

О ДЕКОМПОЗИЦИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.Ф. Чистяков, Э.А. Таиров, Е.В. Чистякова, А.А. Левин

Рассматриваются квазилинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), с тождественно вырожденной матрицей перед производной искомой вектор-функции и разностные схемы, применяемые для их решения. В работе обсуждаются условия, обеспечивающие на каждом шаге вычислительного процесса возможность последовательного решения алгебраических (конечных) уравнений и подстановки этих решений в уравнения динамики. Приведены результаты численных экспериментов для систем ОДУ, описывающих прямоточную котельную установку.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, индекс, декомпозиция, разностные схемы, математические модели, прямоточные паровые котлы.

Введение

Рассмотрим вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(x, t, \nu)\dot{x} + B(x, t, \nu) = 0, \quad t \in T = [\alpha, \beta], \quad (1)$$

где $A(v, t, \nu) - (n \times n)$ -матрица, $B(v, t, \nu) - n$ -мерная вектор-функция, определенные в области $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n \times T \times \mathcal{N}$, $x \equiv x(t, \nu)$ - искомая вектор-функция, ν - векторный параметр из множества $\mathcal{N} = [-\nu_1, \nu_1] \times [-\nu_1, \nu_1] \times \dots \times [-\nu_m, \nu_m] \subset \mathbf{R}^m$, $\dot{x} \equiv dx/dt$.

Предполагается, что характер вырождения определяется соотношениями

$$\det A(v, t, \nu) \equiv 0 \quad \forall (t, v, \nu) \in \mathbf{V}, \quad (2)$$

и заданы начальные данные

$$x(\alpha, \nu) = a(\nu), \quad (3)$$

где $a(\nu)$ - заданная вектор-функция, $\nu \in \mathcal{N}$.

Под решением системы (1) на отрезке $T_\varepsilon = [\alpha, \alpha + \varepsilon] \subseteq T$ при значении параметра $\nu = \nu_*$ мы будем понимать любую вектор-функцию $x(t, \nu_*) \in \mathbf{C}^1(T_\varepsilon)$, которые обращают исходные уравнения в тождество на T_ε .

В частности, в виде системы (1), удовлетворяющей условию (2), можно записать системы дифференциальных и алгебраических уравнений, связанные по части переменных. Единого названия таких систем в настоящее время не существует. В литературе используют термины: алгебро-дифференциальные системы (АДС), дескрипторные системы, системы леонтьевского типа (см., например, соответственно [1 - 3]). В зарубежной литературе утвердилось название: дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ) (см., например, [4]). В теории бесконечномерных задач уравнения с необратимым оператором при производной искомой функции называют уравнениями соболевского типа (см., например, [5]). Интерес к ДАУ стимулируется проблемами математического моделирования в прикладных областях, в частности, в теориях электронных схем и электрических цепей, механике и теплотехнике (см., например, [5 - 8] и приводимую там библиографию). В данной работе проведено обоснование декомпозиции одной разностной схемы для ДАУ, и эта расчетная схема применена к математической модели главного тракта прямоточного парового котла.

1. Теоремы существования

Приведем ряд необходимых для дальнейших рассуждений сведений. В работе используются нормы n -мерного вектора $v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^\top$, и $(\mu \times n)$ -матрицы $V = (v_{ij}, \ i = 1, 2, \dots, n, \ j = 1, 2, \dots, \mu)$, вычисляемые по правилам

$$\|v\| = \max\{|v_i|, \ i = 1, 2, \dots, n\}, \ \|V\| = \max\{\sum_{j=1}^n |v_{ij}|, \ i = 1, 2, \dots, \mu\}.$$

Под символами $\|v(w)\|$, $\|V(w)\|$ понимаются нормы вектор-функции $v(w)$ и матрицы $V(w)$, вычисленные в точке $w \in D \subseteq \mathbf{R}^q$. Включения $v(w), V(w) \in \mathbf{C}^l(D)$ означают, что все частные производные элементов вектор-функции $v(w)$ или матрицы $V(w)$ имеют непрерывные частные производные порядка до l включительно по всем компонентам вектора w в любой точке области D . Непрерывности соответствуют включения: $v(w), V(w) \in \mathbf{C}(D)$. Если $v(w), V(w) \in \mathbf{C}(D)$, то их нормы также непрерывны в D .

ДАУ обладают сложной внутренней структурой. Мерой сложности является целочисленная величина, называемая индексом.

Определение 1. Пусть для системы

$$\Lambda_1(x) := A(x, t, \nu_*)\dot{x} + B(x, t, \nu_*) = 0, \ t \in T, \quad (4)$$

где $\nu_* \in \mathcal{N}$, существует дифференциальный оператор

$$\Lambda_l(y) := \sum_{j=0}^l L_j(t, y, \dots, y^{(l+1)})(d/dt)^j,$$

со где $L_j(t, v, \dots, v_{l+1}) - (n \times n)$ -матрицы из $\mathbf{C}(T \times \mathbf{R}^{n(l+2)})$, со свойством

$$\Lambda_l(y) \circ \Lambda_1(y) = \tilde{A}(y, t)\dot{y} + \tilde{B}(y, t) \ \forall y \equiv y(t) \in \mathbf{C}^{l+1}(T),$$

причем $\det \tilde{A}(a(\nu_*), \alpha) \neq 0$. Минимально возможное l называется индексом системы (4) в окрестности точки $(a(\nu_*), \alpha, \nu_*)$.

Вычисление индекса является непростой задачей. Для этого нам потребуются следующие определения и утверждения.

Определение 2. (см., например [8]). Матрица, обозначаемая в дальнейшем как S^- , называется полуобратной к матрице S , если она удовлетворяет уравнению: $SS^-S = S$.

