

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ОТНОСИТЕЛЬНО СЕКТОРИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

О.А. Рузакова, Е.А. Олейник

В работе исследуется вопрос ε -управляемости линейных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной по времени $L \dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t)$, $0 < t < T$. Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, а оператор M сильно (L, p) -секториален. Данные условия гарантируют существование аналитической в секторе разрешающей полугруппы однородного уравнения $L \dot{x}(t) = Mx(t)$. С помощью теории вырожденных полугрупп операторов с ядрами исходное уравнение редуцировано к системе двух уравнений: регулярного, т.е. разрешенного относительно производной (на образе разрешающей полугруппы однородного уравнения) и сингулярного (на ядре полугруппы) с нильпотентным оператором при производной. Используя результаты об ε -управляемости регулярного и сингулярного уравнений, получен критерий ε -управляемости исходного уравнения соболевского типа с относительно p -секториальным оператором в терминах операторов, входящих в уравнение. Абстрактные результаты использованы при исследовании ε -управляемости конкретной начально-краевой задачи, которая является линеаризацией в нуле системы уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода.

Ключевые слова: относительно p -секториальные операторы, управляемость.

Введение

Пусть \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{U} — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ (т. е. линейный непрерывный), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ (т. е. линейный замкнутый, плотно определенный в \mathfrak{X}), $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$. Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \quad (1)$$

для уравнения

$$L \dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t), \quad 0 < t < T. \quad (2)$$

Основной целью данной работы является исследование ε -управляемости уравнения (2) при условии, что оператор M сильно (L, p) -секториален [1]. Данные условия гарантируют существование аналитической в секторе разрешающей полугруппы однородного уравнения $L \dot{x}(t) = Mx(t)$.

Уравнения вида (2), называемые уравнениями соболевского типа, все чаще привлекают внимание исследователей [2, 3]. При этом в приложениях часто вместо условия Коши (1) рассматривают обобщенное условие Шоултера–Сидорова

$$P(x(0) - x_0) = 0, \quad (3)$$

где P — проектор, являющийся единицей полугруппы операторов.

Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (2) сводится к уравнению

$$\dot{x}(t) = Sx(t) + L^{-1}Bu(t) \quad (4)$$

на пространстве \mathfrak{X} . Обзор результатов об ε -управляемости уравнения (4) см. [4].

Отметим, что управляемость уравнения (2) в случае, когда $\ker L \neq \{0\}$, изучалась ранее В.Е. Федоровым и О.А. Рузаковой в предположении (L, σ) -ограниченности оператора M и сильной (L, p) -радиальности оператора M в работах [5 – 7]. Используя данные результаты, мы формулируем критерий ε -управляемости уравнения (2) для случая сильной (L, p) -секториальности оператора M , что позволяет исследовать вопрос об ε -управляемости начально-краевой задачи для системы уравнений фазового поля.

1. Относительно p -секториальные операторы и сильные решения

Приведем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные результаты, доказательства которых можно найти в [1, 2].

Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ – банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из \mathfrak{X} в \mathfrak{Y} . Если $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$, то обозначение сократится до $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве \mathfrak{X} , действующих в \mathfrak{Y} , будем обозначать $Cl(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Множество операторов $Cl(\mathfrak{X}; \mathfrak{X})$ обозначим через $Cl(\mathfrak{X})$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $M \in Cl(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$, $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, $R_{(\mu, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p R_{\mu_k}^L(M)$, $L_{(\mu, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p L_{\mu_k}^L(M)$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Определение 1. Оператор M называется сильно (L, p) -секториальным, $p \in \mathbb{N}_0$, если

(i) существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор

$$S_{a, \Theta}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M);$$

(ii) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\max \left\{ \|R_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}, \|L_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})} \right\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^p |\mu_k - a|}$$

при любых $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{a, \Theta}^L(M)$;

