

# О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАДИЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*М.О. Корпусов*

В данной работе мы продолжим рассмотрение уравнений с градиентными нелинейностями. Мы рассмотрим начально-краевую задачу в ограниченной области с гладкой границей для нелокального по времени уравнения с градиентной нелинейностью и докажем локальную разрешимость в сильном обобщенном смысле, кроме того, мы получим достаточные условия разрушения за конечное время и достаточные условия глобальной во времени разрешимости.

*Ключевые слова:* нелокальное уравнение с градиентной нелинейностью, уравнения соболевского типа, разрушение решения.

## 1. Введение

Прежде всего отметим, что значительный вклад в изучение линейных и нелинейных уравнений соболевского типа и, в частности, псевдопараболических уравнений внес выдающийся российский математик Георгий Анатольевич Свиридюк, например, в своих классических работах [1 – 4]. В этих работах были заложены базовые принципы нового и мощного метода полугрупп, который привел в дальнейшем к образованию одной из самых больших и широко известных в России научных школ, изучающих неклассические уравнения современной математической физики.

В данной работе мы рассмотрим начально-краевую задачу для следующего модельного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \Delta u + \int_0^t ds h(t-s) \Delta u(s) + \mu |\nabla u|^p = 0, \quad \mu > 0, \quad p > 0, \quad (1)$$

а функция  $h(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty))$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\max \left\{ |h(t)|, |h'(t)| \right\} \leq \chi'(t), \quad \chi(t) \leq 0, \quad \chi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty)), \quad (2)$$

причем функции  $\chi(t), \chi'(t)$  являются ограниченными постоянной  $h_0 > 0$ .

В нашей предыдущей работе [5] мы рассмотрели соответствующее локальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \Delta u + \mu |\nabla u|^p = 0, \quad (3)$$

для которого мы рассмотрели начально-краевую задачу в ограниченной области с гладкой границей и получили результаты о глобальной во времени разрешимости и о разрушении его решения за конечное время. При этом мы рассмотрели случай, когда

$$p \in \left( 0, \frac{N}{N-2} \right) \quad \text{при } N \geq 3 \quad \text{и} \quad p \in (0, +\infty) \quad \text{при } N = 2.$$

## 2. Вывод уравнения

Рассмотрим область  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  при  $N \geq 2$  с гладкой поверхностно-односвязной границей  $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$  при  $\delta \in (0, 1]$  в случае  $N \geq 3$ . Предположим, что эту область занимает кристаллический полупроводник. Как известно, в теории полупроводников (см., например, [6, 7]) хорошо работает квазистационарное приближение для системы уравнений Максвелла [8], электрическая часть которой имеет следующий вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{D}$  — это вектор индукции электрического поля,  $\mathbf{E}$  — это вектор напряженности электрического поля,  $\mathbf{P}$  — это вектор поляризации среды,  $n$  — плотность свободных зарядов, причем в силу поверхностной-односвязности границы  $\partial\Omega$  определен потенциал электрического поля  $\varphi$ :

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Поскольку полупроводник, очевидно, является проводящей средой, то мы должны дополнить уравнения (4) уравнением для тока свободных зарядов, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J}_1 + \operatorname{div} \mathbf{J}_2, \quad (5)$$

где  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$  — это вектор тока свободных зарядов. Естественно, нам нужно записать выражение для этого вектора. При этом учтем тепловой разогрев полупроводника [9], тогда для вектора  $\mathbf{J}_1$  имеет место следующее выражение [8]:

$$\mathbf{J}_1 = \sigma \mathbf{E} - \gamma \nabla T, \quad \sigma > 0, \quad \gamma > 0, \quad (6)$$

где  $T$  — это температура в полупроводнике, а величина  $\mathbf{J}_2$  учитывает временную дисперсию

$$\mathbf{J}_2(t) = \int_0^t ds h(t-s) \mathbf{E}(s). \quad (7)$$

Причем для температуры  $T$  имеет место уравнение теплопроводности с тепловым нагревом за счет электрического поля  $\mathbf{E}$  следующего вида [9]:

$$\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + Q(|\mathbf{E}|), \quad (8)$$

где параметр  $\varepsilon > 0$  имеет следующий вид [9]:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\alpha} \quad (9)$$