Лемма 1. [8]. Полуобратная матрица определена для произвольной матрицы S . Если выполнено условие Кронекера–Капелли: $\text{rank } S = \text{rank}(S|u)$, то система уравнений $Sy = u$ разрешима, и все ее решения описываются формулой: $y = S^-u + [E - S^-S]C$, где E —единичная матрица подходящей размерности, C —произвольный вектор.

Лемма 2. Пусть пучок постоянных матриц $\mathbf{A}(\lambda) = \lambda\bar{A} + \bar{B}$ регулярен: $\det A(\lambda) \neq 0$. Тогда $\text{rank}\bar{A} \geq \text{deg det } \mathbf{A}(\lambda)$, где deg —символ степени многочлена.

Доказательство. Если пучок матриц $\mathbf{A}(\lambda)$ регулярен, то существуют постоянные неособенные матрицы P, Q , со свойством

$$P\mathbf{A}(\lambda)Q = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & \bar{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{J} & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\bar{N}^k = 0$, \bar{J} – некоторый блок размерности $(d \times d)$ [9, с.354]. Отсюда

$$\deg \det \mathbf{A}(\lambda) = \deg[\det(\lambda E_d + \bar{J}) \det(\lambda \bar{N} + E_{n-d})] = \deg \det(\lambda E_d + \bar{J}) \cdot 1 = d.$$

Следовательно, $d \leq \text{rank} \bar{A}$, $d = \text{rank} \bar{A}$ тогда и только тогда, когда $\bar{N} = 0$. \square

Определение 3. Говорят, что пучок квадратных матриц $\lambda A(w) + B(w)$, $w \in D \subseteq \mathbf{R}^q$, где λ – скалярный параметр (в общем случае комплексный), удовлетворяет критерию «ранг-степень» в области D , если выполнены условия

1. $\max \text{rank} A(w) = r$, $w \in D$; 2. $\det[\lambda A(w) + B(w)] = \lambda^r a_0(w) + \dots$, $a_0(w) \neq 0 \forall w \in D$.

Следствие 1. Для пучка матриц $\lambda A(w) + B(w)$, $w \in D$, удовлетворяющего критерию «ранг-степень» справедливо равенство: $\text{rank} A(w) = \text{const} = r \forall w \in D$.

Лемма 3. [1] Матричный пучок $\mathcal{P}(\lambda; t) = \lambda \begin{pmatrix} A_1(w) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(w) \\ B_2(w) \end{pmatrix}$, $w \in D$, где блок $A_1(w)$ имеет полный ранг для любого $w \in D$, удовлетворяет критерию «ранг-степень» тогда и только тогда, когда

$$\det \mathcal{P}(\lambda; w) = \lambda^r a_0(w) + \dots, \quad a_0(t) = \det \begin{pmatrix} A_1(w) \\ B_2(w) \end{pmatrix} \neq 0 \forall w \in D. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть для задачи (1), (2) выполнены условия:

1. $A(v, t, \nu_*)$, $B(v, t, \nu_*) \in \mathbf{C}^m(T \times \mathbf{R}^n)$, $\nu_* \in \mathcal{N}$, $m \geq 2$;
2. $\text{rank} A(v, t, \nu_*) = r = \text{const}$ в окрестности точки $\zeta = (a(\nu_*), \alpha)$;
3. $\text{rank} A(\zeta, \nu_*) = \text{rank} [A(\zeta, \nu_*) | \tilde{b}]$, $\tilde{b} = -B(\zeta, \nu_*)$;
4. $\text{rank} A(\zeta, \nu_*) = \deg \det[\lambda A(\zeta, \nu_*) + \Theta(c)]$, где

$$\Theta(c) = \mathbf{B}(\zeta, \nu_*), \quad \mathbf{B}(v, t, \nu_*) = \frac{\partial}{\partial v} [B(v, t, \nu_*) + A(v, t, \nu_*)c], \quad c: A(\zeta, \nu_*)c = -\tilde{b}.$$

Тогда:

1. индекс системы равен 1;
2. существует отрезок $T_\varepsilon = [\alpha, \alpha + \varepsilon] \subseteq T$, на котором определено единственное решение $x(t, \nu_*) \in \mathbf{C}^m(T_\varepsilon)$ задачи (1), (2).

Следствие 2. Пусть

1. $A(v, t, \nu)$, $B(v, t, \nu) \in \mathbf{C}^m(\mathbf{V})$, $m \geq 2$;
2. $\text{rank} A(v, t, \nu) = r = \text{const}$ в окрестности точки $(a(\nu_*), \alpha, \nu_*)$;
3. для любого $\nu_* \in \mathcal{N}$ выполнены условия 3, 4 теоремы 1.

Тогда существует отрезок $T_\varepsilon \subseteq T$, на котором определено решение $x^*(t, \nu) \in \mathbf{C}^m(T_\varepsilon \times \mathcal{N})$ задачи (1), (2).

Следствие 3. Пусть

1. $A(v, t, \nu)$, $B(v, t, \nu) \in \mathbf{C}^m(\mathbf{V})$, $m \geq 2$;

2. при $\nu = \nu_*$ на отрезке T определено решение задачи (1), (3) $x(t, \nu_*)$;
 3. $\text{rank}A(z(t)) = \text{deg det}[\lambda A(z(t)) + \Theta(z(t))] = r = \text{const}$, $t \in T$, где $z(t) = (x(t, \nu_*), t, \nu_*)$,

$$\Theta(z(t)) = \mathbf{B}(z(t)), \quad \mathbf{B}(v, t, \nu_*) = \frac{\partial}{\partial v} [B(v, t, \nu_*) + A(v, t, \nu_*)c], \quad c = \dot{x}(t, \nu_*).$$

Тогда существует окрестность

$$\mathbf{U} = \{w : \|w - a(\nu_*)\| < \varrho, \text{rank}A(w, \alpha, \nu_*) = \text{rank}[A(w, \alpha, \nu_*)|B(w, \alpha, \nu_*)]\}$$

такая, что для любого $b \in \mathbf{U}$ на T определено решение системы (1) с начальным данным $x(0, \nu_*) = b$.