(iii) для всех $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{a, \Theta}^L(M)$

$$\left\| R_{(\mu, p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1} \right\|_{\mathfrak{X}} \leq \frac{K}{|\lambda - a| \prod_{k=0}^p |\mu_k - a|};$$

(iv) существует плотный в \mathfrak{Y} идеал \mathfrak{Y}° такой, что

$$\left\| M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu, p)}^L(M)y \right\|_{\mathfrak{Y}} \leq \frac{\text{const}(y)}{|\lambda - a| \prod_{k=0}^p |\mu_k - a|} \quad \forall y \in \mathfrak{Y}^{\circ}$$

при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{a, \Theta}^L(M)$.

Теорема 1. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален. Тогда

(i) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$;

- (ii) $L_k = L \Big|_{\mathfrak{X}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $M_k = M \Big|_{\text{dom}M_k} \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $\text{dom}M_k = \text{dom}M \cap \mathfrak{X}^k$, $k = 0, 1$;
- (iii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0; \mathfrak{X}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$;
- (iv) существует аналитическая в секторе полугруппа $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, разрешающая уравнение $L \dot{x}(t) = Mx(t)$;
- (v) инфинитезимальным генератором аналитической полугруппы $\{X_1^t = X^t \Big|_{\mathfrak{X}^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ является оператор $S_1 = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}^1)$;
- (vi) оператор $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$ нильпотентен степени не больше p .

Через P (Q) обозначим проектор вдоль \mathfrak{X}^0 (\mathfrak{Y}^0) на \mathfrak{X}^1 (\mathfrak{Y}^1).

При заданной функции $f : (0, T) \rightarrow \mathfrak{Y}$ рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \tag{5}$$

и задачу Шоултера-Сидорова

$$P(x(0) - x_0) = 0 \tag{6}$$

для уравнения

$$L \dot{x}(t) = Mx(t) + f(t), \quad 0 < t < T. \tag{7}$$

Определение 2. Сильным решением задачи (5), (7), ((6), (7)) назовем вектор-функцию $x \in W_q^1(\mathfrak{X})$, если она удовлетворяет условию (5), ((6)) и почти всюду на интервале $(0, T)$ удовлетворяет уравнению (7).

Существование и единственность сильного решения задач доказаны в [8],[9].

Теорема 2. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален, $f \in W_q^{p+1}(\mathfrak{Y})$

$$x_0 \in \mathcal{P}_x = \left\{ x \in \text{dom}M : (I - P)x = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} (I - Q) f^{(k)}(0) \right\}.$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (5), (7), имеющее вид

$$x(t) = X^t x_0 + \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} ((I - Q) f)^{(k)}(t). \tag{8}$$

Теорема 3. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален, $y \in W_q^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0 \in \text{im}(\mu L_1 - M_1)^{-1} L_1$. Тогда существует единственное сильное решение задачи (6), (7), имеющее вид (8).

2. ε -управляемость

Будем следовать результатам, изложенным в [6]. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален, $p \in \mathbb{N}_0$, а функции управления $u(t)$ принадлежат $V(T) = W_q^{p+1}(\mathfrak{Y})$. Кроме того, необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие $x_0 \in \mathcal{P}_x$ теоремы 2 о разрешимости задачи Коши (в случае задачи Шоултера-Сидорова $x_0 \in \text{im}(\mu L_1 - M_1)^{-1} L_1$). Множество функций управления из $V(T)$, удовлетворяющих этому условию, обозначим $V_{x_0}(T)$. Рассмотрим сначала задачу Коши (1), (2).

В силу теоремы 1 задача (1), (2) редуцируется к системе двух задач:

$$\dot{x}^1(t) = S_1 x^1(t) + L_1^{-1} Q B u(t), \quad x^1(0) = P x_0 = x_0^1 \tag{9}$$

на пространстве \mathfrak{X}^1 ,

$$H\dot{x}^0(t) = x^0(t) + M_0^{-1}(I - Q)Bu(t), \quad x^0(0) = (I - P)x_0 = x_0^0 \quad (10)$$

на пространстве \mathfrak{X}^0 . При этом первые два слагаемых в формуле (8) дают решение задачи (9), а выражение

$$- \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I - Q)Bu^{(k)}(t)$$

задает решение задачи (10) при выполнении условия согласования.

