УДК 517.977

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.А. Аникин

Рассматривается задача псевдообращения динамической системы (восстановления нормального входа системы по результатам измерения ее выхода). Под входом понимается пара: начальное состояние и входное воздействие на систему (управление, возмущение и т.д.), под нормальным входом — вход, имеющий минимальную норму на множестве всех входов, совместимых с данным выходом. Выход системы представляет собой функцию от времени, состояния системы и входного воздействия. Динамика системы описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением. Задача псевдообращения решается путем редукции исходной динамической системы к некоторой эквивалентной системе, допускающей получение нормального входа в явном виде. Редукция осуществляется с помощью конечного числа алгебраических операций и операций дифференцирования. Явный вид нормального входа редуцированной системы получен из явного решения некоторой вспомогательной параметрической задачи оптимального управления с помощью операции предельного перехода.

Ключевые слова: обратные задачи динамики, обращение динамической системы, идентификация входа.

Введение

При решении многих прикладных задач возникает необходимость восстановления входных воздействий динамической системы (управления, возмущения и т.д.) по результатам доступных наблюдению выходных величин. К таким задачам относится, например, одна из двух основных задач динамики: по указанному движению механической системы определить силы, вызвавшие это движение [1]. Другой важный класс практических задач составляют задачи оценивания состояния динамической системы по результатам измерения выхода (задачи наблюдения). В данной статье рассматривается более общая задача: по результатам измерения выхода динамической системы восстановить ее вход, т.е. начальное состояние и входное (управляющее) воздействие. Такие задачи часто называют задачами обращения динамической системы и относят к классу обратных задач динамики управляемых систем [2–6].

Различные алгоритмы обращения динамических систем можно найти в работах [7–10]. В этих работах исследованы и вопросы, связанные с обратимостью (однозначностью восстановления входа) динамических систем. Особый интерес для исследователей всегда представляли алгоритмы обращения, устойчивые к различным факторам неопределенности: погрешностям измерения выхода, возмущениям в системе и т.д. Такие алгоритмы строились, как в рамках теории гарантированного оценивания [2, 3], так и с использованием методов теории некорректных задач [4, 6, 11, 12] и теории автоматического управления [13]. В работах [14, 15] разработан подход, сочетающий методы теории некорректных задач и теории позиционных дифференциальных игр. В этих работах вычисление входного воздействия производится в режиме «реального времени», т.е. по мере поступления информации о выходе системы. В последнее время возрос интерес к задачам обращения динамических систем при коммуникационных ограничениях [16, 17].

Задачи обращения динамических систем тесно связаны с задачами динамического измерения [18, 19]. Новый подход к решению задач динамического измерения, основанный на теории уравнений леонтьевского типа [20], предложен в [21, 22]. Задачи обращения динамических систем могут быть изучены и с позиций теории алгебро-дифференциальных систем [23, 24].

В случае необратимости (неоднозначности восстановления входа) динамической системы представляет интерес задача восстановления нормального входа этой системы, т.е. входа, имеющего минимальную норму среди всех входов, совместимых с данным выходом [11]. Такую задачу будем называть задачей псевдообращения динамической системы. Целью данной статьи является построение алгоритма псевдообращения линейной динамической системы.

В работе используются следующие обозначения: $\operatorname{rank} D$ — ранг матрицы D; E — единичная матрица подходящей размерности; D' — транспонированная матрица; D^+ — псевдобратная (по Муру–Пенроузу) матрица [25]; $\mathrm{Col}\{D_1, \ldots, D_k\}$ — матрица, составленная из матриц $D_1, \ldots, D_k$, записанных одна под другой; $\mathrm{Col}\{y_1, \ldots, y_k\}$ — вектор–столбец, составленный из векторов–столбцов $y_1, \ldots, y_k$, записанных один под другим; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное евклидово пространство; L_2^m — пространство m-мерных функций, интегрируемых по Лебегу с квадратом на отрезке $[0, \vartheta]$; $\overline{i_1, i_2}$ — множество чисел $\{i_1, i_1+1, \ldots, i_2\}$; $|\cdot|$ — евклидова норма в соответствующем конечномерном пространстве; $\|\cdot\|_X$ — норма в пространстве X; $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве X.

1. Постановка задачи

Пусть движение динамической системы на отрезке $[0, \vartheta]$ описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad x(0) = x^0, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент времени $t \in [0, \vartheta]$; x^0 — начальное состояние системы; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — входное воздействие на систему (управление, возмущение и т.д.) в момент времени t; $A(t)$, $B(t)$ — заданные непрерывные матричные функции. Решения уравнения (1) понимаются в смысле Каратеодори [26].

