УДК 517.9

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А.И. Кожанов

Для вырождающихся уравнений соболевского типа с эллиптико-параболическим оператором в старшей части исследована разрешимость линейных обратных задач с финальным и интегральным переопределением. Доказано существование регулярных решений.

Ключевые слова: линейные обратные задачи, финальное переопределение, интегральное переопределение, вырождающиеся уравнения соболевского типа, регулярные решения, существование.

Уравнения соболевского типа, иначе называемые уравнениями, неразрешенными относительно производной, после известной работы С. Л. Соболева [1] являются объектом исследования для многих авторов — см., например, монографии [2 – 9] и имеющуюся в них библиографию. В основном для различных классов уравнений соболевского типа изучались вопросы существования и несуществования решений, единственности решений, вопросы, связанные с изучением свойств решений (прежде всего свойств гладкости и асимптотики), обратные же задачи, линейные или нелинейные, изучены относительно слабо. В направлении, связанном с направлением настоящей работы, можно отметить лишь статьи [10 – 16], но при этом для вырождающихся уравнений того класса, который будет указан ниже, обратные задачи ранее не изучались.

Перейдем к содержательной части работы. Пусть x есть точка ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, t есть число из интервала $(0,T)$, $0 < T < +\infty$, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница Q. Далее, пусть $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $K(t)$, $h(t)$ и $f(x,t)$ — заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$ функции, A и B — эллиптико-параболический и соответственно эллиптический дифференциальные операторы, действие которых определяется равенствами

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a^{ij}(x)u_{x_j}\big) + a_0(x)u,$$
$$Bu = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(b^{ij}(x)u_{x_j}\big) + b_0(x)u$$

(здесь и далее считается, что по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n; точные условия на операторы A и B будут указаны ниже).

<u>Обратная задача I:</u> *найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$Au_t + Bu = f(x,t) + q(x)h(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t)|_S = 0; \tag{2}$$
$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega; \tag{3}$$
$$u(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{4}$$

Обратная задача II: *найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий* (2) *и* (3), *а также условия*

$$\int_0^T K(t)u(x,t)dt = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{5}$$

Уточним, что в рассматриваемых обратных задачах условия (2) и (3) есть условия «обычной», или прямой, задачи для уравнения

$$Au_t + Bu = f(x,t),$$

условия же (4) или (5) есть условия переопределения финального или соответственно интегрального типа, наличие которых обусловливается наличием дополнительной неизвестной функции $q(x)$.

Исследованию разрешимости обратной задачи I предпошлем исследование разрешимости краевой задачи для специального класса «нагруженных» [17 – 19] уравнений.

Пусть выполняется условие

$$h(x,T) \neq 0 \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Положим

$$h_1(x,t) = \frac{h(x,t)}{h(x,T)}, \qquad f_1(x,t) = f(x,t) - f(x,T)h_1(x,t).$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Au_t + Bu = f_1(x,t) + h_1(x,t)Au_t(x,T) \tag{6}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3). Именно с помощью решения данной краевой задачи будет построено решение исходной обратной задачи I.

Уравнение (6) является так называемым «нагруженным» дифференциальным уравнением [17 – 19]. Ранее разрешимость тех или иных краевых задач для «нагруженных» вырождающихся уравнений соболевского типа вида (6) не изучалась.

Ниже через $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ будем обозначать вектор внутренней нормали к границе Γ в текущей точке x.

Приведем вспомогательное утверждение о свойстве коэрцитивности пары операторов A и B.