Говоря об управляемости системы, описываемой некоторым уравнением, будем через $x(T; x_0; u(t))$ обозначать значение в момент времени T решения задачи (1), (2) с начальным значением x_0 и функцией управления $u(t)$.

Определение 3. Система (2) называется ε -управляемой за время T , если для любых точек $x_0 \in \text{dom}M$, $\tilde{x} \in \mathfrak{X}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует управление $u(t) \in V_{x_0}(T) \neq \emptyset$ такое, что $\|x(T; x_0; u(t)) - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$.

Аналогично результатам [6] справедлива

Теорема 4. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален. Система (2) ε -управляема за время T (за свободное время) в том и только в том случае, когда

$$\overline{\text{span}}\{\text{im}X^s L_1^{-1}QB, 0 \leq s \leq T\} = \mathfrak{X}^1 \quad (\overline{\text{span}}\{\text{im}X^T L_1^{-1}QB, T \geq 0\} = \mathfrak{X}^1),$$

$$\text{span}\{\text{im}H^k M_0^{-1}(I - Q)B, k = \overline{0, p}\} = \text{dom}M_0.$$

3. Начально-краевая задача для системы уравнений фазового поля

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\theta(x, 0) + \varphi_1(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t) + \lambda \theta(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}(x, t) + \lambda \varphi_i(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad i = \overline{1, m}, \quad (13)$$

для системы уравнений

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x, t) = \Delta \theta(x, t) + u_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (14)$$

$$\Delta \varphi_1(x, t) + \sum_{j=1}^m \alpha_{1j} \varphi_j(x, t) + \theta(x, t) + u_1(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (15)$$

$$\Delta \varphi_i(x, t) + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \varphi_j(x, t) + u_i(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad i = \overline{2, m}, \quad (16)$$

которая является линеаризацией в нуле системы уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода [10, 11]. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $\lambda, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, m}$. Искомыми функциями являются $\theta(x, t)$, $\varphi_i(x, t)$, $i = \overline{1, m}$.

Редуцируем задачу (11) – (16) к задаче (1), (2). Сначала сделаем замены $\theta(x, t) + \varphi_1(x, t) = v(x, t)$, $\varphi_i(x, t) = w_i(x, t)$, $i = \overline{1, m}$. Тогда задача примет вид

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x, t) + \lambda v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (18)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial n}(x, t) + \lambda w_i(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad i = \overline{1, m}, \quad (19)$$

$$v_t(x, t) = \Delta v(x, t) - \Delta w_1(x, t) + u_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (20)$$

$$\Delta w_1(x, t) + (\alpha_{11} - 1)w_1(x, t) + \sum_{j=2}^m \alpha_{1j}w_j(x, t) + v(x, t) + u_1(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (21)$$

$$\Delta w_i(x, t) + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}w_j(x, t) + u_i(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad i = \overline{2, m}. \quad (22)$$

Возьмем $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{U} = (L_2(\Omega))^{m+1}$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_{11} - 1 + \Delta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} + \Delta & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} + \Delta \end{pmatrix},$$

$\text{dom}M = \{(v, w_1, \dots, w_m) \in (H^2(\Omega))^{m+1} : (\frac{\partial}{\partial n} + \lambda)v(x) = (\frac{\partial}{\partial n} + \lambda)w_i(x) = 0, x \in \partial\Omega, i = \overline{1, m}\}$. Тем самым определены операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X})$, причем $\ker L = \{0\} \times (L_2(\Omega))^m$.