и  $\varepsilon_0 > 0$  — это фиксированное число, а параметр  $\alpha > 0$  достаточно велик. Функция  $Q(|\mathbf{E}|)$  описывает тепловую накачку в полупроводнике в самосогласованном электрическом поле  $\mathbf{E}$  и хорошо аппроксимируется степенной функцией следующего вида [9]:

$$Q(|\mathbf{E}|) = q_0 |\mathbf{E}|^p, \quad p > 0, \quad q_0 > 0. \quad (10)$$

В силу свойства «малости» параметра (9) вместо уравнения (8) мы рассматриваем следующее уравнение:

$$\Delta T + Q(|\mathbf{E}|) = 0. \quad (11)$$

Теперь мы рассмотрим выражение для вектора  $\mathbf{P}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = \rho_0 \varphi, \quad \rho_0 > 0, \quad (12)$$

что учитывает распределение связанных зарядов.

Дифференциальным следствием системы уравнений (4)–(12) является следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta\varphi - 4\pi\rho_0\varphi) + \int_0^t ds \alpha(t, s)\Delta\varphi(s) + 4\pi [\sigma + \alpha(0)] \Delta\varphi - 4\pi\gamma q_0 |\nabla\varphi|^p = 0, \quad (13)$$

которое элементарными заменами сводится к следующему уравнению типа С. Л. Соболева:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta\varphi - \varphi) + \Delta\varphi + \int_0^t ds h(t - s)\Delta\varphi(s) + \mu |\nabla\varphi|^p = 0, \quad \mu > 0, \quad p > 0. \quad (14)$$

В следующих параграфах мы будем рассматривать либо задачу Дирихле, либо задачу Неймана, поэтому обсудим физический смысл этих граничных условий. Действительно, однородное условие Дирихле

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0$$

означает, что граница полупроводника «заземлена», а по договоренности электрический потенциал земли равен нулю. Однородное условие Неймана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_x} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

означает, что нормальная компонента электрического поля на границе полупроводника равна нулю.

### 3. Задача Дирихле в $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geq 2$

Прежде всего сформулируем классическую формулировку задачи, для которой мы дадим обобщенную постановку. Итак, пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  при  $N \geq 3$  является ограниченной областью с гладкой границей  $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$  при  $\delta \in (0, 1]$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \Delta u + \int_0^t ds h(t - s)\Delta u(s) + \mu |\nabla u|^p = 0 \quad \text{в } Q_T, \quad (15)$$

$$u = 0 \quad \text{в } \Gamma_T, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (16)$$

где  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega$ . Мы будем рассматривать случай, когда  $p > 0$ .

Теперь сопоставим задаче (15)–(16) обобщенную постановку. Действительно, дадим определение.

**Определение 1.** Функция  $u(x)(t)$  класса

$$u(x)(t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in L^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \quad (17)$$

называется слабым обобщенным решением задачи (15)–(16), если при некотором  $T > 0$  имеет место следующее равенство:

$$\langle D(u), w \rangle = 0 \quad \text{для п. в.с. } t \in [0, T] \quad \text{и для всех } w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (18)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  и  $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ , а

$$D(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \Delta u + \int_0^t ds h(t - s)\Delta u(s) + \mu |\nabla u|^p$$

$u, u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ .

Теперь мы рассмотрим различные случаи.

СЛУЧАЙ  $p \in (0, 1]$ . Сначала мы получим априорную оценку, из которой сразу же вытекает, что в данном случае нет разрушения сильного обобщенного решения. Действительно, возьмем в определении 2 слабого обобщенного решения функцию  $v(x)(t)$ , равную решению  $u(x)(t)$ , тогда после интегрирования по частям мы получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2] + \|\nabla u\|_2^2 + \int_0^t ds h(t-s) \int_{\Omega} (\nabla u(s), \nabla u(t)) dx = \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^p u dx. \quad (19)$$

Поскольку при  $p \in (0, 1]$ , очевидно,  $p \leq 1 + 2/N$  при  $N \geq 2$ , то в силу неравенства Гельдера и вложения

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^q(\Omega) \quad \text{при} \quad q = \frac{2}{2-p} \quad (20)$$