Теорема 1 и следствия к ней являются частным случаем утверждений из [10].

Замечание 1. В теореме 1, согласно лемме 1, $c = S^{-1}\tilde{b} + [E - S^{-1}S]C$, $S = A(a(\alpha), \alpha, \nu_*)$.

Замечание 2. Если старший коэффициент многочлена в следствии 3

$$\xi(t; \lambda) = \text{det}[\lambda A(z(t)) + \Theta(z(t))] = a_r(t)\lambda^r + \dots + a_0(t)$$

обращается в нуль в точке t_* : $a_r(t_*) = 0$, то эта точка является особой. В ней могут ответвляться другие решения системы (1) или другие решения могут иметь разрывы.

Пример 1. Рассмотрим две системы

$$1) \begin{pmatrix} -e^t & 1 \\ -e^t & 1 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} + x = 0; \quad 2) \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} + y = 0,$$

где $t \in T = [-1, 1]$. Обе системы имеют тривиальное решение. Формально общие решения можно записать так

$$x(t, c) = c_1 \begin{pmatrix} e^t & e^t \end{pmatrix}^\top / (e^t - 1), \quad y(t, c) = \varphi_1(t)c_1 + \varphi_2(t)c_2,$$

где $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $\varphi_1(t) = \{0, t \in T_1; g(t), t \in T_2\}$, $\varphi_2(t) = \{g(t), t \in T_1; 0, t \in T_2\}$, $g(t) = (t^2 \ t^3)^\top$, $T_1 = [-1, 0]$, $T_2 = (0, 1]$, \top -символ транспонирования.

У системы 1) все другие решения имеют разрыв в точке $t = 0$. У системы 2) в этой точке ответвляются ненулевые решения, причем ранг матрицы $A(t)$ постоянен и не несет информации о наличии на T особых точек. Здесь $\xi_1(t; \lambda) = (-e^t + 1)\lambda + 1$, $\xi_2(t; \lambda) = -t\lambda + 1$, $a_1(0) = 0$ в обоих многочленах. Эти нули совпадают с особыми точкам ДАУ.

К сожалению, ДАУ, у которых пучок матриц Якоби на решении удовлетворяет критерию «ранг-степень», не исчерпывают всех систем индекса 1.

Пример 2. Рассмотрим тестовую задачу вида (1), (3)

$$A(x, t, \nu)\dot{x} + B(x, t, \nu) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T = [0, 1], \quad (7)$$

где $(x_1(0) \ x_2(0))^\top = (0 \ 0)^\top$. Матрица $A(x, t, \nu)$ здесь меняет ранг в сколь угодно малой окрестности начальной точки. Тем не менее, простое вычисление показывает, что в определении 1 можно принять

$$\Lambda_1(y) = \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{y}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\dot{y}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}, \quad \Lambda_1(y) \circ [A(y, t, \nu)\dot{x} + B(y, t, \nu)] = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} \quad \forall y \in \mathbf{C}^2(T).$$

В различных областях приложений применяют следующий прием: ДАУ регуляризуют, дифференцируя алгебраические связи. В нашем случае это приводит в тупик. После дифференцирования в системе (7) второго уравнения $x_2 = 0$ мы получаем задачу, у которой матрица перед производной вырождается на решении, и непонятно, что делать дальше.

Достаточно часто в приложениях дифференциальные и алгебраические уравнения разделены, и система (1) имеет вид

$$A(t, x, \nu)\dot{x} + B(t, x, \nu) = \begin{pmatrix} A_1(t, x, \nu) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} B_1(t, x, \nu) \\ B_2(t, x, \nu) \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T = [\alpha, \beta]. \quad (8)$$

Для системы (8) справедливо утверждение о разрешимости ДАУ на всем отрезке T .

Теорема 2. Пусть для задачи (8), (2) выполнены условия:

1. $A(v, t, \nu), B(v, t, \nu) \in \mathbf{C}^m(\mathbf{V}), m \geq 2$;
2. $\max\{\text{rank}A(v, t, \nu), (v, t, \nu) \in \mathbf{V}\} = r$;
3. $\text{rank}A(v, t, \nu) = \text{rank} [A(v, t, \nu) | \tilde{b}(\nu)], \tilde{b}(\nu) = -B(v, t, \nu)$;
4. старший коэффициент многочлена

$$\det \left[\lambda A(v, t, \nu) + \frac{\partial B(v, t, \nu)}{\partial v} \right] = a_r(v, t, \nu)\lambda^r + \dots$$

удовлетворяет условию $|a_r(v, t, \nu)| \geq c_0 > 0, \forall (v, t, \nu) \in \mathbf{V}$;

5. $\|A_1(v, t, \nu)\| + \|\partial B_2(v, t, \nu)/\partial v\| \leq \kappa_1, \|B(v, t, \nu)\| \leq \kappa_2 + \kappa_3\|v\|,$

$$\|\partial B_2(v, t, \nu)/\partial t\| \leq \kappa_4 + \kappa_5\|v\| \quad \forall (v, t, \nu) \in \mathbf{V}, \quad \kappa_i = \text{const}, i = \overline{1, 5}.$$

Тогда существует единственное решение $x(t, \nu) \in \mathbf{C}^m(T \times \mathcal{N})$ задачи (8), (2).

Доказательство проводится тем же способом, как в теореме 1 из [10].

2. Численные методы

Обоснование численных методов для решения задачи (1), (2) связано с со значительными трудностями. На отрезке $T = [\alpha, \beta]$ введем сетку $t_i = \alpha + ih, i = 0, 1, \dots, M - 1, h = (\beta - \alpha)/M, M$ – число узлов сетки. Запишем неявную схему Эйлера в двух вариантах

$$A(Y_{i+1})\frac{x_{i+1} - x_i}{h} + B(Y_{i+1}) = 0, \quad (9)$$

$$A(Y_i)\frac{x_{i+1} - x_i}{h} + B(Y_{i+1}) = 0, \quad (10)$$

где $Y_i = (t_i, x_i, \nu_*)$, $x_0 = a(\nu_*)$, и при каждом i нужно один раз решить нелинейную систему.