Обозначим

$$\tilde{\Lambda}^k = \begin{pmatrix} \lambda_k & -\lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_{11} - 1 + \lambda_k & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} + \lambda_k & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} + \lambda_k \end{pmatrix},$$

$Az = \Delta z$, $\text{dom}A = H^2_{\frac{\partial}{\partial n} + \lambda}(\Omega) = \{z \in H^2(\Omega) : \frac{\partial z}{\partial n}(x) + \lambda z(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A , занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. Кроме того, введем в рассмотрение оператор $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, задаваемый матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1m} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & -\alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

Согласно результатам [12] справедлива

Теорема 5. Пусть $\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$. Тогда оператор M сильно $(L, 0)$ -секториален.

Теорема 6. Если $\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$, то задача (17)–(22) ε -управляема.

Доказательство. Действительно,

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{2,2}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{-|\Lambda^k|} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{3,2}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{|\Lambda^k|} & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{m+1,2}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-1)^m |\Lambda^k|} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{2,3}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{|\Lambda^k|} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{3,3}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{|\Lambda^k|} & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{m+1,3}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-1)^{m+1} |\Lambda^k|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{2,m+1}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-1)^m |\Lambda^k|} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{3,m+1}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-1)^{m+1} |\Lambda^k|} & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{m+1,m+1}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{-|\Lambda^k|} \end{pmatrix},$$

где Λ^k – матрица $\tilde{\Lambda}^k$ с вычеркнутыми первой строкой и первым столбцом, $\Lambda_{i,j}^k$ – матрица Λ^k с вычеркнутыми первой и i -й строками и первым и j -м столбцом, $i, j = \overline{2, m+1}$. Условие из теоремы 4

$$\overline{\text{span}\{\text{im} H^k M_0^{-1} (I - Q) B, k = \overline{0, p}\}} = \text{dom} M_0$$

имеет вид

$$\text{span} \left\{ \text{im} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{2,2}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{-|\Lambda^k|} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{3,2}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{|\Lambda^k|} & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{m+1,2}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-1)^m |\Lambda^k|} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{2,3}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{|\Lambda^k|} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{3,3}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{|\Lambda^k|} & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{m+1,3}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-1)^{m+1} |\Lambda^k|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{2,m+1}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-1)^m |\Lambda^k|} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{3,m+1}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-1)^{m+1} |\Lambda^k|} & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda_{m+1,m+1}^k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{-|\Lambda^k|} \end{pmatrix} \right\} = (H^2(\Omega))^m.$$

Оператор $L_1^{-1} = I : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, тогда условие

$$\overline{\text{span}\{\text{im} X^s L_1^{-1} Q B, 0 \leq s \leq T\}} = \mathfrak{X}^1$$

при $s = 0$ принимает вид $\overline{\text{im} L_1^{-1} Q B} = L_2(\Omega)$, следовательно, так же выполняется.

По теореме 4 получаем требуемое. \square

Авторы выражают искреннюю благодарность и признательность Георгию Анатольевичу Свиридюку за проявленный интерес к работе.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47 – 74.
2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
3. Demidenko, G.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest – Order Derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N. Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
4. Шолохович, Ф.А. Об управляемости линейных динамических систем / Ф.А. Шолохович // Изв. УрГУ. – 1998. – № 10, вып. 1. – С. 103 – 126.
5. Федоров, В.Е. Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1137 – 1139.

6. Федоров, В.Е. Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Мат. заметки. – 2003. – Т. 74, № 4. – С. 618 – 628.
7. Федоров, В.Е. Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно p -радиальными операторами / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 7. – С. 54 – 57.
8. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912 – 1919.
9. Федоров, В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131 – 160.
10. Плотников, П.И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П.И. Плотников, А.В. Клепачева // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 651 – 669.
11. Плотников, П.И. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля / П.И. Плотников, В.Н. Старовойтов // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 3. – С. 461 – 471.
12. Федоров, В.Е. Ограниченные решения линеаризованной системы уравнений фазового поля / В.Е. Федоров, М.А. Сагадеева // Неклассические уравнения математической физики: тр. семинара, посвящ. 60-летию проф. В.Н.Врагова / отв. ред. А.И. Кожанов; Рос. Акад. наук, Сиб. отд-ние, ин-т математики им. С.Л. Соболева. – Новосибирск, 2005. – С. 275 – 284.

