

НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

А.А. Замышляева

THE INITIAL-FINISH VALUE PROBLEM FOR NONHOMOGENIOUS BOUSSINESQUE – LÖVE EQUATION

A.A. Zamyshlyayeva

Рассматривается начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява. Проводится редукция к абстрактной начально-конечной задаче для уравнения соболевского типа второго порядка. Получены достаточные условия для однозначной разрешимости исходной и абстрактной задач.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, M, N -функции, начально-конечная задача.

We investigate the initial-finish value problem for the Boussinesque–Löve equation by reducing it to the initial-finish value problem for the Sobolev type equation of the second order. We obtain sufficient conditions about the unique solvability of original and abstract problems.

Keywords: the Sobolev type equations, the M, N -functions, the initial-finish value problem.

Введение

Рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява [1]

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_t + \beta(\Delta - \lambda'')u + f, \quad (1)$$

описывающее продольные колебания упругого стержня с учетом поперечной инерции и при внешней нагрузке, где параметры $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0, \beta > 0$ характеризуют среду, причем отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу.

Задачу Дирихле для уравнения (1) удается в подходящих банаховых пространствах редуцировать к абстрактному уравнению соболевского типа [2]

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0v + f. \quad (2)$$

Нашей целью является изучение начально-конечной задачи для такого уравнения. Термин «начально-конечная задача» появился относительно недавно, и отражает тот факт, что при постановке такой задачи для уравнения (1) часть данных задается в начале временного промежутка $[0, T]$, а другая часть – в конце. Первоначально такая задача называлась «задачей сопряжения» и рассматривалась как обобщение задачи с данными на свободной поверхности. Именно в этом контексте была построена теория таких задач для линейных уравнений

соболевского типа первого порядка и разработаны приложения этой теории [3],[4]. Мы распространим эти идеи и методы на случай уравнений соболевского типа второго порядка.

В статье кроме Введения и Списка литературы содержится три параграфа. В п.1 приведены основные результаты теории операторных вырожденных M, N -функций [5]. В п.2, следуя [3], изучается абстрактная начально-конечная задача. П.3 посвящен постановке и исследованию начально-конечной задачи для уравнения (1).

1. Вырожденные M, N -функции и задача Шоуолтера – Сидорова

Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{G} – банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{G})$. Обозначим через \vec{B} пучок операторов B_1 и B_0 .

Определение 1. Множества $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{X})\}$ и $\sigma^A(\vec{B}) = \mathbb{C} \setminus \rho^A(\vec{B})$ будем называть A -резольвентным множеством и A -спектром пучка \vec{B} .

Заметим, что множество $\rho^A(\vec{B})$ всегда открыто, поэтому A -спектр $\sigma^A(\vec{B})$ пучка \vec{B} всегда замкнут.

Определение 2. Оператор-функцию $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\vec{B})$ будем называть A -резольвентой пучка \vec{B} .

A -резольвента пучка \vec{B} всегда аналитична в своей области определения.

Определение 3. Пучок операторов \vec{B} называется полиномиально ограниченным относительно оператора A (или просто полиномиально A -ограниченным), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \forall \mu \in \mathbb{C} (|\mu| > a) \Rightarrow (R_\mu^A(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{X})).$$

Если существует оператор $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{X})$, то пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен.

Если $\ker A \cap (\bigcap_{k=0}^1 \ker B_k) \neq \{0\}$, то пучок \vec{B} не будет полиномиально A -ограниченным.

Зафиксируем $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ – контур, ограничивающий круг, содержащий $\sigma^A(\vec{B})$. Введем и обсудим одно важное в дальнейшем условие. Если пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен, то можно потребовать, что

$$\int_{\gamma} R_M^A(\vec{B}) d\mu = \mathbb{O}. \tag{A}$$

Это условие, впервые введенное в [5], оказалось ключевым при рассмотрении уравнений соболевского типа высокого порядка. Заметим, что если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{X})$ или оператор $B_1 = \mathbb{O}$ (уравнение неполное), то условие (A) выполняется; а если оператор $A = \mathbb{O}$ и существует оператор $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{X})$, то нет.