Предложение 1. *Пусть выполнены условия*

$$a^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}),\ b^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}),\ a^{ij}(x) = a^{ji}(x),\ b^{ij}(x) = b^{ji}(x),\ x \in \overline{\Omega},\ i,j = 1,\dots,n; \quad (7)$$

$$a_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad b_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad a_0(x) \leq -a_0 < 0, \quad b_0(x) \leq -b_0 < 0, \quad x \in \overline{\Omega}; \quad (8)$$

$$\exists\, \alpha^i(x):\ \alpha^i(x) \in C(\overline{\Omega}),\ \alpha^i(x) \geq 0,\ x \in \overline{\Omega},\ i = 1,\dots,n,$$
$$\alpha^i(x)\xi_i^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq M_0\alpha^i(x)\xi_i^2, \qquad x \in \overline{\Omega}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n; \quad (9)$$

$$\left|a^{ij}_{x_k}(x)\right| \leq M_1\sqrt{\alpha^i(x)}, \qquad x \in \overline{\Omega}, \qquad i,j,k = 1,\dots,n; \quad (10)$$

$$a^{ij}(x)\nu_i\nu_j = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma; \quad (11)$$

$$b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_0|\xi|^2, \qquad m_0 > 0, \qquad x \in \overline{\Omega}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n; \quad (12)$$

$$\Big[a_0(x)b^{ij}(x) + b_0(x)a^{ij}(x) + \frac{1}{2}\big(a^{ij}_{x_k}(x)b^{kl}(x)\big)_{x_l} + \frac{1}{2}\Big(b^{ij}_{x_k}(x)a^{kl}(x)\Big)_{x_l} -$$
$$-\Big(a^{il}_{x_k}(x)b^{jk}_{x_l}(x)\Big)\Big]\xi_i\xi_j \leq 0, \qquad x \in \overline{\Omega}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n; \quad (13)$$

$$a_0(x)b_0(x) + \frac{1}{2}\Big(a_{0x_i}(x)b^{ij}(x)\Big)_{x_j} + \frac{1}{2}\Big(b_{0x_i}(x)a^{ij}(x)\Big)_{x_j} \geq 0, \qquad x \in \overline{\Omega}. \quad (14)$$

Тогда для любой функции $v(x)$ из пространства $W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega Av \cdot Bv dx \geq 0. \quad (15)$$

Доказательство. Интегрируя по частям и используя обращение функции $v(x)$ в нуль на Γ, получим

$$\int\limits_\Omega Av \cdot Bv\, dx = \int\limits_\Omega a^{ij}b^{kl}v_{x_jx_k}v_{x_ix_l}dx - \int\limits_\Omega \Big[a_0b^{kl}v_{x_k}v_{x_l} + b_0a^{ij}v_{x_i}v_{x_j} + \frac{1}{2}\big(a^{ij}b^{kl}_{x_i}\big)_{x_j}v_{x_k}v_{x_l} +$$
$$+\frac{1}{2}\big(a^{ij}_{x_k}b^{kl}\big)_{x_l}v_{x_i}v_{x_j} - a^{ij}_{x_k}b^{kl}_{x_i}v_{x_l}v_{x_j}\Big]\,dx + \int\limits_\Omega \Big[a_0b_0 + \frac{1}{2}\big(a_{0x_i}b^{ij}\big)_{x_j} + \frac{1}{2}\big(b_{0x_i}a^{ij}\big)_{x_j}\Big]v^2\,dx -$$
$$-\int\limits_\Gamma a^{ij}v_{x_j}\nu_i\frac{\partial}{\partial x_k}\big(b^{kl}v_{x_l}\big)\,ds + \int\limits_\Gamma a^{ij}v_{x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(b^{kl}v_{x_l}\big)\nu_k\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma a^{ij}b^{kl}_{x_i}v_{x_l}v_{x_k}\nu_j\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma a^{ij}_{x_k}b^{kl}v_{x_i}v_{x_j}\nu_l\,ds.$$

В правой части этого равенства все интегралы по области Ω неотрицательны — вследствие условий (9), (12)–(14). Далее, все интегралы по границе в правой части равны нулю. Действительно, первый и третий граничные интегралы равны нулю, поскольку вследствие (9) и (10) выполняется

$$a^{ij}(x)\nu_j = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma, \quad i = 1,\dots,n. \quad (16)$$

Четвертый граничный интеграл обращается в нуль вследствие равенства $v_{x_i}\nu_l = v_{x_l}\nu_i$, условия (10), а также вследствие того, что произведение $\alpha^i(x)\nu_i$ обращается в нуль на Γ. Наконец, второй граничный интеграл равен нулю вследствие равенства $v_{x_j}\nu_k = v_{x_k}\nu_j$ и равенства (16).