Пример 3. Рассмотрим тестовую задачу вида (1), (3)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ (x_1 - x_2)x_1 & (x_1 - x_2)x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 2e^{2t} \\ (x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T = [0, 1], \quad (11)$$

где $(x_1(0) \ x_2(0))^T = (1 \ 1)^T$. Применим теорему 1. Имеем

$$A(\zeta)c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c = -B(\zeta) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \kappa \\ 2 - \kappa \end{pmatrix} \quad \forall \kappa \in \mathbf{R},$$

$$\text{rank } A(\zeta) = \text{deg det}[\lambda A(\zeta) + \Theta(c)] = \text{deg det} \left[\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \kappa & 1 - \kappa \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right] = \text{deg}(-4\lambda - 4) = 1.$$

Согласно теореме 1, начальная задача для системы (9) имеет решение. Методом исключения неизвестных можно найти решение $(x_1(t) \ x_2(t))^T = (e^t \ e^t)^T$. Применим схемы (9), (10) для решения системы (9). Нелинейные системы будем решать методом Ньютона. За начальные данные при вычислении x_{i+1} будем брать вектор x_i [11]. Легко видеть, что для системы (11) в методе (9) матрица Якоби вырожденная для любой итерации, и метод Ньютона не применим.

Проведем анализ схемы (10). Она гораздо сложнее чем схема (9). Упростим ее. Разлагая в ряд Тэйлора вектор-функцию $B(Y_{i+1})$ и матрицу $A(Y_{i+1})$ в точке x_i приведем (9) к виду

$$[A_i + h(\tilde{B}_i + \tilde{A}_i)](x_{i+1} - x_i) = -hB_i, \quad (12)$$

где $A_i = A(Y_i)$, $B(Y_i)$,

$$\tilde{B}_i = \frac{\partial B(v, t, \nu)}{\partial v} \Big|_{(v, t, \nu) = Y_i}, \quad \tilde{A}_i = \frac{\partial [A(v, t, \nu)P_i]}{\partial t} \Big|_{(v, t, \nu) = Y_i}, \quad P_i = (x_i - x_{i-1})/h, \quad i \geq 1.$$

Если $i = 0$, то принимаем $P_0 = c$, где c —вектор из теоремы 1.

Теорема 3.

1. Пусть выполнены условия теоремы 1;
2. на отрезке $T_\varepsilon = [\alpha, \alpha + \varepsilon]$ задана сетка $t_i = \alpha + ih$, $i = 0, 1, \dots, M - 1$, $h = \varepsilon/M$.

Тогда, начиная с некоторого $M > M_0$, система (12) разрешима для всех i относительно x_{i+1} , и справедлива оценка $\|x_i - x(t_i)\| = O(h)$ равномерно по i .

Метод ниже не используется, поэтому мы опускаем доказательство.

Лемма 4. (см., например [12]) Пусть для неотрицательных чисел u_i , $i = 2, 3, \dots$ выполнено неравенство

$$u_i \leq c + t \sum_{j=1}^{i-1} u_j, \quad u_1 \leq c,$$

где c, t — неотрицательные постоянные. Тогда справедлива оценка (разностный аналог леммы Гронуолла-Беллмана): $u_i \leq c(1 + t)^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$

Для схемы (10) эти трудности отсутствуют. Проведем следующие преобразования. Продифференцируем второе уравнение в системе (8) и выпишем разностную аппроксимацию этого выражения

$$\tilde{B}_{2,i} \frac{x_{i+1} - x_i}{h} + G_i = 0, \quad \tilde{B}_{2,i} = \frac{\partial B_2(v, t, \nu)}{\partial x} \Big|_{(v, t, \nu) = Y_i}, \quad G_i = \frac{\partial B_2(v, t, \nu)}{\partial t} \Big|_{(v, t, \nu) = Y_i}.$$

Пусть выполнены условия теоремы 2. Из леммы 3 вытекает, что $\det S_i = \det \begin{pmatrix} A_{1,i} \\ \tilde{B}_{2,i} \end{pmatrix} \neq 0 \ \forall i$, и матрица $\tilde{B}_{2,i}$ имеет полный ранг для любого i . Тогда можно произвести разбиение $\tilde{B}_{2,i} =$

$(B_{21,i} \ B_{22,i})$ где $\det B_{22,i} \neq 0$ для любого i . Согласно разбиению матрицы $\tilde{B}_{2,i}$, произведем разбиение: $x_i = (y_i^\top \ z_i^\top)^\top$. Тогда из схемы (10) следует

$$\mathcal{A}_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + B_1(y_i, z_i, \nu_*) = 0, \quad \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = -B_{22,i}^{-1} [B_{21,i} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + G_i], \quad (13)$$

Здесь аргумент при вычислении функции B_1 сдвинут на один шаг. Матрица $\mathcal{A}_i = A_{11,i} - A_{12,i} B_{22,i}^{-1} B_{21,i}$ в (13) получена применением формулы Шура [9] к матрице S_i , следовательно, $\det \mathcal{A}_i \neq 0 \ \forall i$. Итак, мы произвели декомпозицию схемы (10), выписав схему (13). Здесь нам нужно обратить две матрицы $\mathcal{A}_i, B_{22,i}$. Мы получили существенное уменьшение объема вычислений. Например, если размерности матриц $\mathcal{A}_i, B_{22,i}$ равны, то количество операций уменьшается в 4 раза по сравнению с применением исходной схемы (10). К тому же нам не нужно решать нелинейные уравнения. Это очень важно при проведении вычислений в режиме реального времени.

