАТНОСТЬЮ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин

THE FIRST FOUR CORRECTIONS OF THE PERTURBATION THEORY FOR DISCRETE SEMI BOUNDED FROM BELOW OPERATORS WITH FREE MULTIPLICITIES OF EIGENVALUES FINDING

S.I. Kadchenko, S.N. Kakushkin

В работе получены аналитические формулы для вычисления первых четырех поправок теории возмущений дискретных полуограниченных снизу операторов, когда собственные значения невозмущенных операторов имеют произвольную кратность.

Ключевые слова: поправки теории возмущений, дискретные операторы, собственные значения, собственные функции.

In this paper received analytical formulas for calculation first four corrections of the perturbation theory for discrete semi bounded from below operators, when eigenvalues of unperturbed operators have free multiplicities.

Keywords: corrections of the perturbation theory, discrete operators, eigenvalues, eigenfunctions.

Введение

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T и ограниченный оператор P, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные значения оператора T, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, а $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным значениям. Обозначим через ν_n кратность собственного значения μ_n оператора T, а количество всех неравных друг другу собственных значений μ_n оператора T, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{|\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные значения оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n = \dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, тогда первые $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ являются решениями системы m_0 нелинейных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{m_0} \beta_k^p = \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0),\ p = \overline{1, m_0}. \tag{1}$$

Здесь $\alpha_k^{(p)}(m_0) = \dfrac{(-1)^k p}{2\pi k i} Sp \int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1} \Big[PR_\mu(T)\Big]^k d\mu$ – k-е поправки теории возмущений оператора $T+P$ целого порядка p, $R_\mu(T)$ – резольвента оператора T. Известно, что в этом случае в контуре T_{n_0} количество собственных значений оператора T при возмущении P не изменяется [1].

Основываясь на системе нелинейных уравнений (1), в работах [2 – 6] был разработан метод нахождения первых собственных значений дискретных операторов, который авторами был назван методом регуляризованных следов (РС).

Если известны значения числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ поправок теории возмущений целого порядка $p = \overline{1, m_0}$ дискретного оператора $T+P$, тогда система нелинейных алгебраических уравнений (1) позволяет находить его первые m_0 собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$. Предельные абсолютные погрешности найденных собственных значений β_n оператора $T+P$ зависят от того, с какой точностью вычислены суммы числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$.

В статье [4] разработан численный метод, позволяющий с необходимой точностью вычислять суммы числовых рядов поправок теории возмущения для возмущенных самосопряженных операторов необходимого порядка. В некоторых случаях суммы числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ можно приближенно найти, зная их первые члены, т. к. известно, что ряды сходятся как геометрический ряд со знаменателем $q = \max\limits_{\mu_n} q_n$ [4]. Поэтому важно получить аналитические формулы вычисления первых поправок $\alpha_k^{(p)}(m_0)$. В работе [3] найдены аналитические формулы вычисления первых четырех поправок $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ для случая, когда собственные значения оператора T однократные. В данной работе получены в явном виде формулы вычисления первых четырех поправок в случае произвольной кратности собственных значений оператора T.

1. Вычисление первых четырех поправок теории возмущений дискретных операторов

Пусть все предположения, которые сделаны во введении относительно обственных значений оператора T выполнены, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. При этом для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n < 1$. Тогда поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ для $k = \overline{1,4}$ и любых натуральных p и n_0 оператора $T+P$ вычисляются по формулам*

$$\alpha_1^{(p)}(m_0) = p \sum_{n=1}^{n_0} \frac{V_{nn}}{(\lambda_n^{(1)}-1)!} \frac{d^{\lambda_n^{(1)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(1)}-1}} \Big(\mu_n^{p-1}\Big),$$

$$\alpha_2^{(p)}(m_0) = \frac{p}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \Big[\frac{V_{nn}^2}{(\lambda_n^{(2)}-1)!} \frac{d^{\lambda_n^{(2)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(2)}-1}} \Big(\mu_n^{p-1}\Big) +$$

$$+ \frac{2}{(\lambda_n^{(1)}-1)!} \sum_{i \neq n} V_{ni} V_{in} \frac{d^{\lambda_n^{(1)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(1)}-1}} \Big(\frac{\mu_n^{p-1}}{\mu_n - \mu_i} \Big) \Big],$$

