УДК 517.9

УРАВНЕНИЕ ХОФФА КАК МОДЕЛЬ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ

Д.Е. Шафранов, А.И. Шведчикова

Исследуется разрешимость задачи Коши для уравнения Хоффа, моделирующего процесс выпучивания двутавровой балки при постоянной нагрузке и при высоких температурах. Это уравнение относится к классу полулинейных (у оператора действующего на исходную функцию можно выделить линейную часть и нелинейную) уравнений соболевского типа. Разрешимость абстрактных уравнений соболевского типа в банаховых пространствах исследовалась в работах Г.А. Свиридюка и его учеников с помощью метода фазового пространства. Уравнение Хоффа задается на гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края. Многобразие в данном случае понимается, как упругая двухсторонняя оболочка. Удается редуцировать исходную задачу к задаче Коши для абстрактного уравнения соболевского типа и применить общую теорию. Редукция основана на теории Свиридюка относительно p–ограниченных операторов и теории Ходжа – Кодаиры о расщеплении пространств дифференциальных форм в прямые суммы подпространств. В результате получена теорема о простоте фазового пространства уравнения Хоффа в случае попадания или нет параметра, характеризующего нагрузку, в спектр оператора Лапласа – Бельтрами.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, фазовое пространство, римановы многообразия, дифференциальные k-формы

Введение

Уравнение Хоффа

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3 \tag{1}$$

рассматривалось ранее либо как модель выпучивания двутавровой балки [1], либо как модель выпучивания балок, составляющих некоторую конструкцию [2]. Здесь мы впервые рассмотрим (1) на гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края, понимая под ним упругую двухстороннюю оболочку, находящуюся под нагрузкой при высокой температуре. Параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ характеризуют материал оболочки, а $\lambda \in \mathbb{R}_+$ – нагрузку на нее. Основные методы исследования – теория Свиридюка относительно p–ограниченных операторов и теория Ходжа – Кодаиры k–форм на римановом многообразии. Кроме того мы воспользуемся методом фазового пространства, основы которого заложены Г.А. Свиридюком и Т.Г. Сукачевой. Основной результат – теорема о простоте фазового пространства (1), рассматриваемого в пространстве k–форм.

1. Теория Свиридюка

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ банаховы пространства, а операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, т.е. линейны и ограниченны. Введем в рассмотрение L–резольвентное множество $\rho^L(M) = \mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})$ и L–спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \backslash \rho^L(M)$ оператора M. Оператор-функцию $(\mu L - M)^{-1}$ будем называть L–резольвентой оператора M, а оператор-функции $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ правой и левой L–резольвентой оператора M соответственно.

Определение 1. *Оператор M называется ограниченным относительно оператора L (короче, (L,σ) – ограниченным), если $\exists a \in R_+ \; \forall \mu \in \mathbb{C} \; (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M))$. Оператор M называется (L,p) – ограниченным, если он является (L,σ) – ограниченным и ∞ полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ L–резольвенты оператора M.*

Пусть оператор M (L,σ)–ограничен, тогда существуют понимаемые в смысле Г. Римана операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M)d\mu, \int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M)d\mu,$$

где замкнутый контур Γ ограничивает область, содержащую $\sigma^L(M)$.

Лемма 1. *[3, гл. 4] (Лемма Свиридюка) Пусть оператор M (L,σ)–ограничен, тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ – проекторы.*

Положим $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{F}^0) = \ker P$ $(\ker Q), \mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F}^1) = \mathrm{im}P$ $(\mathrm{im}Q)$, и через $L_k(M_k)$ обозначим сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{U}^k, k = 0,1$.

Теорема 1. *[3, гл. 4] (Теорема Свиридюка) Пусть оператор M (L,σ)–ограничен. Тогда*
(i) операторы $L_k(M_k) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}), k = 0,1;$
(ii)существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0,\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1,\mathfrak{U}^1)$.

Следствие 1. *[3, гл. 4] Пусть оператор M (L,p)–ограничен, тогда операторы $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, причем оператор H нильпотентен степени не выше p.*

2. Фазовое пространство

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ банаховы пространства, операторы $L,M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, а оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$. Рассмотрим полулинейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{2}$$

Вектор-функция $u \in C^\infty((-\tau,\tau),\mathfrak{U})$ называется *решением уравнения (2)*, если при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$ она удовлетворяет этому уравнению. Решение $u = u(t)$ уравнения (2) называется *решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для уравнения (2), если при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$ выполняется (3).

Определение 2. *[1],[2] Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется фазовым пространством уравнения* (2), *если:*
(i) *любое решение $u = u(t)$ уравнения* (2) *лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория, т.е. $u = u(t) \subset \mathfrak{P}$, $t \in (-\tau,\tau)$;*
(ii) *при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи* (2), (3).

