МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.948

НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

А.Б. Бредихина

THE NONLINEAR PROJECTION REGULARIZATION METHOD

A.B. Bredikhina

В статье рассмотрен метод проекционной регуляризации, в котором параметр регуляризации выбран из принципа невязки. Получена оценка погрешности этого метода на классе корректности M_r.

Ключевые слова: операторные уравнения, регуляризация, оптимальный метод, оценка погрешности, некорректная задача.

The projection regularization method was reduced in this article. The regularization parameter was chosen from the residual principle. We obtain an estimate the error of this method on the class of correctness M_r.

Keywords: operator equations, regularization, optimal method, error estimate, ill-posed problem.

Введение

В настоящей статье приведено обоснование метода проекционной регуляризации [1] с параметром регуляризации, выбранным из принципа невязки, названным в дальнейшем нелинейным методом проекционной регуляризации [2]. Особенностью этого метода является то, что для получения приближенного решения он использует в качестве исходной информации лишь f_δ, и $\delta > 0$.

Далее в предположении, что точное решение операторного уравнения u_0 принадлежит классу корректности M_r, получена точная по порядку оценка погрешности этого метода и доказана его оптимальность по порядку на этом классе.

1. Постановка задачи и основные понятия

Пусть H– гильбертово пространство, A и B – линейные ограниченные операторы, отображающие H в H такие, что операторы A^*A и BB^* положительно определены, а A^* и B^* операторы сопряженные A и B. Предположим, что $\|A^{-1}\| = \infty$, $M_r = B\overline{S}_r$, где $\overline{S}_r = \{\ v : \ \ v \in H, \ \|v\| \leq r\}$, а $N_r = AM_r$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f; \quad u \in H, \quad f \in H. \tag{1}$$

Определение 1. *Множество M_r будем называть классом корректности для уравнения* (1), *если сужение $A^{-1}_{N_r}$ оператора A^{-1} на множество N_r равномерно непрерывно.*

Лемма 1. *Для того, чтобы M_r было классом корректности для уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы сужение $A^{-1}_{N_r}$ оператора A^{-1} было непрерывно в нуле (см. [2]).*

Предположим, что при $f = f_0$ существует решение $u_0 \in H$ уравнения (1), но точное значение правой части f_0 нам не известно, а вместо него даны $f_\delta \in H$ и $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$.

Требуется, используя исходную информацию f_δ и δ, определить приближенное решение u_δ уравнения (1) и получить оценку для величины $\|u_\delta - u_0\|$.

Определение 2. *Семейство операторов $\{ T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0 \}$ будем называть методом приближенного решения уравнения* (1) *на множестве M_r, если для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает H в H и $T_\delta f_\delta \longrightarrow u_0$ при $\delta \longrightarrow 0$ равномерно на множестве M_r при условии, что $\|f_\delta - Au_0\| \le \delta$.*

Из условий, наложенных на операторы A и B на основании леммы, доказанной в [3], имеют место полярные разложения этих операторов $A = Q\overline{A}$ и $B = \overline{B}P$, где P и $Q-$ унитарные операторы $\overline{A} = \sqrt{A^*A}$, $\overline{B} = \sqrt{BB^*}$. Кроме того, предположим, что спектр $Sp(\overline{A})$ оператора $\overline{A}$ совпадает с отрезком $[0, \|A\|]$, а

$$\overline{B} = G(\overline{A}), \tag{2}$$

где $G(\sigma)$ строго возрастающая, непрерывная на $[0, \|A\|]$ функция такая, что $G(0) = 0$.

Из полярного представления оператора A следует, что уравнение (1) можно заменить эквивалентным

$$\overline{A}u = g, \tag{3}$$

где $g = Q^* f$, а Q^* – оператор, сопряженный Q.

Лемма 2. *Пусть $M_r = B\overline{S}_r$, а $\overline{B} = \sqrt{BB^*}$. Тогда $M_r = \overline{B}\ \overline{S}_r$.*

Доказательство. Пусть $u_0 \in M_r$. Тогда существует элемент $v_0 \in H$ такой, что $\|v_0\| \le r$ и

$$u_0 = Bv_0.$$

Рассмотрим элемент $v_1 = Pv_0$. Так как $P-$ унитарный оператор, то $\|v_1\| \le r$. Используя полярное представление оператора B, получим, что $u_0 = \overline{B}v_1$ и, следовательно $M_r \subset \overline{B}\ \overline{S}_r$.