Пусть пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен, и выполнено (A). Тогда имеют смысл следующие операторы как интегралы от аналитических оператор-функций:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu R_\mu^A(\vec{B}) A d\mu, Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu A R_\mu^A(\vec{B}) d\mu.$$

Лемма 1. Пусть пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен, и выполнено условие (A). Тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$ – проекторы.

Положим $\mathfrak{Y}^0 = \ker P$, $\mathfrak{G}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{Y}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{G}^1 = \operatorname{im} Q$. Из леммы следует, что $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \oplus \mathfrak{G}^1$. Через A^k (B_l^k) обозначим сужение оператора A (B_l) на \mathfrak{Y}^k , $k, l = 0, 1$.

Теорема 1. Пусть пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен и выполнено условие (A). Тогда действия операторов расщепляются:

- (i) $A^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^k; \mathfrak{G}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) $B_l^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^k; \mathfrak{G}^k)$, $k, l = 0, 1$;
- (iii) существует оператор $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^1; \mathfrak{Y}^1)$;
- (iv) существует оператор $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^0; \mathfrak{Y}^0)$.

Теперь рассмотрим уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0v. \quad (3)$$

Вектор-функцию $v \in C^2(\mathbb{R}; \mathfrak{Y})$ назовем *решением* уравнения (3), если оно обращает его в тождество. Решение $v = v(t)$ уравнения (3) называется *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если

$$P(\dot{v}(0) - v_1) = 0, \quad P(v(0) - v_0) = 0, \quad (4)$$

Определение 4. Оператор-функцию $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{G}))$ будем называть *пропагатором* уравнения (3), если для любого $v \in \mathfrak{Y}$ вектор-функция $v(t) = V^t v$ будет решением этого уравнения.

Рассмотрим семейства операторов

$$V_1^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$V_0^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(\vec{B}) (\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Как показано в [5], оба эти семейства являются пропагаторами уравнения (3). Причем если контур $\gamma \subset \rho^A(\vec{B})$ и ограничивает область Γ , такую, что $\sigma^A(B) \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$, то в силу теоремы Коши $V_1^t = V_0^t = \mathbb{O}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и утверждение очевидно.

Определение 5. Семейства $M^\bullet, N^\bullet : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ называются *семейством вырожденных M, N -функций* уравнения (3), если

- (i) M^\bullet и N^\bullet – пропагаторы уравнения (3);
- (ii) $\dot{M}^0 = N^0 = \mathbb{O}$; $M^0 = \dot{N}^0 = P$.

Теорема 2. Пусть пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен, выполнено условие (A). Тогда существует единственное семейство вырожденных M, N -функций уравнения (3), причем $M^t = V_0^t$, $N^t = V_1^t$.

Определение 6. Определим семейство операторов $\{K_q^1, K_q^2\}$ следующим образом:

$$K_0^1 = \mathbb{O}, \quad K_0^2 = \mathbb{I}$$

$$K_1^1 = H_0, \quad K_1^2 = -H_1$$

$$K_q^1 = K_{q-1}^2 H_0, \quad K_q^2 = K_{q-1}^1 - K_{q-1}^2 H_1, \quad q = 1, 2, \dots$$

Определение 7. Точка ∞ называется

- (i) *устраняемой особой точкой* A -резольвенты пучка \vec{B} , если $K_1^1 = K_1^2 \equiv \mathbb{O}$;
- (ii) *полосом* порядка $p \in \mathbb{N}$ A -резольвенты пучка \vec{B} , если $K_p^s \neq \mathbb{O}$, при некотором s , но $K_{p+1}^s \equiv \mathbb{O}$, при любом $s = 1, 2$;
- (iii) *существенно особой точкой* A -резольвенты пучка \vec{B} , если $K_p^2 \neq \mathbb{O}$ при любом $p \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. В дальнейшем, если пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен, выполнено условие (A) и ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его A -резольвенты, будем говорить, что пучок \vec{B} (A, p)-ограничен.

Теорема 3. Пусть пучок \vec{B} (A, p)-ограничен. Тогда при любых $v_k \in \mathfrak{V}, k = 0, 1$, существует единственное решение задачи (3), (4), представимое в виде: $v(t) = M^t P v_1 + N^t P v_0$.