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, то (2) тривиально редуцируется к эквивалентному уравнению

$$\dot{u} = F(u), \tag{4}$$

где оператор $F = L^{-1}(M + N) \in C^\infty(\mathfrak{U})$. Локальная разрешимость задачи (3), (4) и, тем самым, задачи (2), (3) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ – классическая теорема Коши. Значит, в данном случае фазовым пространством уравнения (2) служит все пространство $\mathfrak{U}$.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$ и оператор M $(L,0)$–ограничен, тогда (2) редуцируется к паре эквивалентных уравнений

$$0 = (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)), \tag{5}$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + QN(u^0 + u^1), \tag{6}$$

где $u^k \in \mathfrak{U}^k, k = 0,1$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}$ – кандидата на роль фазового пространства уравнения (2) в данном случае.

Теорема 2. *[1],[2] Пусть* $\ker L \neq \{0\}$*, оператор* M $(L,0)$*–ограничен, и существует* $u_0 \in \mathfrak{M}$*, причем*

$$\mathbb{I} + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N_0' : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{U}^0 \tag{7}$$

топлинейный изоморфизм. Тогда некоторая окрестность $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M}$ *точки* u_0 *является банаховым* C^∞*–многообразием, моделируемым подпространством* $\mathfrak{U}^1$*, и к тому же лежит в фазовом пространстве уравнения (2).*

Доказательство заключается в применении теоремы о неявной функции к (5), а затем в редукции (6) к (4), определенному на $\mathfrak{O}$.

3. Теория Ходжа – Кодаиры

Пусть Ω_n – n-мерное ориентированное гладкое (т.е. класса C^∞) компактное связное риманово многообразие без края. Через $\mathfrak{H}^k = \mathfrak{H}^k(\Omega_n)$, $k = 0,1,\dots,n$ обозначим линейное пространство гладких (тоже класса C^∞) k-форм на Ω_n. Рассмотрим на $\mathfrak{H}^k$ оператор Лапласа-Бельтрами $\Delta = -d\delta - \delta d$, где d – оператор внешнего дифференцирования k–форм, $\delta = (-1)^{n(n+k)+1} * d *$, $*$ – оператор Ходжа. Положим $\mathfrak{H}_d^k = d\delta[\mathfrak{H}^k]$, $\mathfrak{H}_\delta^k = \delta d[\mathfrak{H}^k]$, $\mathfrak{H}_\Delta^k = \ker\Delta$, $k = 0,1,...n$. Формулой

$$(\xi,\eta)_0 = \int\limits_{\Omega_n} \xi \wedge *\eta, \quad \xi,\eta \in \mathfrak{H}^k,$$

определим скалярное произведение на $\mathfrak{H}^k$, $k = 0,1,\dots,n$, а соответствующую норму обозначим через $\|\cdot\|_0$. Пополнение линеалов $\mathfrak{H}^k$, $\mathfrak{H}_d^k$, $\mathfrak{H}_\delta^k$, $\mathfrak{H}_\Delta^k$ по норме $\|\cdot\|_0$ обозначим соответственно через $\mathfrak{H}_0^k$, $\mathfrak{H}_{d0}^k$, $\mathfrak{H}_{\delta 0}^k$, $\mathfrak{H}_{\Delta 0}^k$.

Теорема 3. *[4, гл. 19](теорема Ходжа – Кодаиры) Для любого* $k = 0,1,\dots,n$ *существует расщепление пространства* $\mathfrak{H}_0^k$ *в прямую ортогональную сумму*

$$\mathfrak{H}_0^k = \mathfrak{H}_{d0}^k \oplus \mathfrak{H}_{\delta 0}^k \oplus \mathfrak{H}_{\Delta 0}^k, \tag{8}$$

причем пространство $\mathfrak{H}_{\Delta 0}^k$ *конечномерно.*

На линеале $\mathfrak{H}^k$ зададим еще одно скалярное произведение $(\xi,\eta)_1 = (\Delta\xi,\eta)_0 + (\xi,\eta)_0$ и пополнение $\mathfrak{H}^k$ по норме $\|\cdot\|_1$ обозначим через $\mathfrak{H}_1^k$. Рассмотрим в $\mathfrak{H}_0^k$ ортопроектор P_Δ, $\ker P_\Delta = \mathfrak{H}_{\Delta 0}^k$. Как нетрудно видеть P_Δ является ортопроектором и $\mathfrak{H}_1^k$, причем в силу конечномерности $\mathfrak{H}_{\Delta 0}^k = \mathfrak{H}_{\Delta 1}^k$. Положим $\mathbb{H}_k^l = (\mathfrak{H}_{\Delta l}^k)^\perp, l = 0,1$. Очевидно, существует непрерывное и плотное вложение $\mathbb{H}_k^1 \subset \mathbb{H}_k^0$. Обозначим через $\mathbb{H}_k^{-1}$ сопряженое к $\mathbb{H}_k^1$ относительно двойственности $(\cdot,\cdot)_0$ пространство.