Ольга Александровна Рузакова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), oruzakova@gmail.com.

Екатерина Андреевна Олейник, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), oleynik.katerina@mail.ru.

On the Controllability of Linear Sobolev Type Equations with Relatively Sectorial Operator

O.A. Ruzakova, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),

E.A. Oleynik, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

ε -controllability of linear first order differential equations not resolved with respect to the time derivative $L \dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t)$, $0 < t < T$ are studied. It is assumed that $\ker L \neq \{0\}$ and the operator M is strongly (L, p) -sectorial. These conditions guarantee the existence of an analytic semigroup in the sector of the resolution of the homogeneous equation $L \dot{x}(t) = Mx(t)$. Using the theory of degenerate semigroups of operators with kernels the original equation is reduced to a system of two equations: regular, i.e. solved for the derivative (on the image of the semigroup of the homogeneous equation) and the singular (on the kernel of the semigroup) with a nilpotent operator at the derivative. Using the results of ε -controllability of the regular and singular equations, necessary and sufficient conditions of ε -controllability of the original equation of Sobolev type with respect to p -sectorial operator in terms of the operators are obtained. Abstract results are applied to the study of ε -controllability of a particular boundary-value problem, which is the linearization at zero phase-field equations describing the theory in the framework of mesoscopic phase transition.

Keywords: relatively p -sectorial operators, controllability.

References

1. Sviridyuk, G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45 – 74.
2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo, VSP, 2003.
3. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest – Order Derivative*. N. Y.; Basel; Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003.
4. Sholohovich F.A. On the Controllability of Linear Dynamical Systems [Ob upravlyaemosti lineynykh dinamicheskikh sistem]. *Izvestie UrGU*, 1998, no. 10, issue 1, pp. 103 – 126.
5. Fedorov V.E., Ruzakova O.A. One-dimensional Controllability of Sobolev Linear Equations in Hilbert Spaces. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 8, pp. 1216 – 1218.
6. Fedorov V.E., Ruzakova O.A. Controllability in Dimensions of One and Two of Sobolev-type Equations in Banach Spaces. *Mathematical Notes*, 2003, vol. 74, no. 4, pp. 583 – 592.
7. Fedorov V.E., Ruzakova O.A. Controllability of Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-radial Operators. *Russian Mathematics*, 2002, no. 7, pp. 52 – 55.
8. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of Sobolev Type Linear Equations with Relativity p-sectorial Operators. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 11, pp. 1882 – 1890.
9. Fedorov V.E. Holomorphic Solution Semigroups for Sobolev Type Equations in Locally Convex Spaces. *Sbornik: Mathematics*, 2004, vol. 195, no. 8, pp. 1205 – 1234.
10. Plotnikov P.I., Klepacheva A.V. Phase-field Equations and Gradient Flows of Marginal Functions. *Siberian Mathematical Journal*, 2001, vol. 42, no. 3, pp. 551 – 567.
11. Plotnikov P.I., Starovoytov V.N. Stefan Problem with Surface Tension as the Limit of the Phase-field Model. *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 3, pp. 395 – 404.
12. Fedorov V.E., Sagadeeva M.A. Bounded Solutions of the Linearized System of Phase Field [Ogranichennyye resheniya linearizovannoy sistemy uravneniy fazovogo polya]. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki: tr. seminara, posvyashch. 60-letiyu prof. V.N. Vragova, Ros. Akad. nauk, Sib. otd-nie, in-t matematiki im. S.L. Soboleva*. Novosibirsk, 2005, pp. 275 – 284.

Поступила в редакцию 15 ноября 2011 г.