Из приведенного анализа и следует требуемое.

$\square$

Вернемся к обратной задаче I.

Обозначим

$$\overline{h}_1 = \operatorname*{vraimax}_{\overline{Q}}\big|h_{1t}(x,t)\big|.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (7)–(14), *а также условия*

$$\big|h(x,T)\big| \geq h_0 > 0 \quad npu \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{17}$$

$$h_1(x,t) \in W^2_\infty(Q), \quad h(x,t) \in L_\infty(Q), \quad h(x,0) = h_t(x,0) = 0 \quad npu \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{18}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q),\ f_t(x,t) \in L_2(Q),\ f_{tt}(x,t) \in L_2(Q),\ f(x,0) = f_t(x,0) = 0 \ npu \ \ x \in \overline{\Omega}; \tag{19}$$

$$\exists\, N_0 :\ N_0 > T, \qquad \overline{h}_1^2 < \frac{N_0 - T}{2N_0^2\, T}. \tag{20}$$

Тогда обратная задача I *имеет решение* $\{u(x,t), q(x)\}$ *такое, что*

$$u(x,t) \in L_2\Big(0,T;\, W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\Big), \quad u_t(x,t) \in L_2\big(0,T;\, W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big),$$
$$Au_t(x,T) \in L_2(\Omega), \quad q(x) \in L_2(\Omega).$$

Доказательство. Пусть ε есть положительное число, A_ε есть оператор, действие которого определяется равенством

$$A_\varepsilon u = Au + \varepsilon Bu.$$

Обозначим для краткости через V_m, $m \in \mathbb{N}$, пространство

$$V_m = \left\{ v(x,t) :\ \frac{\partial^k v(x,t)}{\partial t^k} \in L_2\Big(0,T;\, W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\Big),\ k = 0,1,\ldots,m \right\};$$

норму в этом пространстве определим естественным образом

$$\|v\|_{V_m} = \sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{\partial^k v}{\partial t^k} \right\|_{L_2(0,T;\, W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$A_\varepsilon u_{ttt} + Bu_{tt} = f_{1tt}(x,t) + h_{1tt}(x,t)\, Au_t(x,T) \tag{21}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0), \qquad x \in \Omega, \tag{22}$$

а также условие (2). Покажем, что при фиксированном ε данная задача разрешима в пространстве V_3.

Уравнение (21) рассматриваемой задачи вновь является «нагруженным», и потому для доказательства разрешимости задачи (21), (22), (2) воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$A_\varepsilon u_{ttt} + Bu_{tt} = f_{1tt}(x,t) + \lambda h_{1tt}(x,t)\, Au_t(x,T) \tag{21$_\lambda$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (22). Как известно, для разрешимости краевой задачи (21$_\lambda$), (2), (22) в пространстве V_3 при всех λ из отрезка $[0,1]$ достаточно показать, что краевая задача (21_0), (2), (22) разрешима в пространстве V_3, и что для всевозможных решений задачи (21_λ), (2) имеет место равномерная по λ априорная оценка

$$\|u\|_{V_3} \leq R_0 \tag{23}$$

— см. [20].

Разрешимость краевой задачи (21_0), (2), (22) в пространстве V_3 при выполнении условий теоремы известна — см. [21]. Покажем, что для решений краевой задачи (21_λ), (2), (22) имеет место оценка (23).