Следствие 2. *[4, гл. 19] При всех* $k = \overline{0,n}$

(i) оператор Лапласа – Бельтрами $\Delta : \mathbb{H}_k^1 \to \mathbb{H}_k^{-1}$ *– топлинейный изоморфизм;*

(ii) спектр $\sigma(\Delta)$ *положителен дискретен конечнократен и сгущается только к* $+\infty$*.*

4. Основной результат

Настало время редуцировать уравнение (1) к уравнению (2). Положим

$$\mathfrak{U} = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{H}_k^1, \mathfrak{F} = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{H}_k^{-1},$$

причем прямые суммы предполагаются "ортогональными". Введем оператор $\mathbb{I} = \mathrm{diag}\{\mathbb{I}_k\}$, где $\mathbb{I}_k : \mathbb{H}_k^1 \to \mathbb{H}_k^{-1}$, $k = 0, 1, ..., n$ – операторы вложения. Формулами $L = (\lambda - \Delta)\mathbb{I}$ и $M = \alpha\mathbb{I}$, где Δ – оператор Лапласа-Бельтрами, зададим операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, а формулой $N = \mathrm{diag}\{N_k\}$, где

$$(N_k(\xi), \eta)_0 = \beta \int\limits_{\Omega_n} \xi^3 \wedge *\eta, \ \xi, \eta \in \mathfrak{H}_d^k \oplus \mathfrak{H}_\delta^k$$

зададим оператор N. Здесь ξ^3 – это k–форма ξ, все коэффициенты которой возведены в куб.

Лемма 2. *(i) При любых $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, оператор M $(L, 0)$–ограничен.*
(ii) При любых $n = 1, 2, ..., 4$, $\beta \in \mathbb{R}$ оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.

Пусть $\sigma(\Delta) = \{\lambda_i\}$ – собственные значения оператора Δ, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, а $\{\varphi_i\}$ – соответствующее семейство собственных функций ортонормированное в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_1$ "ортогонально продолженного"на $\mathfrak{U}$. Введем в рассмотрение множества

$$\mathfrak{V} = \begin{cases} \mathfrak{U}, \lambda \notin \sigma(\Delta); \\ \{u \in \mathfrak{U} : (u, \varphi_j)_0 = 0, \quad \lambda = \lambda_j\}; \end{cases}$$

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{U}, \lambda \notin \sigma(\Delta); \\ \{u \in \mathfrak{U} : \alpha(u, \varphi_j)_0 + \beta(N(u), \varphi_j)_0 = 0, \quad \lambda = \lambda_j\}. \end{cases}$$

Теорема 4. *При любых $n = \overline{1, 4}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ фазовым пространством уравнения* (1) *служит простое банахово многообразие $\mathfrak{M}$, моделируемое подпространством $\mathfrak{V}$.*

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Мат. Заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292 – 297.
2. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 139 – 145.
3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators/G.A Sviridyu, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003. – 268 p.
4. Морен, К. Методы гильбертова пространства / К. Морен. – М.: Мир, 1965. – 570 с.

Дмитрий Евгеньевич Шафранов, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), shafr@math.susu.ac.ru.

Анастасия Ильинична Шведчикова, магистрант, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), a_shvedchikova@bk.ru.

MSC 35F20, 19G99

The Hoff Equation as a Model of Elastic Shell

D.E. Shafranov, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),
A.I. Shvedchikova, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

The solvability of the Hoff equation modelling the process of I-beam buckling under a constant load and high temperatures is under investigation. This equation is a part of large class of Sobolev type semilinear (we can select the linear and non-linear parts from the operator acting on the original function) equation. G.A. Sviridyuk and his followers in their works research the solvability of the abstract Sobolev type equations in Banach spaces using the phase space method. We consider the Hoff equations on the smooth compact oriented Riemannian manifold without boundary. In this case we understand manifold as the two-side elastic shell. We can reduce this problem to the Cauchy problem for the abstract Sobolev type equation and apply the general theory for it. We reduce it basing on the Sviridyuk theory of relatively p–bounded operators and the Hodge – Kodaira theory of the decomposition of spaces of the differential forms in a direct sum of the subspaces. As a result we obtain a theorem of the simplicity phase space of the Hoff equation in case of contact or not the parameter characterizing the load in the spectrum of the Laplace – Beltrami operator.

Keywords: Sobolev type equation, phase space, Riemannian manifolds, differential k-forms

References

1. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation. *Mathematical Notes,* 2002, vol. 71, no. 1–2, pp. 262–266.
2. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff Equations on Graphs. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 139–145.
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht; Boston; Koln; Tokyo, VSP, 2003. 268 p.
4. K. Moren *Metody gil'bertova prostranstva* [Hilbert space methods]. Moskow, Mir, 1965. 570 p.

Поступила в редакцию 25 ноября 2011 г.