$$\alpha_3^{(p)}(m_0) = \frac{p}{3} \sum_{n=1}^{n_0} \Big[\frac{V_{nn}^3}{(\lambda_n^{(3)}-1)!} \frac{d^{\lambda_n^{(3)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(3)}-1}} \Big(\mu_n^{p-1}\Big) +$$

$$+\frac{3}{(\lambda_n^{(2)}-1)!}\sum_{i\neq n}V_{nn}V_{in}V_{ni}\frac{d^{\lambda_n^{(2)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(2)}-1}}\Big(\frac{\mu_n^{p-1}}{\mu_n-\mu_i}\Big)+ \tag{2}$$

$$+\frac{3}{(\lambda_n^{(1)}-1)!}\sum_{i,j\neq n}V_{ni}V_{ij}V_{jn}\frac{d^{\lambda_n^{(1)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(1)}-1}}\Big(\frac{\mu_n^{p-1}}{(\mu_n-\mu_i)(\mu_n-\mu_j)}\Big)\Big],$$

$$\alpha_4^{(p)}(m_0)=\frac{p}{4}\sum_{n=1}^{n_0}\Big[\frac{V_{nn}^4}{(\lambda_n^{(4)}-1)!}\frac{d^{\lambda_n^{(4)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(4)}-1}}\Big(\mu_n^{p-1}\Big)+$$

$$+\frac{4}{(\lambda_n^{(3)}-1)!}\sum_{i\neq n}V_{nn}^2V_{in}V_{ni}\frac{d^{\lambda_n^{(3)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(3)}-1}}\Big(\frac{\mu_n^{p-1}}{\mu_n-\mu_i}\Big)+$$

$$+\frac{2}{(\lambda_n^{(2)}-1)!}\sum_{i,j\neq n}V_{ni}V_{jn}(2V_{nn}V_{ij}+V_{in}V_{nj})\frac{d^{\lambda_n^{(2)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(2)}-1}}\Big(\frac{\mu_n^{p-1}}{(\mu_n-\mu_i)(\mu_n-\mu_j)}\Big)+$$

$$+\frac{4}{(\lambda_n^{(1)}-1)!}\sum_{i,j,m\neq n}V_{ij}V_{jm}V_{mn}V_{ni}\frac{d^{\lambda_n^{(1)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(1)}-1}}\Big(\frac{\mu_n^{p-1}}{(\mu_n-\mu_i)(\mu_n-\mu_j)(\mu_n-\mu_m)}\Big)\Big],$$

где $V_{ij}=(P\omega_i,\omega_j)$ *– скалярное произведение,* $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– собственные значения оператора* T*,* $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным значениям,* ν_n *– кратность соответственного собственного значения* μ_n*,* $\lambda_n^{(k)}=\begin{cases}\nu_n^k, & \nu_n>1,\\ k, & \nu_n=1.\end{cases}$

Доказательство. Согласно определению первой поправки теории возмущения и теореме о вычетах, имеем

$$\alpha_1^{(p)}(m_0)=-\frac{p}{2\pi i}Sp\int\limits_{T_{n_0}}\mu^{p-1}\Big[PR_\mu(T)\Big]d\mu=$$

$$=-\frac{p}{2\pi i}\Big(\int\limits_{T_{n_0}}\mu^{p-1}\Big[PR_\mu(T)\Big]\omega_n d\mu,\omega_n\Big)=\frac{p}{2\pi i}\Big(\int\limits_{T_{n_0}}\mu^{p-1}\sum_i\frac{P\omega_i}{\mu-\mu_i}d\mu,\omega_i\Big)=$$

$$=\frac{p}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\sum_i\frac{\mu^{p-1}}{\mu-\mu_i}(P\omega_i,\omega_i)d\mu=p\sum_{n=1}^{m_0}\sum_i(P\omega_i,\omega_i)\operatorname*{res}_{\mu_n}\frac{\mu^{p-1}}{\mu-\mu_i}.$$

Обозначим через V_{ij} скалярное произведение $(P\omega_i,\omega_j)$. Собственные значения μ_n оператора T кратности ν_n. Если $i=n$, тогда

$$\sum_{n=1}^{m_0}\operatorname*{res}_{\mu_n}\frac{\mu^{p-1}}{(\mu-\mu_i)}=\sum_{n=1}^{n_0}\operatorname*{res}_{\mu_n}\frac{\mu^{p-1}}{(\mu-\mu_i)^{\nu_n}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{(\lambda_n^{(1)}-1)!}\lim_{\mu\to\mu_n}\frac{d^{\lambda_n^{(1)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(1)}-1}}\Big(\mu^{p-1}\Big)=\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{(\lambda_n^{(1)}-1)!}\frac{d^{\lambda_n^{(1)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(1)}-1}}\Big(\mu_n^{p-1}\Big).$$