2. Абстрактная начально-конечная задача

Пусть \mathfrak{V} и \mathfrak{G} – банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{G})$. Рассмотрим уравнение соболевского типа

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0v + f. \tag{5}$$

Если пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен, и выполнено условие (A), то, как следует из теоремы 2, существует единственное семейство вырожденных M, N -функций однородного уравнения (5). Пусть выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned} &A\text{-спектр пучка } \vec{B} \sigma^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}) \cup \sigma_1^A(\vec{B}), \text{ причем} \\ &\sigma_k^A(\vec{B}) \neq \emptyset, k = 0, 1; \text{ и существует контур } \gamma_0 \subset \mathbb{C}, \\ &\text{ограничивающий область } \Gamma_0 \subset \mathbb{C} \text{ такую, что} \\ &\Gamma_0 \cap \sigma_0^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}), \bar{\Gamma}_0 \cap \sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset. \end{aligned} \tag{B}$$

Тогда существует оператор

$$P_{in} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \mu R_\mu^A(\vec{B}) A d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}).$$

Потребуем выполнение еще одного условия

$$\int_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B}) d\mu = \mathbb{O}. \tag{A_0}$$

Аналогично лемме 1 можно получить следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен, и выполнены условия (A), (B), (A₀). Тогда P_{in} – проектор, причем $P_{in}P = PP_{in} = P_{in}$.

Построим оператор $P_{ex} = P - P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$. В силу леммы 2 оператор P_{ex} – проектор, причем $P_{in}P_{ex} = P_{ex}P_{in} = \mathbb{O}$. Возьмем произвольные векторы $v_0^0, v_1^0, v_0^T, v_1^T \in \mathfrak{V}$. Решение $v = v(t)$ уравнения (5) назовем *решением начально-конечной задачи* для уравнения (5), если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &P_{ex}(\dot{v}(0) - v_1^0) = 0, P_{ex}(v(0) - v_0^0) = 0; \\ &P_{in}(\dot{v}(T) - v_1^T) = 0, P_{in}(v(T) - v_0^T) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что если $\sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset$, то $P_{ex} = \mathbb{O}$ и $P_{in} = P$. Тогда задача (6) для уравнения (5) превращается в задачу (4), (5).

Введем в рассмотрение следующие семейства операторов:

$$N_{in}^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} R_{\mu}^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R},$$

$$M_{in}^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} R_{\mu}^A(\vec{B}) (\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R}.$$

Оба семейства хоть и не являются семейством вырожденных M, N -функций в смысле определения 5 (так как не удовлетворяют условию (ii)), но тем не менее обладают рядом полезных свойств.

Лемма 3. Пусть пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен, и выполнены условия (B), (A₀). Тогда

- (i) M_{in}^{\bullet} и N_{in}^{\bullet} – пропагаторы уравнения (5);
- (ii) $N_{in}^0 = M_{in}^0 = \mathbb{O}, N_{in}^{\dot{0}} = M_{in}^0 = P_{in}$.

Далее, построим семейства операторов $M_{ex}^t = M^t - M_{in}^t, N_{ex}^t = N^t - N_{in}^t$.

Лемма 4. Пусть пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен, и выполнены условия (A), (B), (A₀). Тогда

- (i) M_{ex}^{\bullet} и N_{ex}^{\bullet} – пропагаторы уравнения (5);
- (ii) $N_{ex}^0 = M_{ex}^0 = \mathbb{O}, N_{ex}^{\dot{0}} = M_{ex}^0 = P_{ex}$.