Если мы подставим решение задачи (8), (2) в первое уравнение из (13), вычтем из полученного выражения уравнение (13) и перейдем к нормам, то в условиях теоремы 2 получим выражение $w_i \leq \sigma + \kappa h \sum_{j=1}^{i-1} w_j$, $w_i = \|z(t_i) - z_i\|$, $\sigma = O(h)$, $\kappa = const$. Из леммы 4 следует, что справедлива оценка $w_i \leq e^{\kappa(\beta-\alpha)\sigma}$.

Замечание 3. Если система (8) жесткая, то в (13) можно сдвиг аргумента производить следующим образом: слагаемое $B_1(y_i, z_i, \nu_*)$ заменить на слагаемое $B_1(y_{i+1}, z_i, \nu_*)$, и мы получим неявную схему. На сходимость это не влияет.

3. Модель основного тракта проточного парового котла

В технологической установке, называемой паровым котлом, вода в сети трубопроводов (схематично изображенных на рис. 1) последовательно нагревается в устройствах, называемых теплообменниками (ТО), по ходу от насоса к турбине газами и лучевым теплом, получаемыми от сгорания топлива в топке. Газы идут в противоположном направлении по отношению к ходу воды.

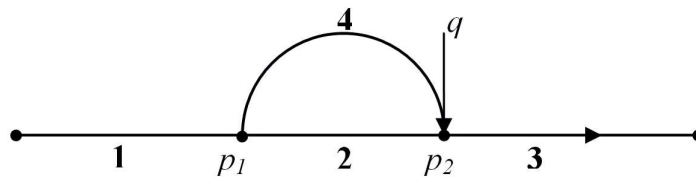


Рис. 1. Принципиальная схема главного тракта проточного котла

В ТО 1 происходит нагревание воды до температуры кипения, в ТО 2 (зона кипения) вода превращается в пар, а в ТО 3 (участок перегрева) пар доводится до нужной температуры и давления. По ветке 4 в ТО 3 подается вода из ТО 1 для регулирования температуры пара на выходе из котла. Содержание тепла в среде характеризуется величиной, называемой энтальпией и обозначаемой ниже буквой I . В простейшем случае $I = ct$, где c — теплоемкость среды, а t — ее температура. Система уравнений, описывающая ТО имеет вид

$$V_j \rho \frac{d\bar{I}_j}{d\tau} + D_{b,j}(I_j - I_{bx,j}) = \alpha_{b,j} H_j [\theta_j - t(p_i, \bar{I}_j)], \quad (14)$$

$$M_{m,j} c_m \frac{d\theta_j}{d\tau} = q_{L,j} + \alpha_{g,j} H_{g,j}(t_{g,j} - \theta_j) - \alpha_{b,j} H_{b,j}[\theta_j - t(p_i, \bar{I}_j)], \quad (15)$$

$$V_{g,j} \rho_g c_g \frac{d\bar{t}_{g,j}}{d\tau} = D_g c_g (t_{g,j} - t_{gbx,j}) - \alpha_{g,j} H_{g,j} (\bar{t}_{g,j} - \theta_j). \quad (16)$$

где $j = 1, 2, 3$ – номер ТО, $i = 1, 2$, $I_{bx,j}$, $t_{gbx,j}$ – входные в ТО энтальпия и температура газа, $D_{b,j}, D_g$ – расходы теплоносителя (пара, воды или пароводяной смеси) и газа через ТО, I_j – энтальпия на выходе из ТО, \bar{I}_j – средняя энтальпия, $\bar{I}_j = \gamma I_j + (1 - \gamma) I_{bx}$, $\gamma \in [0, 1]$ – коэффициент усреднения $t(p, I)$ – функция, связывающая температуру теплоносителя с энтальпией и давлением в ТО; $\rho = \rho(p, I)$ – функция плотности теплоносителя в ТО; θ_j – температура стенки ТО, $t_{g,j}$ – температура газа в ТО, D_g – расход газа, c_m, c_g – теплоемкости газа и металла, $V_j, V_{g,j}, H_{b,j}, H_{g,j}$ – объемы ТО и площади тепловоспринимающих поверхностей по воде и газу, $\alpha_{b,j}, \alpha_{g,j}$ – коэффициенты теплоотдачи по теплоносителю и газу, $q_{L,j}$ – лучевое тепло, воспринимаемое ТО.

В основу моделирования топки положен закон Стефана – Больцмана.

$$V_g \rho_g c_g \frac{dT_g}{d\tau} = -D_g c_g (T_g - rCK) - Q_L + Q_{ugl}, \quad (17)$$

$$M_z c_z \frac{dT_z}{d\tau} = -\frac{H}{\rho_z} (T_z - T_1) + Q_L, \quad Q_L = a_1 H ([z(T_g)]^4 - T_z^4), \quad (18)$$

где $T_g = t_g + rCK$, $T_z = \theta_t + rCK$, $T_1 = t(p_2, I_2) + rCK$, $rCK = 273.15$ – соответственно температуры газа на выходе из топки, тепловоспринимающего слоя и теплоносителя в градусах Кельвина, $z = cT_g$ – температура факела, $c = \text{const} = 1, 1$, Q_L – лучевое тепло, выделяемое топкой, Q_{ugl} – тепло выделяемое от сгорания топлива (угля), $Q_L = q_{L,1} + q_{L,2} + q_{L,3}$. Система уравнений, описывающих математическую модель ТО или топки, выражает законы сохранения. Количество тепла, поступающее из газом и лучевым теплом в теплообменник $D_g c_g (t_{g,j} - t_{gbx,j}) + q_{L,j}$, в стационарном состоянии равно количеству тепла, уносимого теплоносителем $D_{b,j} (I_j - I_{bx,j})$. Для топки количество тепла от сгорания топлива равно теплу, уносимому с газом и лучевым теплом: $Q_{ugl} = D_g c_g (T_g - rCK) + Q_L$.