Пусть $u(x,t)$ есть решение краевой задачи (21_λ), (2), (22) из пространства V_3. Вследствие условий (18), (19) для функции $u(x,t)$ выполняется равенство

$$A_\varepsilon u_{tt} + Bu_t = f_{1t}(x,t) + h_{1t}(x,t)Au_t(x,T). \tag{24}$$

Умножим это равенство на $(N_0 - t)Au_t(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Интегрируя по частям, используя доказанное выше утверждение, неравенство Юнга и условие (20), получим, что выполняется оценка

$$\int\limits_Q (A_\varepsilon u_t)^2 dxdt + \int\limits_\Omega \big[Au_t(x,T)\big]^2 dx \leq C_1 \tag{25}$$

с постоянной C_1, определяющейся лишь функциями $f(x,t)$ и $h(x,t)$, а также числом T.

Умножим теперь уравнение (21_λ) на функцию $A_\varepsilon u_{tt}(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Используя доказанное утверждение, условия (18) и (19), оценку (24), применяя неравенство Юнга, получим вторую оценку

$$\int\limits_Q (A_\varepsilon u_{tt})^2 \, dx \, dt \leq C_2 \tag{26}$$

с постоянной C_2, определяющейся лишь функциями $f(x,t)$ и $h(x,t)$, а также числом T.

Третья оценка

$$\int\limits_Q (A_\varepsilon u_{ttt})^2 dx \, dt \leq C_3 \tag{27}$$

очевидна.

Поскольку оператор A_ε эллиптичен, то из оценок (25)–(27) и из второго основного неравенства для эллиптических операторов [22] следует требуемая оценка (23).

Как уже говорилось выше, из разрешимости в V_3 краевой задачи (21_0), (2), (22) и из оценки (23) следует, что краевая задача (21_λ), (2), (22) разрешима в пространстве V_3. Но тогда и задача (21), (2), (22) будет разрешима в пространстве V_3.

Итак, краевая задача (21), (2), (22) имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$, принадлежащее пространству V_3. Для функций $u^\varepsilon(x,t)$ выполняются уравнение (24) и равномерные по ε оценки (25) и (26). Следовательно, будет выполняться равномерная по ε оценка

$$\int\limits_Q (Bu_t^\varepsilon)^2 dx \, dt \leq C_4. \tag{28}$$

Эта оценка, условия (7) и (12), а также второе основное неравенство для эллиптических операторов означают, что выполняется неравенство

$$\|u^\varepsilon\|_{V_1} \leq C_0 \tag{29}$$

с постоянной C_0, определяющейся лишь функциями $f(x,t)$, $h(x,t)$, $b^{ij}(x)$, $i,j=1,\ldots,n$, $b_0(x)$, областью Ω и числом T. Из оценок (25), (26) и (29), теоремы о возможности выбора слабо сходящейся последовательности из ограниченного в гильбертовом пространстве множества [20] и теорем вложения [22] из семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ можно выделить последовательность $\{u_m(x,t)\}$ такую, что для некоторой функции $u(x,t)$ при $m\to\infty$ имеют место сходимости

$$\begin{gathered}\varepsilon_m\to 0,\\ u_m(x,t)\to u(x,t)\quad \textit{слабо в}\quad V_1,\\ Au_{mt}(x,T)\to Au_t(x,T)\quad \textit{слабо в}\quad L_2(\Omega),\\ \varepsilon_m Bu_{mt}(x,t)\to 0\quad \textit{слабо в}\quad L_2(Q).\end{gathered}$$

Для функций $u_m(x,t)$ выполняется равенство

$$A_{\varepsilon_m}u_{mt}+Bu_m=f_1(x,t)+h_1(x,t)Au_{mt}(x,T). \tag{30}$$

Используя указанные выше сходимости, нетрудно показать, что в уравнении (30) можно перейти к пределу при $m\to\infty$. Очевидно, что для предельной функции $u(x,t)$ будет выполняться уравнение (6) и условия (2) и (3).