Теорема 4. Пусть пучок \vec{B} (A, p)-ограничен, и выполнены условия (B), (A₀). Тогда для любых $T \in \mathbb{R}, v_k^0, v_k^T \in \mathfrak{V}, k = 0, 1$, вектор-функции $f = f(t), t \in [0, T]$, такой, что $f^0 = (I - Q)f \in C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{F}^0) \cap C^{p+2}((0, T]; \mathfrak{F}^0), f^{in} = Q_{in}f \in C([0, T]; \mathfrak{F}^{in}), f^{ex} = Q_{ex}f \in C([0, T]; \mathfrak{F}^{ex})$ существует единственное решение $v = v(t)$ задачи (5), (6), которое к тому же имеет следующий вид:

$$v(t) = - \sum_{q=0}^p K_q^2(B_0^0)^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t) + M_{in}^{t-T} v_0^T + M_{ex}^t v_0^0 + N_{in}^{t-T} v_1^T + N_{ex}^t v_1^0 +$$

$$+ \int_0^t R_{ex}^{t-s} f^{ex}(s) ds - \int_t^T R_{in}^{t-s} f^{in}(s) ds, \tag{7}$$

где $R_{in}^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} R_{\mu}^A(\vec{B}) e^{\mu t} d\mu, R^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu, R_{ex}^t = R^t - R_{in}^t$.

Заметим, что если $T = 0$, то задача (6) превращается в задачу (4).

3. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^{∞} . Введем в рассмотрение пространства $\mathfrak{V} = \{v \in W_2^2(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$ и $\mathfrak{G} = L_2(\Omega)$. Пространство \mathfrak{V} – банахово с нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{V}}^2 = \int_{\Omega} \left(\sum_{k,l=1}^n v_{x_k x_l}^2 + \sum_{k=1}^n v_{x_k}^2 + v^2 \right) dx,$$

а пространство \mathfrak{G} – гильбертово со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Формулой

$$\langle Lv, w \rangle = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} v_{x_k x_k} w dx, v, w \in \mathfrak{V},$$

зададим оператор $L : \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{G}$. Справедлива

Теорема 5. [6] Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{G})$, его спектр $\sigma(L)$ вещественен, отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке $-\infty$.

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений оператора L , занумерованных по невозрастанию с учетом кратности, а через φ_k – множество соответствующих собственных функций, ортонормированных в смысле \mathfrak{G} . Положим $A = \lambda - L, B_1 = \alpha(L - \lambda')$, $B_0 = \beta(L - \lambda'')$. Имеет место

Теорема 6. [5] Пусть выполнено одно из следующих условий:

- (i) $\lambda \notin \{\lambda_k\}$;
- (ii) $(\lambda \in \{\lambda_k\} \wedge (\lambda \neq \lambda'))$;
- (iii) $(\lambda \in \{\lambda_k\} \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda''))$.

Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен.

Доказательство заключается в изучении A -спектра пучка \vec{B} . Во всех случаях A -спектр пучка \vec{B} составляют решения уравнений

$$(\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим A -спектр пучка \vec{B} в зависимости от ситуации.

- (i) $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{ \mu_k^{1,2} = \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda') \pm \sqrt{\alpha^2(\lambda' - \lambda_k)^2 - 4\beta(\lambda - \lambda_k)(\lambda'' - \lambda_k)}}{2(\lambda - \lambda_k)} : k \in \mathbb{N} \right\}$.
- (ii) $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{ \mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\} \cup \left\{ \mu_l = \frac{\beta(\lambda_l - \lambda'')}{\alpha(\lambda' - \lambda_l)} : \lambda = \lambda_l \right\}$.
- (iii) $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{ \mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\}$.

Замечание 2. Как нетрудно показать, в случае $(\lambda \in \{\lambda_k\}) \wedge (\lambda = \lambda' = \lambda'')$ пучок \vec{B} не будет полиномиально A -ограниченным.

Следствие 1. [5] Пусть выполнено условие либо (i), либо (iii) теоремы 6. Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеет место условие (A), причем ∞ – устранимая особая точка A -резольвенты пучка \vec{B} .

Замечание 3. В случае (ii) теоремы 6

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} ((\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k))^{-1} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k d\mu = \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\alpha(\lambda' - \lambda_k)} \neq \mathbb{O},$$

и поэтому условие (A) не выполняется.