Сеть трубопроводов моделируется гидравлической цепью (ГЦ). Под гидравлической цепью понимается плоский граф (для примера см. рис.1), для которого выполнены первый и второй законы Кирхгофа: а) количество среды втекающей в вершину графа, равно количеству вытекающей; б) сумма перепадов давлений в замкнутом контуре равна нулю. ГЦ из m узлов и r ветвей ставится в соответствие $(m \times r)$ – матрица соединения ветвей и границ \bar{A} , состоящая из нулей и единиц [13]. Уравнения, вытекающие из этих законов, дополняются соотношениями, связывающими давления в вершинах графа с расходами по ветвям. Используя результаты из [7], нестационарную модель ГЦ запишем в виде ДАУ

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{D}(t) \\ \dot{P}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_0 & A^\top \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(t) \\ P(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S|D(t)|D(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(t) + A_1^\top P_*(t) \\ Q(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \infty), \quad (19)$$

где $(A^\top \ A_1^\top) = \bar{A}$, $D(t) = (d_1(t) \ d_2(t), \dots, d_r(t))^\top$ – вектор-функция расходов среды по ветвям, $P(t) = (p_1(t) \ p_2(t), \dots, p_\mu(t))^\top$ – вектор-функция давлений в узлах, $P_*(t) = (p_{1,*}(t) \ p_{2,*}(t), \dots, p_{\nu,*}(t))^\top$ – вектор-функция известных давлений, $\mu + \nu = m$, $R = \text{diag}\{\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r\} > 0$ – параметры инерции ГЦ, $S_0 = \text{diag}\{s_{1,0}, s_{2,0}, \dots, s_{r,0}\} > 0$, $S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_r\} > 0$ – параметры сопротивлений ветвей ГЦ, $|D(t)|D(t) = (d_1(t)|d_1(t)|, \dots, d_r(t)|d_r(t)|)^\top$, $H(t) = (h_1(t) \ h_2(t), \dots, h_r(t))^\top$, $Q(t) = (q_1(t) \ q_2(t), \dots, q_r(t))^\top$ – вектора напоров и притоков в ГЦ. Индекс системы (19) глобально равен 2. В определения 1 можно принять

$$\Lambda_2 = \left[\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A & E_\mu \end{pmatrix} \right] \circ \left[\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_\mu \end{pmatrix} \right], \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ \Psi(D) & -AR^{-1}A^\top \end{pmatrix},$$

где $\det AR^{-1}A^T > 0$, $\Psi(D) = -[AR^{-1}S_0 + \partial(AS|D|D)/\partial D]$. При нулевых $H(t)$, $P_*(t)$ и $Q(t)$ система (19) имеет нулевое решение, которое является контрактивным. Рассмотрим скалярное произведение вектор-функции $(D^T(t), -P^T(t))^T$ с системой. Получим

$$\frac{d}{dt}(D(t), D^T(t)) = -S_0(D(t), D^T(t)) - S(|D(t)|D(t), D^T(t)) < 0.$$

Следовательно, $\|D(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. В силу алгебраических связей $\|P(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Замечание 4. Если в (19) положить $R = 0$, то мы получим стационарную ГЦ, которая исчерпывающе изучена в [13].

Используя формулы (14) – (18), выпишем ДАУ, описывающее модель котельной установки, принципиальная схема которой изображена на рис. 1. Параметры соответствуют реальной установке (прямоточному котлу ПК-24). Элементами управления здесь служат параметры Q_{ugl} и I_{bx} – теплосодержание воды на входе в котел, сопротивления участков s_3, s_4 , регулирующие количество воды, поступающее в котел и температуру пара на входе в турбину.

$$\begin{aligned} \text{Уравнения ГЦ:} & \begin{cases} 0 = x_3 - x_4 - x_6, \\ q(x_2, x_{10}) = x_4 - x_5 + x_6, \\ \varrho_3 \dot{x}_3 = x_1 + s_{0,3}x_3 + \left[s_3 + \kappa_1 \int_0^t (545 - x_{13}(s)) ds \right] |x_3|x_3 - h_1(t), \\ \varrho_4 \dot{x}_4 = -x_1 + x_2 + s_{0,4}x_4 + s_4|x_4|x_4, \\ \varrho_5 \dot{x}_5 = -x_2 + s_{0,5}x_5 + s_5|x_5|x_5 - h_2(t) \\ \varrho_6 \dot{x}_6 = -x_1 + x_2 + s_{0,6}x_4 + s_6|x_6|x_6; \end{cases} \\ \text{Уравнения ТО 1:} & \begin{cases} -a_{11}\dot{x}_7 = a_{12}x_3(x_7 - I_{bx}) - a_{13}(x_8 - a_{14}x_7), \\ -a_{15}\dot{x}_8 = a_{16}(x_9 - x_8) + a_{13}(x_8 - a_{14}x_7), \\ -a_{17}\dot{x}_9 = a_{18}(x_9 - x_{12}) + a_{16}(x_9 - x_8) \end{cases} \\ \text{Уравнения ТО 2:} & \begin{cases} -a_{21}\dot{x}_{10} = a_{22}x_4(x_{10} - x_7) - a_{23}(x_{11} - a_{24}x_{10}), \\ -a_{25}\dot{x}_{11} = -a_{26}(x_{12} - x_{11}) - a_{23}(x_{11} - a_{24}x_{10}) - \omega_1 Q(x_{16}, x_{17}), \\ -a_{27}\dot{x}_{12} = a_{28}(x_{12} - x_{15}) + a_{26}(x_{12} - x_{11}) \end{cases} \\ \text{Уравнения ТО 3:} & \begin{cases} -a_{31}\dot{x}_{13} = a_{32}x_5(x_{13} - I_{sm}) - a_{33}(x_{14} - a_{34}x_{13}), \\ -a_{35}\dot{x}_{14} = -a_{36}(x_{15} - x_{14}) + a_{33}(x_{14} - a_{34}x_{13}) - \omega_2 Q(x_{16}, x_{17}), \\ -a_{37}\dot{x}_{15} = a_{38}(x_{15} - \omega_3(x_{16} - r_{CK})) + a_{36}(x_{15} - x_{14}), \\ I_{sm} = (x_6x_7 + x_{10}x_4)/x_5; \end{cases} \\ \text{Уравнения топки:} & \begin{cases} a_{41}\dot{x}_{16} = a_{42}(x_{16} - r_{CK}) + Q(x_{16}, x_{17}) - Q_{ugl}, \\ a_{45}\dot{x}_{14} = a_{46}(x_{17} - x_{11}) - Q(x_{16}, x_{17}), \\ Q(x_{16}, x_{17}) = a_{43} [(a_{44}x_{16})^4 - x_{17}^4]. \end{cases} \end{aligned}$$