Определим функцию $q(x)$:

$$q(x)=\frac{1}{h(x,T)}\big[Au_t(x,T)-f(x,T)\big].$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $q(x)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1). Далее, имеет место равенство

$$Bu(x,T)=0.$$

Поскольку функция $u(x,T)$ обращается в нуль при $x\in\Gamma$, то из этого равенства следует выполнение для функции $u(x,t)$ условия (4).

Сказанное выше означает, что функции $u(x,t)$ и $q(x)$ представляют собой решение обратной задачи I из требуемого класса.

$\square$

Обратимся теперь к исследованию разрешимости обратной задачи II.

Пусть выполняется условие

$$h_0(x)=\int\limits_0^T K(t)h(x,t)\,dt\neq 0\quad \textit{при}\quad x\in\overline{\Omega}.$$

Положим

$$f_0(x)=\int\limits_0^T K(t)f(x,t)\,dt,\qquad h_2(x,t)=\frac{h(x,t)}{h_0(x)},$$
$$f_2(x,t)=f(x,t)-f_0(x)h(x,t).$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Au_t+Bu=f_2(x,t)+h_2(x,t)\left[K(T)Au(x,T)-\int\limits_0^T K'(t)Au(x,t)\,dt\right] \tag{31}$$

и такую, что для нее выполняется условия (2) *и* (3). Решение обратной задачи II будет определяться решением данной прямой задачи.

Уравнение (31) вновь является «нагруженным», и вновь разрешимость тех или иных краевых задач для «нагруженных» вырождающихся уравнений соболевского типа вида (31) ранее не изучалась.

Обозначим

$$\overline{h}_2 = \operatorname*{vraimax}_{\overline{Q}} \big|h_2(x,t)\big|, \qquad k_2 = T\overline{h}_2^2.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (7)–(14), *а также условия*

$$\big|h_0(x)\big| \geq h_0 > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{32}$$

$$h_2(x,t) \in W_\infty^2(Q), \quad h(x,t) \in L_\infty(Q), \quad h(x,0) = h_t(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{33}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q),\ f_t(x,t) \in L_2(Q),\ f_{tt}(x,t) \in L_2(Q),\ f(x,0) = f_t(x,0) = 0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}; \tag{34}$$

$$\exists\, \delta_1 \in (0,1), \quad \exists\, N_0 :\ N_0 > T, \qquad N_0 - T - \frac{N_0^2 k_1 K(T)}{\delta_1^2} > \frac{N_0^2 k_1}{1-\delta_1^2}. \tag{35}$$

Тогда обратная задача II *имеет решение* $\big\{u(x,t), q(x)\big\}$ *такое, что*

$$u(x,t) \in L_2\Big(0,T;\, W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\Big), \quad u_t(x,t) \in L_2\big(0,T;\, W_2^2(\Omega)\big),$$
$$Au(x,T) \in L_2(\Omega), \quad q(x) \in L_2(\Omega).$$

Доказательство данной теоремы проводится в целом вполне аналогично доказательству теоремы 1, только вместо вспомогательного уравнения (21) нужно использовать уравнение

$$A_\varepsilon u_{ttt} + Bu_{tt} = f_{2tt}(x,t) + h_{2tt}(x,t)\left[K(T)Au(x,T) - \int_0^T K'(\tau)Au(x,\tau)d\tau\right].$$

Обозначим

$$\widetilde{h}_2 = \operatorname*{vraimax}_{\overline{Q}} \big|h_{2t}(x,t)\big|.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (7)–(14), (32)–(35), *а также условие*

$$4T^3\widetilde{h}_2^2 \int_0^T K^2(t)dt < 1.$$

Тогда обратная задача II *имеет решение* $\big\{u(x,t), q(x)\big\}$ *такое, что*

$$u(x,t) \in L_2\Big(0,T;\, W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\Big), \quad u_t(x,t) \in L_2\Big(0,T;\, W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\Big), \quad q(x) \in L_2(\Omega).$$

Вспомогательным уравнением в этом случае является уравнение

$$A_\varepsilon u_{ttt} + Bu_{tt} = f_{2tt}(x,t) + h_{2tt}(x,t)\int_0^T Au_t(x,t)dt,$$

в качестве же числа N_0 возьмем число T. В остальном доказательство теоремы 3 повторяет доказательство теоремы 1.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09–01–00422а, и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2003 – 2013 гг., государственный контракт № 16.740.11.0127.