Итак, в силу теоремы 6 и следствия 1 в случаях (i), (iii) пучок \vec{B} ($A, 0$)-ограничен. Поэтому построим семейства вырожденных M, N -функций уравнения (2):

$$M^t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$N^t = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_k^1(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \right.$$

$$+ \frac{\mu_k^2(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^2 - \mu_k^1)} e^{\mu_k^2 t} \left) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие членов с номерами k такими, что $\lambda = \lambda_k$. Кроме M, N -функций для постановки начально-конечной задачи необходимы проекторы P и P_{in} . Построим проектор P :

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если выполнено (i);} \\ \mathbb{I} - \sum_{\lambda=\lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & \text{если выполнено (iii).} \end{cases}$$

Для построения проектора P_{in} выберем область $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$, содержащую конечное множество точек A -спектра $\sigma_0^A(\vec{B})$ и такую, что $\partial\Gamma_0 \cap \sigma_0^A(\vec{B}) = \emptyset$. Как нетрудно видеть, область Γ_0 можно выбрать такой, что $\partial\Gamma_0 = \gamma_0$ – контур. По рецептам п.3 построим проектор

$$P_0 = \sum_{\lambda_k^i} \langle \cdot, \varphi_k^i \rangle \varphi_k^i.$$

Здесь $\{\lambda_k^i\} = \sigma^A(\vec{B}) \cap \bar{\Gamma}_0$, $\lambda_k^i = \lambda_k$, где k такое, что $\lambda_k \neq \lambda$.

Теперь у нас все готово для постановки и изучения начально-конечной задачи для уравнения (2). В цилиндре $\Omega \times (0, T)$, $T \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + f(t), \tag{8}$$

выберем произвольно векторы $v_k^0, v_k^T \in \mathfrak{V}, k = 0, 1$. Решение $v = v(t)$ уравнения (8) назовем решением начально-конечной задачи, если

$$\begin{aligned} P_{ex}(\dot{v}(0) - v_1^0) &= 0, \quad P_{ex}(v(0) - v_0^0) = 0; \\ P_{in}(\dot{v}(T) - v_1^T) &= 0, \quad P_{in}(v(T) - v_0^T) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $P_{ex} = P - P_{in}$.

По рецептам п.2 построим вырожденные M_{in}, N_{in} -функции. Для этого введем в рассмотрение множество индексов \mathfrak{K} элементов множества $\{\lambda_k^i\}$. Тогда

$$\begin{aligned} M_{in}^t &= \sum_{k \in \mathfrak{K}} \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \\ N_{in}^t &= \sum_{k \in \mathfrak{K}} \left(\frac{\mu_k^1(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_k^2(\lambda - \lambda_k) + \alpha(\lambda' - \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^2 t} \right) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k. \end{aligned}$$

Теперь в силу теоремы 4 и следствия 1 имеет место

Теорема 7. При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ таком, что выполнено условие либо (i), либо (iii) теоремы 6, и любых $T \in \mathbb{R}_+, v_k^0, v_k^T \in \mathfrak{V}, k = 0, 1$, существует единственное решение задачи (8),(9), которое к тому же имеет вид (7).

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и поддержку в работе.

Литература

1. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977.
2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
3. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22–28.
4. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2011. – №17 (234), вып. 8. – С. 113–114.
5. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С.45 – 54.

References

1. Uizem J. *Lineynye i nelineynye volny* [Linear and nonlinear waves]. Moscow, Mir, 1977.
2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2003.
3. Zagrebina S.A. On Showalter – Sidorov problem [O zadache Shouoltera – Sidorova] *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2007, no. 3, pp. 22 – 28.
4. Manakova N.A., Dylkov A.G. Optimal control of solutions of initial-finish problem for the linear Sobolev type equations [Optimal'noe upravlenie resheniyami nachal'no-konechnoy zadachi dlya lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa] *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*, 2011, no. 17 (234), vyp. 8, pp. 113 – 114.
5. Zamyshlyayeva A.A. The phase spaces of a class of linear sobolev type equations of the second order [Fazovye prostranstva odnogo klassa lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2003, vol. 8, no. 4, pp.45 – 54.

Алена Александровна Замышляева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (Россия, г. Челябинск), alzama@mail.ru.

Alyona Aleksandrovna Zamyshlyayeva, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor, Department «Equations of Mathematical Physics», South Ural State University (Russia, Chelyabinsk), alzama@mail.ru.

Поступила в редакцию 30 августа 2011 г.