Если $u_0 \in \overline{B}\ \overline{S}_r$, то существует элемент $v_1 \in H$ такой, что $u_0 = \overline{B}v_1$ и $\|v_1\| \le r$. Обозначим через v_0 элемент $P^{-1}v_1$. Учитывая унитарность оператора P^{-1}, получим, что $\|v_0\| \le r$, а ввиду полярного представления оператора B, что $u_0 = Bv_0$. Следовательно, $\overline{B}\ \overline{S}_r \subset M_r$.
Тем самым лемма доказана. □

Предположим, что при $g = g_0$ существует точное решение u_0 уравнения (3), которое принадлежит множеству M_r, но точное значение правой части g_0 нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $g_\delta \in H$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|g_\delta - g_0\| \le \delta$. Требуется по исходным данным M_r, g_δ и δ определить приближенное решение u_δ уравнения (3) и оценить уклонение $\|u_\delta - u_0\|$ приближенного решения u_δ от точного u_0.

2. Нелинейный метод проекционной регуляризации

В методе проекционной регуляризации [1] используется регуляризующее семейство операторов $\{ P_\alpha : 0 < \alpha \le \|A\| \}$, действующих из H в H и определяемых формулой

$$P_\alpha g = \int_\alpha^{\|A\|} \frac{1}{\sigma} dE_\sigma g, \quad \alpha \in (0, \|A\|], \tag{4}$$

где $\{E_\sigma \ : \ 0 \le \sigma \le \|A\| \ \}$– спектральное разложение единицы E, порожденное оператором $\overline{A}$.

Приближенное решение уравнения (3) определим формулой

$$u_\delta^\alpha = P_\alpha g_\delta. \tag{5}$$

Для выбора параметра регуляризации $\hat\alpha = \hat\alpha(g_\delta, \delta)$ в формуле (5) по исходным данным (g_δ, δ) используем уравнение

$$\|\overline{A}u_\delta^\alpha - g_\delta\|^2 = 16\delta^2. \tag{6}$$

Лемма 3. *Если* $\|g_\delta\| > 4\delta$, *то существует значение* $\hat\alpha = \hat\alpha(g_\delta, \delta)$, *удовлетворяющее уравнению* (6).

Доказательство. Обозначим через $\vartheta(\alpha)$ величину квадрата невязки $\|\overline{A}u_\delta^\alpha - g_\delta\|^2$, $0 < \alpha \le \|A\|$.

Так как из (4) следует, что

$$\overline{A}u_\delta^\alpha - g_\delta = \overline{A}\int_\alpha^{\|A\|} \frac{1}{\sigma} dE_\sigma g_\delta - g_\delta, \tag{7}$$

то из (7) следует, что

$$\vartheta(\alpha) = \int_0^\alpha d(E_\sigma g_\delta, g_\delta), \tag{8}$$

а из (8) неубывание и непрерывность функции $\vartheta(\alpha)$ на отрезке $[0, \|A\|]$.
Из того, что $\vartheta(0) = 0$, а $\vartheta(\|A\|) = \|g_\delta\|^2$ следует существование значения $\hat\alpha$, удовлетворяющего уравнению (6). □

В дальнейшем приближенное решение u_δ уравнения (3) определим формулой

$$u_\delta = \hat{T}_\delta g_\delta = \begin{cases} P_{\hat\alpha(g_\delta,\delta)} g_\delta, & \text{при} \quad \|g_\delta\| > 4\delta, \\ 0 \quad , & \text{при} \quad \|g_\delta\| \le 4\delta, \end{cases} \tag{9}$$

где P_α определен формулой (4), а $\hat\alpha(g_\delta, \delta)$ уравнением (6).