Литература

1. Соболев, С.Л. Об одной краевой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1954. – Т. 18, № 2. – С. 3 – 50.
2. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Науч. кн., 1998.
3. Kozhanov, A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems / A.I. Kozhanov. – Utrecht: VSP, 1999.
4. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000.
5. Pyatkov, S.G. Operator Theory. Nonclassical Problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002.
6. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroup of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht: VSP, 2003.
7. Asymptotic for dissipative nonlinear equations / N. Hayashi, E.I. Kaikina, P.I. Naumkin, I.A. Shishmarev. – Springer, 2006.
8. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007.
9. Корпусов, М.О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях / М.О. Корпусов. – М.: Либроком, 2011.
10. Кожанов, А.И. Нелинейные погруженные уравнения и обратные задачи / А.И. Кожанов // Журнал вычисл. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44, № 4. – С. 694 – 716.
11. Кожанов, А.И. О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа / А.И. Кожанов // Вестн. НГУ. Серия Математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, вып. 2. – С. 81 – 99.
12. Кожанов, А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения старшего коэффициента в уравнении составного типа / А.И. Кожанов // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. – 2008. – № 15, вып.1. – С. 27 – 36.
13. Кожанов, А.И. О разрешимости коэффициентных обратных задач для некоторых уравнений соболевского типа / А.И. Кожанов // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Математика. Физика. – 2010. – № 5, вып. 18. – С. 88 – 98.
14. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для уравнения Бенджамена–Бона–Махоки / Б.С. Аблабеков // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования. – Ханты-Мансийск: Югор. НИИ информ. технологий, 2005. – С. 6 – 9.
15. Fedorov, V.E. An inverse problem for linear Sobolev type equations / V.E. Fedorov, A.V. Urazaeva // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2004. – V. 12, № 4. – P. 387 – 395.
16. Федоров, В.Г. Нелинейная обратная задача для системы Осколкова / В.Г. Федоров, Н.Д. Иванова // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач (школа-конференция): тез. докл. – Новосибирск, 2011. – С. 72.
17. Назушев, А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Назушев. – М.: Высш. шк., 1995.
18. Дженалиев, М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев. – Алматы: Изд-во. Ин-та Теор. и приклад. математики, 1995.
19. Дженалиев, М.Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. – Алматы: FЫЛЫМ, 2010.

20. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.
21. Якубов, С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, 1985.
22. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973.

Александр Иванович Кожанов, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Российская Федерация), kozhanov@math.nsc.ru.

Linear Inverse Problems for a Class of Degenerate Equations of Sobolev Type

A.I. Kozhanov, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation)

Considering degenerate equations of Sobolev type with principal part an elliptic parabolic operator, we study solvability of linear inverse problems with final and integral overdetermination and prove existence of regular solutions.

Keywords: linear inverse problems, final overdetermination, integral overdetermination, degenerate equations of Sobolev type, regular solutions, existence.