Входом системы будем называть элемент $w = \big(x^0, u(\cdot)\big)$ гильбертова пространства $W = \mathbb{R}^n \times L_2^m$. Скалярное произведение в пространстве W задается равенством

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \left\langle x_1^0, x_2^0 \right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle u_1(\cdot), u_1(\cdot) \rangle_{L_2^m},$$

где $w_1 = \big(x_1^0, u_1(\cdot)\big)$, $w_2 = \big(x_2^0, u_2(\cdot)\big)$. *Выходом* системы (идеально наблюдаемым сигналом) назовем функцию $y(\cdot) \in L_2^p$, связанную с состоянием системы $x = x(t)$ и входным воздействием $u(t)$ при почти всех $t \in [0, \vartheta]$ равенством

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \tag{2}$$

где $C(t)$, $D(t)$ — заданные непрерывные матричные функции.

Будем говорить, что вход $w = \big(x^0, u(\cdot)\big)$ совместим с выходом $y(\cdot)$, если при почти всех $t \in [0, \vartheta]$ имеют место равенства (1), (2). Через $W_*\left(y(\cdot)\right)$ обозначим множество всех входов, совместимых с выходом $y(\cdot)$. Пусть при некотором $y(\cdot)$ множество $W_*(y(\cdot))$ не пусто. *Нормальным входом*, совместимым с выходом $y(\cdot)$, назовем вход $w_* \in W_*\left(y(\cdot)\right)$ такой, что

$$||w_*||_W = \min\left\{||w||_W : \ w \in W_*(y(\cdot))\right\}.$$

Рассмотрим задачу псевдообращения динамической системы (1), (2).

Задача 1. *По известному выходу $y(\cdot)$ восстановить нормальный вход, совместимый с этим выходом.*

Очевидно, что в предположении $W_*(y(\cdot)) \neq \emptyset$ данная задача имеет единственное решение.

2. Метод решения

Зафиксируем произвольное целое и неотрицательное k. В соответствии с [11] уравнение наблюдения (2) преобразуем к системе из $k+1$ уравнения

$$y_i(t) = C_i(t)x(t) + D_i(t)u(t), \quad i \in \overline{0,k}, \tag{3}$$

где $y_i(t)$, $C_i(t)$, $D_i(t)$ определяются из соотношений

$$y_0(t) = y(t), \quad C_0(t) = C(t), \quad D_0(t) = D(t), \tag{4}$$
$$Q_i(t) = E - D_i(t)D_i^+(t), \tag{5}$$
$$y_{i+1}(t) = \frac{d}{dt}(Q_i(t)y_i(t)), \tag{6}$$
$$C_{i+1}(t) = \frac{d}{dt}(Q_i(t)C_i(t)) + Q_i(t)C_i(t)A(t), \tag{7}$$
$$D_{i+1}(t) = Q_i(t)C_i(t)B(t), \quad i \in \overline{0,k-1}. \tag{8}$$

При $k \geqslant 1$ для обеспечения допустимости операций дифференцирования в (6), (7) и непрерывности матричных функций $C_i(t)$ для всех $i \in \overline{1,k}$ нам понадобится дополнительное

Предположение 1. *Матричные функции $Q_i(t)C_i(t)$ $\left(i \in \overline{0,k-1}\right)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,\vartheta]$.*

Систему уравнений (3) можно переписать следующим образом:

$$\widehat{y}_k(t) = \widehat{C}_k(t)x(t) + \widehat{D}_k(t)u(t), \tag{9}$$

где

$$\widehat{y}_k(t) = \operatorname{Col}\{y_0(t), y_1(t), \ldots, y_k(t)\}, \tag{10}$$
$$\widehat{C}_k(t) = \operatorname{Col}\{C_0(t), C_1(t), \ldots, C_k(t)\}, \tag{11}$$
$$\widehat{D}_k(t) = \operatorname{Col}\{D_0(t), D_1(t), \ldots, D_k(t)\}. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что $(i+1)$-е уравнение в (3) получается из i-го путем умножения слева обеих частей уравнения на матрицу $Q_i(t) = E - D_i(t)D_i^+(t)$ (в результате чего в уравнении исчезает слагаемое с $u(t)$) и дифференцирования по t в силу системы (1). Поэтому справедливо

Предложение 1. *Для любого целого неотрицательного k система уравнений* (1), (9) *относительно неизвестного входа $w = \left(x^0, u(\cdot)\right)$ равносильна системе* (1), (2).