справедлива следующая цепочка оценок:

$$\begin{aligned} \left| \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^p u dx \right| &\leq |\mu| \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{p/2} \left( \int_{\Omega} |u|^{2/(2-p)} dx \right)^{(2-p)/2} \leq \\ &\leq c_1(\Omega, p) |\mu| \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{(p+1)/2}, \end{aligned}$$

где  $c_1 = c_1(\Omega, p)$  — это соответствующая постоянная вложения (20). Таким образом, мы из (19) и (20) приходим к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2] + \|\nabla u\|_2^2 + \int_0^t ds h(t-s) \int_{\Omega} (\nabla u(s), \nabla u(t)) dx \leq c_2 \|\nabla u\|_2^{p+1}. \quad (21)$$

Теперь мы воспользуемся неравенством Коши–Буняковского и получим, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2] \leq \frac{1}{2} \int_0^t ds |h(t-s)| \|\nabla u\|_2^2(s) + \frac{th_0}{2} \|\nabla u\|_2^2 + c_2 \|\nabla u\|_2^{p+1}. \quad (22)$$

В силу арифметического неравенства Юнга при  $p \in (0, 1)$  мы приходим к следующему выражению

$$c_2 \|\nabla u\|_2^{p+1} \leq \frac{1-p}{2} c_2^{2/(1-p)} + \frac{2}{p+1} \|\nabla u\|_2^2.$$

Таким образом, отсюда и из (22) приходим при  $p \in (0, 1)$  к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2] \leq \frac{1}{2} \int_0^t ds |h(t-s)| \|\nabla u\|_2^2(s) + \frac{th_0}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1-p}{2} c_2^{2/(1-p)} + \frac{2}{p+1} \|\nabla u\|_2^2, \quad (23)$$

а при  $p = 1$  мы сразу же имеем следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2] \leq \frac{1}{2} \int_0^t ds |h(t-s)| \|\nabla u\|_2^2(s) + \frac{th_0}{2} \|\nabla u\|_2^2 + c_2 \|\nabla u\|_2^2. \quad (24)$$

Рассмотрим неравенство (23), т. е. случай  $p \in (0, 1)$ , поскольку при  $p = 1$  все проще. Итак, после интегрирования по времени мы получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 \leq & \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2 + \frac{h_0}{2} \int_0^t (t-s) \|\nabla u\|_2^2(s) ds + \\ & + \left( \frac{th_0}{2} + \frac{2}{p+1} \right) \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 ds + \frac{1-p}{2} c_2^{2/(1-p)} t. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть теперь  $t \in [0, T]$  при некотором  $T > 0$ , тогда мы из (26) получим следующее неравенство

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2 + \frac{1-p}{2} c_2^{2/(1-p)} T + \left( h_0 T + \frac{2}{p+1} \right) \int_0^t \|\nabla u\|_2^2(s) ds, \quad (26)$$

из которого в силу теоремы Гропуолла–Беллмана–Бихари мы получим следующее неравенство:

$$\|\nabla u\|_2^2(t) \leq \left[ \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2 + \frac{1-p}{2} c_2^{2/(1-p)} T \right] \exp \left\{ \left( h_0 T + \frac{2}{p+1} \right) t \right\} \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (27)$$

Следовательно, норма  $\|\nabla u\|_2(t)$  ограничена на всяком компакте из  $\mathbb{R}_+^1$ . Таким образом, слабое обобщенное решение рассматриваемой задачи не разрушается за конечное время. Докажем, что при  $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$  слабое обобщенное решение существует глобально во времени. С этой целью нам нужно воспользоваться классическим методом Галеркина в сочетании с методом компактности [10]. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $p \in (0, 1]$  и  $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ . Тогда существует слабое обобщенное решение задачи (15), (16) класса

$$u(x)(t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in L^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega))$$

для произвольного  $T > 0$ .