Предполагается, что вода в ТО 2 находится на линии насыщения. Приток $q(x_2, x_{10}) = -V_2 d\rho/dt$ появляется в результате учета изменения плотности воды в ТО 2 при возмущениях. В стационарном состоянии $q(x_2, x_{10}) = 0$. Если предполагать что гидравлические процессы протекают существенно быстрее, чем тепловые (в (19) $R = 0$), то система вблизи стационарного существования имеет индекс 1. В обратном случае индекс системы равен 2. Укажем соответствие между физическими параметрами и переменными системы. Здесь

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_{11}x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}) = \\ (p_1, p_2, d_1, d_2, d_3, d_4, I_1, \theta_1, t_{g,1}, I_2, \theta_2, t_{g,2}, I_3, \theta_3, t_{g,3}, T_g, T_z). \end{aligned}$$

Таблица

Основные параметры, их обозначение и значения

| Обозначение | Численная величина | Обозначение | Численная величина |
|-------------|--------------------|-------------|------------------------------|
| a_{11} | 500 | a_{21} | 1000 |
| a_{12} | 0,5 | a_{22} | 0,5 |
| a_{13} | 102.24 | a_{23} | 100 |
| a_{14} | 1/4,5 | a_{24} | 0,1 |
| a_{15} | 50 000 | a_{25} | 100 000 |
| a_{16} | 690 | a_{26} | 700 |
| a_{17} | 100 | a_{27} | 100 |
| a_{18} | 132,78 | a_{28} | 140 |
| a_{31} | 1000 | a_{41} | 3700 |
| a_{32} | 0,5 | a_{42} | 139 |
| a_{33} | 100 | a_{43} | $0,265110222 \times 10^{-7}$ |
| a_{34} | 1/7,5 | a_{44} | 1,1 |
| a_{35} | 100 000 | a_{45} | 825 |
| a_{36} | 700 | a_{46} | 1125/7,8 |
| a_{37} | 100 | $h_1(t)$ | 200 |
| a_{38} | 140 | $h_2(t)$ | 140 |
| s_3 | 0,002 | $s_{0,3}$ | 0 |
| s_4 | 0,002 | $s_{0,4}$ | 0 |
| s_5 | 0,002 | $s_{0,5}$ | 0 |
| s_6 | 0,1 | $s_{0,6}$ | 0 |
| $x_1(0)$ | 167 | $x_{10}(0)$ | 2600 |
| $x_2(0)$ | 154 | $x_{11}(0)$ | 590 |
| $x_3(0)$ | 100 | $x_{12}(0)$ | 600 |
| $x_4(0)$ | 95 | $x_{13}(0)$ | 4000 |
| $x_6(0)$ | 5 | $x_{15}(0)$ | 650 |
| $x_7(0)$ | 1193 | $x_{16}(0)$ | 1379,266638 |
| $x_8(0)$ | 400 | $x_{17}(0)$ | 1202,612331 |
| $x_9(0)$ | 420 | | |

Проведены расчеты при $R = 0$ с использованием декомпозиции и без на временном отрезке $[0, 1200]$ (время измеряется в секундах) с шагом интегрирования $h = 0,05$, коэффициент усреднения $\gamma = 0,5$. Результат расчетов с декомпозицией изображен на графике ниже (рис. 2), который иллюстрирует поведение температуры пара на выходе из котла (переменная x_{13}/c_p , c_p – теплоемкость пара). Начальные данные намеренно взяты далеко от стационарных. Температура на выходе из котла должна быть равна 545 °С. В масштабах графика различия (с декомпозицией и без) не видны. Точное сравнение показало, что максимальная величина расхождения расчетов с декомпозицией и без нее равна $0,2762$.

Расчеты при $R > 0$ проведены по следующей схеме: индекс системы понижался до 1, а затем применялась схема с декомпозицией. Понижение индекса проводилось по методу из [14]. Результаты вычислений для нестационарного случая ГЦ отличаются незначительно от случая $R = 0$. При всех вариантах принято $Q_{ugl} = 294074,55$, $I_{vh} = 1000$.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, гранты №09-08-00201-а, 11-01-93005-Вьет-а