References

1. Sobolev S.L. On a Boundary Value Problem of Mathematical Physics [Ob odnoy kraevoy zadache matematicheskoy fiziki]. *Izv. AN SSSR. Ser. Matem.*, 1954, vol. 18, no. 2, pp. 3 – 50.
2. Demidenko G.V., Uspenskiĭ S.V. *Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* New York; Basel, Marcel Dekker, 2003.
3. Kozhanov A.I. *Composite Type Equations and Inverse Problems.* Utrecht, VSP, 1999.
4. Egorov I.E., Pyatkov S.G., Popov S.V. *Neklassicheskie differentsial'no-operatornye uravneniya* [Nonclassical Differential-operator Equations]. Novosibirsk, Nauka, 2000.
5. Pyatkov S.G. *Operator Theory. Nonclassical Problems.* Utrecht; Boston; Koln; Tokyo, VSP, 2002.
6. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroup of Operators.* Utrecht, VSP, 2003.
7. Hayashi N., Kaikina E.I., Naumkin P.I., Shishmarev I.A. *Asymptotic for Dissipative Nonlinear Equations.* Springer, 2006.
8. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type]. Moscow, Fizmatlit, 2007.
9. Korpusov M.O. *Razrushenie v neklassicheskikh nelokal'nykh uravneniyakh* [Blow-up of Nonclassical Non-local Equations]. Moscow, Librokom, 2011.
10. Kozhanov A.I. Nonlinear Loaded Equations and Inverse Problems [Nelineynye nagruzhennye uravneniya i obratnye zadachi]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 4, pp. 694 – 716.
11. Kozhanov A.I. The Solvability of Inverse Problems of Reconstruction Coefficients in the Equations of Composite Type [O razreshimosti obratnykh zadach vosstanovleniya koeffitsientov v uravneniyakh sostavnogo tipa]. *Vestn. NGU. Seriya Matematika, mekhanika, informatika*, 2008, vol. 8, issue 2, pp. 81 – 99.

12. Kozhanov A.I. On the Solvability of the Inverse Problem of Finding the Leading Coefficient of Equation of Composite Type [O razreshimosti obratnoy zadachi nakhozhdeniya starshego koeffitsienta v uravnenii sostavnogo tipa]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie»*, 2008, no. 15 (115), issue 1, pp. 27 – 36.
13. Kozhanov A.I. On the Solvability of the Inverse Problem for Some Sobolev-type Equations [O razreshimosti koeffitsientnykh obratnykh zadach dlya nekotorykh uravneniy sobolevskogo tipa]. *Nauch. vedomosti Belgorod. gos. un-ta. Matematika. Fizika*, 2010, no. 5, issue 18, pp. 88 – 98.
14. Ablabekov B.S. Inverse Problems for Equations Benjamin – Bona – Mahoki [Obratnye zadachi dlya uravneniya Bendzhamena–Bona–Makhoki]. *Informatsionnye tekhnologii i obratnye zadachi ratsional'nogo prirodoispol'zovaniya, Khanty-Mansiysk, Yugorskiy NII informatsionnykh tekhnologiy*, 2005, pp. 6 – 9.
15. Fedorov V.E., Urazaeva A.V. An Inverse Problem for Linear Sobolev Type Equations. *J. Inverse Ill-Posed Probl*, 2004, vol. 12, no. 4, pp. 387 – 395.
16. Fedorov V.G., Ivanova N.D. A Nonlinear Inverse Problem for the Oskolkov System [Nelineynaya obratnaya zadacha dlya sistemy Oskolkova]. *Teoriya i chislennye metody resheniya obratnykh i nekorrektnykh zadach (shkola-konferentsiya): tez. dokl.* Novosibirsk, 2011, pp. 72.
17. Nazushev A.M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* [The Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995.
18. Dzhenaliev M.T. *K teorii lineynykh kraevykh zadach dlya nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy* [To the Theory of Linear Boundary Value Problems for Loaded Differential Equations]. Almaty, Izd. In-ta Teor. i priklad. matematiki, 1995.
19. Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Nagruzhennye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravneniy* [Loaded Equation as Perturbations of Differential Equations]. Almaty, FYLYM, 2010.
20. Trenogin V.A. Funktsional'nyy analiz [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1980.
21. Yakubov S.Ya. *Lineynye differentsial'no-operatornye uravneniya i ikh prilozheniya* [Linear Differential-operator Equations and Their Applications]. Baku, Elm, 1985.
22. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type]. Moscow, Nauka, 1973.

Поступила в редакцию 19 декабря 2011 г.