**СЛУЧАЙ 1**  $1 \leq p \leq 1 + 2/N$ . Докажем сначала теорему о локальной разрешимости задачи (15)–(16), понимаемой в слабом обобщенном смысле определения 1, в классе

$$u(x)(t) \in C^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

при некотором максимальном  $T_0 > 0$ , зависящем от  $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ . С этой целью рассмотрим следующий оператор:

$$\mathbb{A}u \equiv -\Delta u + I : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (28)$$

Используя теорему Браудера–Минти, и точно так же как и в работе [11], удастся показать, что этот оператор обратим, причем обратный оператор является липшиц–непрерывным с постоянной Липшица равной 1. Тогда начально–краевую задачу (15)–(16), понимаемую в слабом смысле определения 1, можно представить в классе

$$u(x)(t) \in C^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

в следующем абстрактном виде:

$$\frac{dv}{dt} + \mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v + \int_0^t ds \mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v(s) = \mu |\mathbb{B}_2 \mathbb{A}^{-1} v|^p, \quad v(0) = v_0 = \mathbb{A}^{-1} u_0, \quad v = \mathbb{A}^{-1} u, \quad (29)$$

где

$$\mathbb{B}_1 \equiv -\Delta : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{B}_2 \equiv \nabla : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \cdots \otimes \mathbb{L}^2(\Omega). \quad (30)$$

Заметим, что оператор

$$\mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \quad (31)$$

является липшиц-непрерывным. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\|\mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v_1 - \mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v_2\|_* \leq \|\mathbb{A}^{-1} v_1 - \mathbb{A}^{-1} v_2\| \leq \|v_1 - v_2\|_* \quad \text{для всех } v_1, v_2 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (32)$$

Докажем теперь ограниченную липшиц-непрерывность оператора  $|\mathbb{B}_2 \mathbb{A}^{-1} v|^p$ . Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств при  $q = 2/p$  и  $p \in [1, 2]$ :

$$\begin{aligned} & \| |\mathbb{B}_2 \mathbb{A}^{-1} v_1|^p - |\mathbb{B}_2 \mathbb{A}^{-1} v_2|^p \|_* \leq \\ & \leq p \left\| |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)| \max \left\{ |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1)|^{p-1}, |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)|^{p-1} \right\} \right\|_* \leq \\ & \leq c_1(p) \left( \int_{\Omega} |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)|^q \times \max \left\{ |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1)|^{q(p-1)}, |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)|^{q(p-1)} \right\} dx \right)^{1/q} \leq \\ & \leq c_1(p) \left( \int_{\Omega} |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)|^2 dx \right)^{1/2} \times \\ & \times \left( \int_{\Omega} \max \left\{ |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1)|^{2(p-1)/(2-q)}, |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)|^{2(p-1)/(2-q)} \right\} dx \right)^{(2-q)/(2q)} = \\ & = \mu(\mathbb{R}) \|\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)\|_2, \quad (33) \end{aligned}$$

где

$$\mu(\mathbb{R}) = c_1 \mathbb{R}^{p-1}, \quad \mathbb{R} = \max \{ \|\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1)\|_2, \|\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)\|_2 \}.$$

Заметим теперь, что в классе  $v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$  мы можем свести нашу задачу (29) к интегральному уравнению

$$v(t) = v_0 + \int_0^t ds G(v)(s), \quad G(v)(s) = -\mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v(s) - \int_0^s d\sigma h(s-\sigma) \mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v(\sigma) + \mu |\mathbb{B}_2 \mathbb{A}^{-1} v(s)|^p. \quad (34)$$

И при достаточно малом  $T > 0$  в силу оценок (32) и (33) можно применить метод сжимающих отображений в банаховом пространстве

$$\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

и доказать существование единственного решения интегрального уравнения (34) в этом банаховом пространстве. Далее можно воспользоваться «бутстэп» методом (см., например, [11]) и доказать, что это решение на самом деле из класса

$$\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Затем нужно применить стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений во времени и получить следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть  $p \in [1, 2)$  и  $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ , тогда найдется такое  $T_0 = T_0(u_0) > 0$ , что существует единственное решение  $u(x)(t)$  задачи (15), (16), понимаемое в слабом смысле определения 1, в классе

$$u(x)(t) \in C^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

причем либо  $T_0 = +\infty$  либо  $T_0 < +\infty$  и в последнем случае имеет место следующее предельное равенство:

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\nabla u\|_2(t) = +\infty. \quad (35)$$

Очевидно, что это решение, вообще говоря, не единственное.

**СЛУЧАЙ**  $p \in (1 + 2/N, N/(N - 2))$  при  $N \geq 3$  или  $p > 2$  при  $N = 2$ .

Дадим определение.