Лемма 4. *Оператор* $\hat{T}_\delta$, *определяемый формулой* (9), *непрерывен на пространстве* H *(см.[2]).*

Обозначим через $\overline{\alpha}(\delta)$ значение параметра регуляризации, выбранное из уравнения

$$r\alpha G(\alpha) = \delta. \tag{10}$$

Лемма 5. *Пусть оператор* P_α *определен формулой* (4). *Тогда*

$$\|P_\alpha\| = \frac{1}{\alpha}.$$

Доказательство. Из (4) следует, что

$$\|P_\alpha\| \le \frac{1}{\alpha},$$

а ввиду того, что $\dfrac{1}{\alpha} \in Sp(P_\alpha)$,

$$\|P_\alpha\| = \frac{1}{\alpha}.$$

□

Лемма 6. *Если* $\|g_\delta\| > 4\delta$, *а* $\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$ *определено* (6), *то для любого* $\alpha > 0$ *из того, что*

$$\|\overline{A}P_\alpha g_\delta - g_\delta\| < 4\delta \tag{11}$$

следует, что

$$\|P_\alpha\| \geq \|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}\|.$$

Доказательство. Так как функция $\vartheta(\alpha)$, определяемая формулой (8), не убывает на отрезке $[0, \|A\|]$ и

$$\vartheta(\alpha) = \|\overline{A}u_\delta^\alpha - g_\delta\|^2,$$

то из (8) и (11) следует, что $\alpha \leq \hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$. Таким образом, из леммы 5 следует утверждение леммы. □

Лемма 7. *Пусть* $\|g_\delta\| > 4\delta$. *Тогда для значений* $\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$ *и* $\overline{\alpha}(\delta)$ *выполняются следующие соотношения*

$$\|\overline{A}u_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - g_\delta\| \leq 3\delta, \qquad \hat{\alpha}(g_\delta, \delta) \geq \overline{\alpha}(\delta)$$

и

$$\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_0\| \leq rG[\overline{\alpha}(\delta)].$$

Доказательство. Так как $u_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} = P_{\overline{\alpha}(\delta)}g_\delta$, то из (10) и леммы 5 следует, что

$$\|u_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - P_{\overline{\alpha}(\delta)}g_0\| \leq r\ G[\overline{\alpha}(\delta)]. \tag{12}$$

Обозначим через $H_\alpha^\perp$ подпространство H, определяемое формулой

$$H_\alpha^\perp = [E - E_\alpha]H.$$

Тогда из (4) будет следовать, что

$$P_\alpha g = \overline{A}\ ^{-1}g \ \text{ при } \ g \in H_\alpha^\perp. \tag{13}$$

Учитывая инвариантность подпространства $H_\alpha^\perp$ относительно оператора $\overline{A}$, доказанную в [4, с. 336] и соотношения (13) получаем

$$\|\overline{A}u_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - \overline{A}u_0^{\overline{\alpha}(\delta)}\| \leq \delta, \tag{14}$$

где $u_0^{\overline{\alpha}(\delta)} = P_{\overline{\alpha}(\delta)}g_0$.

Так как

$$\|\overline{A}u_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - g_0\|^2 = \int_0^{\overline{\alpha}(\delta)} d(E_\sigma g_0, g_0),$$

а

$$\int_0^{\overline{\alpha}(\delta)} d(E_\sigma g_0, g_0) = \int_0^{\overline{\alpha}(\delta)} \sigma^2 G^2(\sigma) d(E_\sigma v_0, v_0),$$

то

$$\|Au_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - g_0\| \leq r\overline{\alpha}(\delta)G[\overline{\alpha}(\delta)]. \tag{15}$$

Из (10) и (15) следует, что

$$\|Au_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - g_0\| \leq \delta. \tag{16}$$

А из (14) и (16) вытекает неравенство

$$\|\overline{A}u_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)} - g_\delta\| \leq 3\delta. \tag{17}$$

Из лемм 5 и 6, соотношения (17) имеем

$$\hat{\alpha}(g_\delta, \delta) \geq \overline{\alpha}(\delta). \tag{18}$$

Так как

$$\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_0\| \leq \frac{\delta}{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)},$$

то из (10), (12) и (18) следует, что

$$\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}g_0\| \leq r\ G[\overline{\alpha}(\delta)].$$

Тем самым лемма доказана. □

Следуя [5], определим функции $\omega_1(\tau, r)$ и $\omega(\tau, r)$

$$\omega_1(\tau, r) = \sup\{\|u_1 - u_2\|\ :\ u_1,\ u_2 \in M_r,\ \|Au_1 - Au_2\| \leq \tau\}, \tag{19}$$

$$\omega(\tau, r) = \sup\{\|u\|\ :\ u \in M_r,\ \|Au\| \leq \tau\}, \quad \tau, r > 0. \tag{20}$$