Если $i \neq n \operatorname*{res}_{\mu_n} \dfrac{\mu^{p-1}}{(\mu-\mu_i)} = 0$. Окончательно получим

$$\alpha_1^{(p)}(m_0) = p\sum_{n=1}^{n_0} \frac{V_{nn}}{(\lambda_n^{(1)}-1)!} \frac{d^{\lambda_n^{(1)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(1)}-1}} \Big(\mu_n^{p-1}\Big).$$

Рассмотрим вторую поправку:

$$\alpha_2^{(p)}(m_0) = \frac{p}{4\pi i} Sp \int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1}\Big[PR_\mu(T)\Big]^2 d\mu =$$

$$= \frac{p}{4\pi i}\Big(\int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1}\Big[PR_\mu(T)\Big]^2 \omega_n d\mu, \omega_n\Big) =$$

$$= \frac{p}{4\pi i}\int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1}\Big(\Big[\sum_i \frac{P\omega_i}{\mu-\mu_i}\Big]^2, \omega_i\Big) d\mu =$$

$$= \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{m_0}\sum_{i,j} V_{ij}V_{ji} \operatorname*{res}_{\mu_n} \frac{\mu^{p-1}}{(\mu-\mu_i)(\mu-\mu_j)}.$$

Возможны следующие варианты вычисления вычета:

1) $\mu_i = \mu_n$, $\mu_j \neq \mu_n$

$$\sum_{n=1}^{m_0} \operatorname*{res}_{\mu_n} \frac{\mu^{p-1}}{(\mu-\mu_i)(\mu-\mu_j)} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{(\lambda_n^{(1)}-1)!} \frac{d^{\lambda_n^{(1)}-1}}{d\mu^{\lambda_n^{(1)}-1}}\Big(\frac{\mu^{p-1}}{\mu-\mu_j}\Big);$$

2) $\mu_i = \mu_j = \mu_n$

$$\sum_{n=1}^{m_0} \operatorname*{res}_{\mu_n} \frac{\mu^{p-1}}{(\mu-\mu_i)(\mu-\mu_j)} = \sum_{n=1}^{n_0} \operatorname*{res}_{\mu_n} \frac{\mu^{p-1}}{(\mu-\mu_n)^{\lambda_n^{(2)}}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{(\lambda_n^{(2)}-1)!} \frac{d^{\lambda_n^{(2)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(2)}-1}}\Big(\mu_n^{p-1}\Big).$$

Таким образом,

$$\alpha_2^{(p)}(m_0) = \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{n_0}\Big[\frac{V_{nn}^2}{(\lambda_n^{(2)}-1)!} \frac{d^{\lambda_n^{(2)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(2)}-1}}\Big(\mu_n^{p-1}\Big) +$$

$$+ \frac{2}{(\lambda_n^{(1)}-1)!}\sum_{j\neq n} V_{nj}V_{jn} \frac{d^{\lambda_n^{(1)}-1}}{d\mu_n^{\lambda_n^{(1)}-1}}\Big(\frac{\mu_n^{p-1}}{\mu_n-\mu_j}\Big)\Big].$$

Аналогично находим третью и четвертую поправки. □

В случае, когда спектр оператора T простой, полученные формулы (2) совпадают с ранее полученными в работе [7] формулами нахождения первых четырех поправок теории возмущений.

2. Численный эксперимент

Для проверки полученных формул (2) в случае кратных собственных значений невозмущенного оператора T рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа. Пусть оператор $T = -\Delta$ задан на прямоугольнике $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ с границей Γ. Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. В качестве возмущения P возьмем оператор умножения на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $p(x, y)$, определенную на прямоугольнике Π.

Рассмотрим спектральную задачу

$$(T + P)\varphi = \beta\varphi, \ \ \varphi \in D_T. \tag{3}$$

$$D_T = \Big\{\varphi \mid \varphi \in C^2(\Pi)\bigcap C[\Pi], \Delta\varphi \in L_2[\Pi] : \varphi\Big|_{\Gamma} = 0\Big\}.$$

Известно, что собственные значения μ_{nk} и собственные функции ω_{nk} оператора T имеют вид:

$$\mu_{nk} = \pi^2\Big(\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\Big), \ \omega_{nk}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad n, k = \overline{1, \infty}.$$

Система собственных функций $\{\omega_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2[\Pi]$. В случае, когда $\dfrac{a^2}{b^2}$ – рациональное число оператор T имеет кратные собственные значения.