**Определение 2.** Функция  $u(x)(t)$  класса

$$u(x)(t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in L^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)) \quad (36)$$

называется слабым обобщенным решением задачи (15)–(16), если при некотором  $T > 0$  имеет место следующее равенство:

$$\langle D(u), w \rangle = 0 \quad \text{для п. вс. } t \in [0, T], \quad \text{и для всех } w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (37)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  и  $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ , а

$$D(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \Delta u + \int_0^t ds h(t-s) \Delta u(s) + \mu |\nabla u|^p,$$

$$u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega).$$

Докажем, что при  $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$  слабое обобщенное решение существует локально во времени. С этой целью нам нужно воспользоваться классическим методом Галеркина в сочетании с методом компактности [10].

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $p \in \left(1 + \frac{2}{N}, \frac{N}{N-2}\right)$  при  $N \geq 3$  или  $p > 2$  при  $N = 2$  и  $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ . Тогда существует единственное слабое обобщенное решение задачи (15), (16) класса  $u(x)(t) \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega))$ ,  $u'(x)(t) \in L^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega))$  для некоторого малого  $T > 0$ .

## 4. Разрушение решения

Прежде чем переходить к получению достаточных условий разрушения, нам нужно изучить сходимость следующего интеграла — нелинейную «емкость»:

$$a(p; \Omega; N) \equiv \frac{1}{\lambda_1} \left( \int_{\Omega} \frac{|\nabla \psi_1|^{p/(p-1)}}{\psi_1^{1/(p-1)}(x)} dx \right)^{(p-1)/p}, \quad (38)$$

где функция  $\psi_1(x)$  — есть первая собственная функция, соответствующая первому собственному значению  $\lambda_1 > 0$  оператора Лапласа в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  с гладкой границей  $\partial\Omega \in C^{2,\delta}$  при  $\delta \in (0, 1]$ :

$$\Delta \psi_1(x) + \lambda_1 \psi_1(x) = 0, \quad \psi_1(x) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (39)$$

Обозначим через  $p_0 = p_0(\Omega; N) > 1$  такое число, что при  $p > p_0$  интеграл в правой части равенства (38) сходится. Докажем, что существуют области  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , для которых такое  $p_0$  существует. Действительно, пусть  $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$  — шар радиуса  $R > 0$ . Тогда можно вычислить первую собственную функцию и первое собственное значение задачи (39) (см., например, [12]). Действительно,

$$\psi_1(x) = \psi_1(|x|) = c_0 r^{(2-N)/2} J_{(N-2)/2}(\lambda_1^{1/2} r), \quad \lambda_1 = \frac{(z_{N1})^2}{R^2}, \quad r = |x|,$$

где  $z_{N1}$  — первый корень функции Бесселя  $J_{(N-2)/2}(x)$ . Заметим теперь, что для функции Бесселя  $J_\nu(z)$  справедлива следующая формула Эйлера [13]:

$$J_\nu(z) = \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left\{ 1 - \frac{z^2}{z_{\nu,n}^2} \right\}, \quad (40)$$

где  $z_{\nu,1} < z_{\nu,2} < \dots < z_{\nu,n} < \dots$  — это корни функции Бесселя  $J_\nu(z)$ . Из явного вида (40) следует, что подынтегральная функция в (38) имеет интегрируемую особенность при  $p > 2$ , т. е. число  $p_0 = 2$  в случае шара. Теперь мы предположим, что рассматриваем область  $\Omega$ , для которой число  $p_0$  существует, и пусть

$$p > p_0. \quad (41)$$

Получим достаточные условия разрушения слабого обобщенного решения задачи (15)–(16) при таких  $p$ . С этой целью возьмем в качестве  $w = \psi_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$  в равенстве (37), тогда после «интегрирования по частям» получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + 1) \frac{dJ}{dt} + \lambda_1 J(t) + \lambda_1 \int_0^t ds h(t-s) J(s) = \\ = \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi_1(x) dx, \quad J(t) \equiv \int_{\Omega} u(x)(t) \psi_1(x). \end{aligned} \quad (42)$$

Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned} |J| &= \left| \int_{\Omega} u \psi_1(x) dx \right| = \frac{1}{\lambda_1} \left| \int_{\Omega} u \Delta \psi_1 dx \right| = \frac{1}{\lambda_1} \left| \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \psi_1) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla \psi_1| dx = \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} \psi_1^{1/p} |\nabla u_m| \frac{|\nabla \psi_1|}{\psi_1^{1/p}} dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} \left( \int_{\Omega} \frac{|\nabla \psi_1|^{p/(p-1)}}{\psi_1^{1/(p-1)}(x)} dx \right)^{(p-1)/p} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi_1 dx \right)^{1/p} = a \left( \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p \psi_1 dx \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, из неравенств (42) и (43) приходим к следующему обыкновенному интегро-дифференциальному неравенству:

$$(\lambda_1 + 1) \frac{dJ}{dt} + \lambda_1 J(t) + \lambda_1 \int_0^t ds h(t-s) J(s) \geq \frac{\mu}{a^p} |J(t)|^p, \quad J(t) \equiv \int_{\Omega} u(x)(t) \psi_1(x), \quad (44)$$

из которого с учетом условий (2) сразу же получаем неравенство

$$(\lambda_1 + 1) \frac{dJ}{dt} + \lambda_1 J(t) + \lambda_1 \int_0^t ds \chi'(t-s) J(s) \geq \frac{\mu}{a^p} |J(t)|^p. \quad (45)$$

Заметим, что  $J(t) \in C^{(1)}([0, T])$ , поэтому справедлива формула интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \chi'(t-s) J(s) &= - \int_0^t d\chi(t-s) J(s) = -\chi(t-s) J(s) \Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t ds \chi(t-s) J'(s) = \\ &= -\chi(0) J(t) + \chi(t) J(0) + \int_0^t ds \chi(t-s) J'(s). \end{aligned} \quad (46)$$

С учетом условий (2) мы имеем  $\chi(t) < 0$ , поэтому с учетом неравенств (46) мы приходим из (45) к следующему неравенству

$$(\lambda_1 + 1) \frac{dJ}{dt} + \lambda_1 (1 + h_0) J(t) \geq \frac{\mu}{a^p} |J(t)|^p - \int_0^t ds \chi(t-s) J'(s), \quad J(t) \equiv \int_{\Omega} u(x)(t) \psi_1(x). \quad (47)$$

Предположим теперь, что имеет место начальное условие

$$J_0 = \int_{\Omega} u_0(x) \psi_1(x) dx > \left( \frac{\lambda_1 (1 + h_0) a^p}{\mu} \right)^{1/(p-1)}, \quad (48)$$

но тогда из неравенства (45) вытекает, что имеет место неравенство

$$\frac{dJ}{dt}(0) > 0. \quad (49)$$

Таким образом, найдется такое  $t_1 \in (0, T]$ , что

$$\frac{dJ}{dt}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1]. \quad (50)$$

Следовательно, из (45), (46) и (50) мы приходим к следующему неравенству:

$$(\lambda_1 + 1) \frac{dJ}{dt} + \lambda_1 (1 + h_0) J(t) \geq \frac{\mu}{a^p} |J(t)|^p \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1]. \quad (51)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть  $p > p_0$ . Тогда при выполнении условия

$$J_0 > \left( \frac{\lambda_1 (1 + h_0) a^p}{\mu} \right)^{1/(p-1)}, \quad J_0 \equiv \int_{\Omega} u_0(x) \psi_1(x) dx$$

имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_{\infty}} J(t) = +\infty, \quad T_{\infty} \leq -\frac{1}{p-1} \ln \left( 1 - \frac{\lambda_1 (1 + h_0) a^p}{\mu} J_0^{1-p} \right),$$

где

$$J(t) \equiv \int_{\Omega} u(x)(t) \psi_1(x) dx.$$

и значит решение задачи (15), (16), понимаемое в слабом обобщенном смысле определения 1, разрушается за конечное время.

## Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // УМН. – 1994. – Т. 49, вып. 4(298). – С. 47 – 74.
2. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Матем. – 1989. – №2. – С. 55 – 61.
3. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Свиридюк Г.А. // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57, вып. 3. – С. 192 – 207.
4. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, вып. 5. – С. 252 – 272.
5. Корпусов, М.О. О разрушении решения уравнения с градиентной нелинейностью // М.О. Корпусов // Дифференциальные уравнения, в печати.
6. Бонч-Бруевич, В.Л. Физика полупроводников / В.Л. Бонч-Бруевич, С.Г. Калашников. – М.: Наука, 1990. – 672 с.
7. Бонч-Бруевич, В.Л. Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках / В.Л. Бонч-Бруевич, И.П. Звягин, А.Г. Миронов. – М.: Наука, 1972. – 417 с.
8. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8 / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1992. – 664 с.
9. Басс, Ф.Г. Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках / Ф.Г. Басс, В.С. Бочков, Ю.С. Гуревич. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
10. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
11. Демидович, В.П. Лекции по математической теории устойчивости / В.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
12. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. – М.: Наука, 1987. – 480 с.
13. Ватсон, Г.Н. Теория Бесселевых функций. Часть I / Г.Н. Ватсон. – М.: Изд-во, иностр. лит., 1949. – 800 с.

Максим Олегович Корпусов, доктор физико-математических наук, кафедра математики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), korpusov@gmail.com.

---

## The Destruction of the Solution of the Nonlocal Equation with Gradient Nonlinearity

*M.O. Korpusov*, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation)

In this paper we continue our consideration of equations with gradient nonlinearities. In this paper, we consider initial-boundary value problem in a bounded domain with smooth boundary for non-local in time equation with gradient nonlinearity and prove the local solvability of the strong generalized sense, in addition, we obtain sufficient conditions for the destruction of a finite time and sufficient conditions for global in time solubility.

*Ключевые слова:* nonlocal equation with gradient nonlinearity, Sobolev type equations, the destruction of the solutions.

## References

1. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russ. Math. Surv.*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45 – 74.
2. Sviridyuk G.A. One Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equation [Oдна zadacha dlya obobshchennogo fil'tratsionnogo uravneniya Bussineska]. *Russian Mathematics*, 1989, no. 2, pp. 55 – 61.
3. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev type. *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, 1994, vol. 42, no. 3, pp. 601 – 614.
4. Sviridyuk G.A. Phase Spaces of Semilinear Equations of Sobolev Type with Relatively Strongly Sectorial Operator [Fazovyе prostranstva polulineynykh uravneniy tipa Soboleva s otnositel'no sil'no sektorial'nym operatorom]. *Algebra i analiz*, 1994, vol. 6, issue 5, pp. 252 – 272.
5. Korpusov M.O. Blow-up Solutions of the Equation with Gradient Nonlinearity [O razrushenii resheniya uravneniya s gradientnoy nelineynost'yu]. *Differential Equations*, in print.
6. Bonch-Bruevich V.L., Kalashnikov S.G. *Fizika poluprovodnikov* [Physics of Semiconductors]. Moscow, Nauka, 1990. 672 p.
7. Bonch-Bruevich V.L., Zvyagin I.P., Mironov A.G. *Domennaya elektricheskaya neustoychivost' v poluprovodnikakh* [Blast Electric Instability in Semiconductors]. Moscow, Nauka, 1972. 417 p.
8. Landau L.D., Lifshits E.M. *Elektrodinamika sploshnykh sred. Teoreticheskaya fizika. T. 8* [Electrodynamics of Continuous Media. Theoretical Physics. Vol. 8]. Moscow, Nauka, 1992. 664 p.
9. Bass F.G., Bochkov V.S., Gurevich Yu.S. *Elektrony i fonony v ogranichennykh poluprovodnikakh* [Electrons and Phonons in a Limited Semiconductors]. Moscow, Nauka, 1984. 288 p.
10. Lions Zh.-L. *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems]. Moscow, Mir, 1972. 588 p.
11. Demidovich V.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the Mathematical Theory of Stability]. Moscow, Nauka, 1967. 472 p.
12. Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Regimes with Peaking in Problems for Quasilinear Parabolic Equations]. Moscow, Nauka, 1987. 480 p.
13. Watson G.N. *Teoriya Besselykh funktsiy. Chast' I* [The theory of Bessel functions. Part I] Moscow, Izd-vo Inostr. lit., 1949. 800 p.

Поступила в редакцию 11 ноября 2011 г.