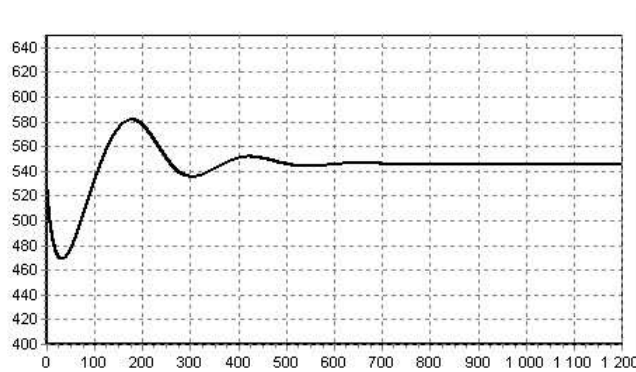


Рис. 2. Поведение температуры пара на выходе из котла

Литература

1. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования /Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998.
2. Зубова, С.П. Решение задачи управления для линейной модели дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами / С.П. Зубова // Матем. заметки. – 2010. – Т. 88, № 6. – С. 885 – 896.
3. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра физ.-мат. наук /А.В. Келлер. – Челябинск, 2011.
4. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999.
5. Свиридчук, Г.А. Задача Коши для линейного сингулярного операторного уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридчук // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, № 126. – С. 2169 – 2171.
6. Ушаков, Е.И. Статическая устойчивость электрических систем / Е.И. Ушаков. – Новосибирск: Наука, 1988.
7. Бальшев, О.А. Анализ переходных и стационарных процессов в трубопроводных системах (теоретические и экспериментальные аспекты) /О.А. Бальшев, Э.А. Таиров. – Новосибирск: Наука, 1998.
8. Бояринцев, Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений /Ю.Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 1980.
9. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967.
10. Чистякова, Е.В. О разрешимости вырожденных систем квазилинейных интегродифференциальных уравнений общего вида /Е.В. Чистякова, В.Ф. Чистяков // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 16, № 5.–С. 100-114.
11. Калиткин, Н.Н. Численные методы /Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978.
12. Апарцин, А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы /А.С. Апарцин. – Новосибирск: Наука, 1999.
13. Меренков, А.П. Теория гидравлических цепей парогенераторов / А.П. Меренков, В.Я. Хасилев. – М.: Наука, 1985.
14. Булатов, М.В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений / М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1994. – Т. 34, № 3. – С. 360 – 372.

Виктор Филимонович Чистяков, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН (Иркутск, Российская Федерация), chist@icc.ru.

Эмир Асгадович Таиров, доктор технических наук, заведующий лабораторией, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (Иркутск, Российская Федерация), tairov@isem.sei.irk.ru.

Елена Викторовна Чистякова, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН (Иркутск, Российская Федерация), elena.chistyakova@icc.ru.

Анатолий Алексеевич Левин, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (Иркутск, Российская Федерация), levin@isem.sei.irk.ru.

On Decomposition of Difference Schemes for Numerical Solution of Differential Algebraic Equations

V.F. Chistyakov, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation),

E.A. Tairov, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation),

E.V. Chistyakova, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation),

A.A. Levin, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation)

We consider quasi-linear systems of ordinary differential equations (ODE) with identically singular matrix multiplying the derivative of the desired vector-function and difference scheme for their numerical solution. We discuss conditions that make it possible to solve algebraic (finite-dimensional) equations at each step of numerical process and substitute the solutions obtained into the dynamics equations. Results of numerical solution of ODE systems modeling direct-flow boiler unit are given.

Keywords: differential-algebraic equations, index, difference schemes, mathematical models, direct-flow boiler.

References

1. Boyarintsev Yu.E., Chistyakov V.F. *Algebro-differentsial'nye sistemy. Metody chislennogo resheniya i issledovaniya* [Differential Algebraic Equations. Methods of Numerical Solution and Research]. Novosibirsk, Nauka, 1998.
2. Zubova S.P. Solution of the Control Problem for a Linear Descriptor System with Rectangular Coefficient Matrix. *Mathematical Notes*, 2010, vol. 88, no. 5 – 6, pp. 844 – 854.
3. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa: dis...doktor fiz.-mat. nauk*. Chelyabinsk, 2011.
4. Hairer E., Wanner G. *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi* [Solution of Ordinary Differential Equations. Rigid and Differential-algebraic Problems]. Moscow, Mir, 1999.
5. Sviridyuk G.A. The Cauchy Problem for a Linear Singular Operator Sobolev-type Equations [Zadacha Koshi dlya lineynogo singulyarnogo operatornogo uravneniya tipa Soboleva]. *Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 126, pp. 2169 – 2171.

6. Ushakov E.I. *Statischeckaya ustoychivost' elektricheskikh sistem* [Static Stability of Electrical Systems]. Novosibirsk, Nauka, 1988.
7. Balyshv O.A., Tairov E.A. *Analiz perekhodnykh i statsionarnykh protsessov v truboprovodnykh sistemakh (teoreticheskie i eksperimental'nye aspekty)* [Analysis of Transient and Steady-state Processes in Pipeline Systems (Theoretical and Experimental Aspects)]. Novosibirsk, Nauka, 1998.
8. Boyarintsev Yu.E. *Regulyarnye i singulyarnye sistemy lineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Regular and Singular Linear Systems Ordinary Differential Equations]. Novosibirsk, Nauka, 1980.
9. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka, 1967.
10. Chistyakova E.V., Chistyakov V.F. On the Solvability of Degenerate Systems of Quasilinear Integro-differential Equations of the Form [O razreshimosti vyrozhdennykh sistem kvazilineynykh integro-differentsial'nykh uravneniy obshchego vida]. *Computational Technologies*, 2001, vol. 16, no. 5, pp. 100 – 114.
11. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1978.
12. Apartsin, A.S. *Neklassicheskie uravneniya Vol'terra I roda: teoriya i chislennyye metody* [Non-classical Equations of Volterra Type I: Theory and Numerical Methods]. Novosibirsk, Nauka, 1999.
13. Merenkov A.P., Khasilev V.Ya. *Teoriya gidravlicheskikh tsepey parogeneratorov* [Theory of Hydraulic Circuits Steam]. Moscow, Nauka, 1985.
14. Bulatov M.V. The Transformation of Differential-algebraic Systems of Equations [O preobrazovanii algebro-differentsial'nykh sistem uravneniy]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1994, vol.34, no. 3, pp. 360 – 372.

Поступила в редакцию 19 декабря 2011 г.