Данное утверждение позволяет нам свести задачу псевдообращения динамической системы (1), (2) к эквивалентной задаче псевдообращения динамической системы (1), (9). Для решения последней задачи нам понадобится явный вид решения вспомогательной задачи оптимального управления

$$J_\alpha\left(x^0, u(\cdot)\right) \to \min, \quad \left(x^0, u(\cdot)\right) \in W, \tag{13}$$

где

$$J_\alpha\left(x^0, u(\cdot)\right) = \int_0^\vartheta \left(\left| \widehat{y}_k(t) - \widehat{C}_k(t)x(t) - \widehat{D}_k(t)u(t) \right|^2 + \alpha \left|u(t)\right|^2 \right) dt + \alpha \left|x^0\right|^2$$

— функционал А.Н.Тихонова [27]; $x(t) = x(t; x^0, u(\cdot))$ — решение уравнения (1), α — положительный параметр.

Лемма 1. [28] *Решение задачи* (13) *существует, единственно и имеет вид:*

$$x^0_\alpha = \left(K_\alpha(0) + \alpha E\right)^{-1} g_\alpha(0), \tag{14}$$

$$u_\alpha(t) = B'_\alpha(t)\left(g_\alpha(t) - K_\alpha(t)\, x_\alpha(t)\right) + F'_\alpha(t)\left(\widehat{y}_k(t) - \widehat{C}_k(t)\, x_\alpha(t)\right), \tag{15}$$

где $K_\alpha(t)$ *— решение матричного дифференциального уравнения Риккати*

$$\dot{K} = -KH_\alpha(t) - H'_\alpha(t)K + KB(t)B'_\alpha(t)K - \widehat{C}_k{}'(t)G_\alpha(t) \tag{16}$$

с граничным условием $K(\vartheta) = 0$*;* $g_\alpha(t)$ *— решение дифференциального уравнения*

$$\dot{g} = -S'_\alpha(t)\, g + \left(K_\alpha(t)B(t)F'_\alpha(t) - G'{}_\alpha(t)\right)\widehat{y}_k(t) \tag{17}$$

с граничным условием $g(\vartheta) = 0$*;* $x_\alpha(t)$ *— решение дифференциального уравнения*

$$\dot{x} = S_\alpha(t)\, x + B(t)B'_\alpha(t)\, g_\alpha(t) + B(t)F'_\alpha(t)\, \widehat{y}_k(t) \tag{18}$$

с начальным условием $x(0) = x^0_\alpha$*;*

$$S_\alpha(t) = H_\alpha(t) - B(t)B'_\alpha(t)K_\alpha(t); \tag{19}$$

$$B_\alpha(t) = B(t)\left(\widehat{D}'_k(t)\widehat{D}_k(t) + \alpha E\right)^{-1}; \tag{20}$$

$$F_\alpha(t) = \widehat{D}_k(t)\left(\widehat{D}'_k(t)\widehat{D}_k(t) + \alpha E\right)^{-1}; \tag{21}$$

$$G_\alpha(t) = \left(E - \widehat{D}_k(t)F'_\alpha(t)\right)\widehat{C}_k(t); \tag{22}$$

$$H_\alpha(t) = A(t) - B(t)F'_\alpha(t)\widehat{C}_k(t). \tag{23}$$

Решение задачи псевдообращения динамической системы (1), (2) дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть 1) найдутся целое неотрицательное число* k *и натуральное число* r *такие, что*

$$\operatorname{rank}\widehat{D}_k(t) = \operatorname{rank}\left(\operatorname{Col}\left\{\widehat{D}_k(t), B(t)\right\}\right) = r \quad \forall\, t \in [0, \vartheta]; \tag{24}$$

2) $K(t)$ *— решение матричного дифференциального уравнения Риккати*

$$\dot{K} = -KH(t) - H'(t)K + KB(t)\widehat{D}^+_k(t)\widehat{D}^+_k{}'(t)B'(t)K - \widehat{C}'_k(t)G(t) \tag{25}$$

с граничным условием $K(\vartheta) = 0$*; 3) матрица* $K(0)$ *обратима. Тогда нормальный вход* $\left(x^0, u(\cdot)\right)$*, совместимый с выходом* $y(\cdot)$*, имеет вид*

$$x^0 = \left[K(0)\right]^{-1} g(0), \tag{26}$$

$$u(t) = \widehat{D}^+_k(t)\widehat{D}^+_k{}'(t)B'(t)\left(g(t) - K(t)\, x(t)\right) + \widehat{D}^+_k(t)\left(\widehat{y}_k(t) - \widehat{C}_k(t)x(t)\right), \tag{27}$$