Лемма 8. *Пусть функции $\omega_1(\tau, r)$ и $\omega(\tau, r)$ определены формулами (19) и (20). Тогда их связывает соотношение*

$$\omega_1(\tau, r) = \omega(\tau, 2r).$$

Доказательство. Доказательство приведено в [6] на с. 17. □

Лемма 9. *Пусть $\kappa \geq 1$. Тогда справедливо соотношение*

$$\omega(\kappa\tau, \kappa r) \leq \kappa\omega(\tau, r).$$

Доказательство. Доказательство приведено в [6] на с. 17. □

Пусть $\overline{\sigma}(\tau)$ решения уравнения

$$rG(\sigma)\sigma = \tau.$$

Лемма 10. *Если выполнены все условия на операторы A и B, сформулированные выше, а $\tau < r\ \|\overline{A}\ \overline{B}\|$, то справедлива формула*

$$\omega(\tau, r) \leq rG[\overline{\sigma}(\tau)].$$

Доказательство. Представим пространство H в виде ортогональной суммы

$$H = H_1 \dotplus H_2, \tag{21}$$

подпространств $H_1 = E_{\overline{\sigma}(\tau)}H$ и $H_2 = (E - E_{\overline{\sigma}(\tau)})H$.

Из теоремы, доказанной в [4, с.336], следует, что подпространства H_1 и H_2 инвариантны для операторов $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Из того, что $u_0 \in M_r$, а
$$\|\overline{A}u_0\| \le \tau, \tag{22}$$
на основании леммы 2 следует существование элемента $v_0 \in H$ такого, что
$$\|v_0\| \le r \tag{23}$$
и
$$u_0 = \overline{B}v_0. \tag{24}$$

Используя (21), представим элемент v_0 в виде ортогональной суммы
$$v_0 = v_1 \dot{+} v_2, \tag{25}$$
где $v_i = pr(v_0, H_i), \quad i = 1, 2.$

Пусть $r_1 = \|v_1\|$, а $\quad r_2 = \|v_2\|$. Тогда из (23) и (25) следует, что
$$r_1^2 + r_2^2 \le r^2. \tag{26}$$

Из инвариантности подпространств $H_i, \quad i = 1, 2$ относительно оператора $\overline{B}$ и из (24) следует, что $u_0 = u_1 + u_2$ и
$$u_i = \overline{B}v_i \in H_i, \quad i = 1, 2. \tag{27}$$

Из инвариантности подпространств H_1 и H_2 относительно оператора $\overline{A}$ будем иметь, что
$$\overline{A}u_i \in H_i; \quad i = 1, 2. \tag{28}$$

Из (22), (27) и (28) следует, что
$$\|\overline{A}u_i\| \le \frac{r_i}{r}\tau; \quad i = 1, 2. \tag{29}$$

Так как, следуя (2), $G(\sigma)$ строго возрастает, то из (27) следует, что
$$\|u_1\| \le r_1\ G[\overline{\sigma}(\tau)], \tag{30}$$
а из (29), что
$$\|u_2\| \le \frac{r_2\ \tau}{r\ \overline{\sigma}(\tau)}. \tag{31}$$

Ввиду того, что
$$r_2\ G[\overline{\sigma}(\tau)]\overline{\sigma}(\tau) = \frac{r_2}{r}\tau, \tag{32}$$
из (31) и (32) следует, что
$$\|u_2\| \le r_2 G[\overline{\sigma}(\tau)]. \tag{33}$$

Из (26), (27), (30) и (33) следует, что
$$\|u_0\| \le r\ G[\overline{\sigma}(\tau)]. \tag{34}$$

Ввиду произвольности u_0 из (22)–(24), (34) и леммы 2 следует, что
$$\omega(\tau, r) \le r\ G[\overline{\sigma}(\tau)].$$
Тем самым лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть* $u_0 \in M_r$, $\|g\| > 4\delta$, u_δ *определен формулой* (9), *а* $\overline{\alpha}(\delta)-$ *формулой* (10). *Тогда справедлива оценка*

$$\|u_\delta - u_0\| \le 7\ r\ G[\overline{\alpha}(\delta)].$$

Доказательство. Из равенства $u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} = P_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} g_0$ и формулы (4) получаем

$$u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} = \int_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}^{\|A\|} \frac{1}{\sigma} dE_\sigma g_0. \tag{35}$$

Обозначим через H_3 подпространство H, определяемое формулой

$$H_3 = (E - E_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)})H.$$

Тогда из равенства $u_0 = \overline{B} v_0$ следует

$$u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} = \overline{B} v_3, \tag{36}$$

где $v_3 = pr(v_0, H_3)-$ метрическая проекция элемента v_0 на подпространство H_3.