Пронумеруем собственные значения $\{\mu_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ и собственные функции $\{\omega_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ оператора T одним индексом в порядке возрастания величин μ_{nk} с учетом кратности.

В таблицах 1 и 2 приведены результаты вычислений первых собственных значений спектральной задачи (3), найденных методом РС и методом Бубнова – Галеркина. В первом случае собственные значения обозначены $\widehat{\beta}_n$, во втором – $\widetilde{\beta}_n$. Причем суммы числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ в методе РС приближались их четвертыми частичными суммами, используя формулы (2).

Проведенные расчеты показывают, что результаты вычислений первых собственных значений возмущенного оператора Лапласа методом РС, используя формулы (2) и методом Бубнова – Галеркина хорошо согласуются.

Таблица 1

Собственные значения $\widehat{\beta}_n$ и $\widetilde{\beta}_n$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленных при $a = 1$, $b = 1$ и $p(x, y) = x + y$

n	μ_n	$\widehat{\beta}_n$	$\widetilde{\beta}_n$	$\lvert\widehat{\beta}_n - \widetilde{\beta}_n\rvert$
1	$19,739$	$20,748$	$20,737$	$0,011$
2	$49,348$	$50,356$	$50,347$	$0,009$
3	$49,348$	$50,356$	$50,347$	$0,009$
4	$78,957$	$79,969$	$79,958$	$0,011$
5	$98,696$	$99,708$	$99,695$	$0,013$
6	$98,696$	$99,708$	$99,695$	$0,013$
7	$128,305$	$129,319$	$129,305$	$0,014$
8	$128,305$	$129,319$	$129,305$	$0,014$
9	$167,783$	$168,799$	$168,782$	$0,017$
10	$167,784$	$168,799$	$168,782$	$0,017$
11	$177,654$	$178,672$	$178,653$	$0,019$

Таблица 2

Собственные значения $\widehat{\beta}_n$ и $\widetilde{\beta}_n$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленных при $a = 2$, $b = 1$ и $p(x, y) = (1 + i)x^4y^2$

n	μ_n	$\widehat{\beta}_n$	$\widetilde{\beta}_n$	$\lvert\widehat{\beta}_n - \widetilde{\beta}_n\rvert$
1	$12,3370$	$12,8462 + 0,4278i$	$12,8443 + 0,4266i$	$0,002$
2	$19,7392$	$20,5362 + 0,7586i$	$20,5352 + 0,7526i$	$0,006$
3	$32,0762$	$32,9342 + 0,8121i$	$32,9303 + 0,8135i$	$0,004$
4	$41,9458$	$42,5287 + 0,4998i$	$42,5247 + 0,4945i$	$0,007$
5	$49,3480$	$50,0276 + 0,6821i$	$50,0228 + 0,6758i$	$0,008$
6	$49,3480$	$50,0276 + 0,7821i$	$50,0597 + 0,8646i$	$0,089$

Литература

1. Садовничий, В.А. Теория операторов: учеб. для вузов с углубленным изучением математики / В.А. Садовничий. – 5-е изд. стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.
2. Садовничий, В.А. Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Тр. семинара И.Г. Петровского. – М.: МГУ, 1994. – Вып. 17. – С. 244 – 248.
3. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Дифференц. уравнения. – 1998. – № 1. – С. 50 – 53.
4. Кадченко, С.И. Новый метод вычисления собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда / С.И. Кадченко // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2000. – Т. 5, № 6. – С. 4 – 10.
5. Кадченко, С.И. Новый метод вычисления первых собственных чисел дискретных несамосопряженных операторов / С.И. Кадченко // Уравнения соболевского типа: сб. науч. работ. – Челябинск, 2002. – С. 42 – 59.
6. Кадченко, С.И. Вычисление сумм рядов Рэлея – Шредингера возмущенных самосопряженных операторов / С.И. Кадченко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2007. – Т. 47, № 9. – С. 1494 – 1505.
7. Кадченко, С.И. Метод регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 4, №37(170). – С. 4 – 23.

Кадченко Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет, kadchenko@masu.ru.

Какушкин Сергей Николаевич, аспирант, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет, kakushkin-sergei@mail.ru.

Поступила в редакцию 15 января 2011 г.