Из (4), (9), (13), (35) получаем

$$\|\overline{A}\ u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} - \overline{A}\ u_\delta\|^2 = \int_{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)}^{\|A\|} d(E_\sigma g_\delta - g_0, g_\delta - g_0) \le \|g_\delta - g_0\|^2 \le \delta^2. \tag{37}$$

Из соотношения (37) и равенства $\|\overline{A}\ u_\delta - g_\delta\| = 4\delta$ следует, что

$$\|\overline{A}\ u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} - g_\delta\| \le 5\delta, \tag{38}$$

а из (38), что

$$\|\overline{A}\ u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} - \overline{A}\ u_0\| \le 6\delta. \tag{39}$$

Так как из (36) следует, что $u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} = \overline{B}\ v_3$, где $\|v_3\| \le r$, то из (39) следует, что

$$\|\ u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} -\ u_0\| \le \omega_1(6\delta, r). \tag{40}$$

Из лемм 8, 9, 10 и соотношения (40) следует, что

$$\|\ u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} -\ u_0\| \le 6rG[\overline{\alpha}(\delta)]. \tag{41}$$

Так как из леммы 7 $\hat{\alpha}(g_\delta,\delta) \ge \overline{\alpha}(\delta)$, то

$$\frac{1}{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} \le \frac{1}{\overline{\alpha}(\delta)}. \tag{42}$$

Из леммы 5 и соотношения (42) следует, что

$$\|\ u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} -\ u_\delta\| \le \frac{\delta}{\overline{\alpha}(\delta)}. \tag{43}$$

Из (10) и (43) следует, что

$$\|\ u_0^{\hat{\alpha}(g_\delta,\delta)} -\ u_\delta\| \le rG[\overline{\alpha}(\delta)]. \tag{44}$$

Из (41) и (44) следует утверждение теоремы. □

Работа поддержана грантом р_урал_а № 10-01-96000.

Литература

1. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 206 с.
2. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2006.– Т. 9, №4. – С. 154 – 168.
3. Менихес, Л.Д. Конечномерная аппроксимация в методе М.М. Лаврентьева /Л.Д. Менихес, В.П. Танана // Сиб. журн. вычисл. математики. – 1998. – Т. 1, №1.– С. 416 – 423.
4. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука , 1965. – 520 с.
5. Иванов, В.К. Об оценке погрешности при решении некорректных задач / В.К. Иванов, Т.И. Королюк // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1969. – Т. 9, №1. – С. 30 – 41.
6. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана. – М.: Наука, 1981. – 156 с.

References

1. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i eye prilozheniya* [The theory of linear ill–posed problems and applications]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 206 p.
2. Tanana V.P., Yaparova N.M. The optimum in order method of solving conditionally-correct problems [Ob optimal'nom po poryadku metode resheniya uslovno-korrektnykh zadach]. *Siberian J. of Numer. Mathematics*, 2006, vol.9, no. 4, pp. 154 – 168.
3. Menikhes L.D., Tanana V.P. The finite-dimensional approximation for the Lavrent'ev method [Konechnomernaya approksimatsiay v metode Lavrent'eva].*Siberian J. of Numer. Mathematics*, 1998, vol.1, no. 1, pp. 416 – 423.
4. Lusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 520 p.
5. Ivanov V.K., Koroluk T.I. About the estimation of error in the solving of ill-posed problems [Ob otsenke pogreshnosti pri reshenii nekorrektnyhk zadach]. *Comput. Math., and Math. Phys.*, 1969, vol.9, no. 1, pp. 30 – 41.
6. Tanana V.P. *Metody resheniya operatornyhk uravneniy* [Methods for the solution of operator equations]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 156 p.

Анна Борисовна Бредихина, ассистент, кафедра «Вычислительная математика», Южно-Уральский государственный университет (Россия, г. Челябинск), bredikhina-ann@yandex.ru.

Anna Borisovna Bredikhina, assistant, Department «Computational Mathematics », South Ural State University (Russia, Chelyabinsk), bredikhina-ann@yandex.ru.

Поступила в редакцию 7 июня 2011 г.