где $g(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{g} = -S'(t)\,g + \Big(K(t)B(t)\widehat{D}_k^+(t) - G'(t)\Big)\,\widehat{y}_k(t) \tag{28}$$

с граничным условием $g(\vartheta) = 0$; $x(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = S(t)\,x + B(t)\widehat{D}_k^+(t)\widehat{D}_k^{+\prime}(t)B'(t)\,g(t) + B(t)\widehat{D}_k^+(t)\,\widehat{y}_k(t) \tag{29}$$

с начальным условием $x(0) = x^0$;

$$S(t) = H(t) - B(t)\widehat{D}_k^+(t)\widehat{D}_k^{+\prime}(t)B'(t)K(t); \tag{30}$$

$$G(t) = \Big(E - \widehat{D}_k(t)\widehat{D}_k^+(t)\Big)\,\widehat{C}_k(t); \tag{31}$$

$$H(t) = A(t) - B(t)\widehat{D}_k^+(t)\widehat{C}_k(t); \tag{32}$$

$\widehat{y}_k(t)$, $\widehat{C}_k(t)$, $\widehat{D}_k(t)$ определяются равенствами (10)–(12), *(*4)–(8).

Доказательство. Согласно [11] решение $\big(x_\alpha^0, u_\alpha(\cdot)\big)$ задачи (13) при $\alpha \to 0$ сходится к нормальному входу $\big(x^0, u(\cdot)\big)$ системы (1), (9). Решение $\big(x_\alpha^0, u_\alpha(\cdot)\big)$ по лемме 1 представимо в виде (14), (15). Покажем, что предельный переход в этих равенствах при $\alpha \to 0$ приводит к (26), (27).

Действительно, с учетом (21) и свойств псевдообратной матрицы [29] имеем

$$\lim_{\alpha\to 0} F_\alpha(t) = \widehat{D}_k^{+\prime}(t) \quad \forall t \in [0, \vartheta], \tag{33}$$

откуда ввиду (22), (23), (31) и (32) получаем

$$\lim_{\alpha\to 0} G_\alpha(t) = G(t), \quad \lim_{\alpha\to 0} H_\alpha(t) = H(t) \quad \forall t \in [0, \vartheta]. \tag{34}$$

Далее, условие (24) влечет для всех $t \in [0, \vartheta]$ линейную зависимость строк матрицы $B(t)$ от строк матрицы $\widehat{D}_k(t)$. Следовательно [25],

$$B(t) = B(t)\widehat{D}_k^+(t)\widehat{D}_k(t) \quad \forall t \in [0, \vartheta],$$

что с учетом (19), (20), (30) и (33) обеспечивает равенства

$$\lim_{\alpha\to 0} B_\alpha(t) = \lim_{\alpha\to 0} B(t)\widehat{D}_k^+(t)F_\alpha(t) = B(t)\widehat{D}_k^+(t)\widehat{D}_k^{+\prime}(t), \tag{35}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} S_\alpha(t) = S(t) \quad \forall t \in [0, \vartheta]. \tag{36}$$

В силу условия (24) ранг матрицы $\widehat{D}_k(t)$ постоянен на $[0, \vartheta]$. Кроме того, матричная функция $\widehat{D}_k(t)$ непрерывна на $[0, \vartheta]$. Следовательно [30], матричная функция $\widehat{D}_k^+(t)$ также непрерывна на $[0, \vartheta]$, как и функции (30)–(32). Поэтому правые части дифференциальных уравнений (25), (28), (29) непрерывны по t. Применяя теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных и параметров [26] и равенства (33)–(36), получаем равномерную по t сходимость при $\alpha \to 0$ решений $K_\alpha(t)$, $g_\alpha(t)$, $x_\alpha(t)$ дифференциальных уравнений (16), (17), (18) к решениям $K(t)$, $g(t)$, $x(t)$ уравнений (25), (28), (29) соответственно. Окончательно, совершая предельный переход в равенстве (15) при $\alpha \to 0$, имеем (27). Остается показать справедливость равенства (26). Из (14) следует, что при всех $\alpha > 0$

$$(K_\alpha(0) + \alpha E)\,x_\alpha^0 = g_\alpha(0).$$

Предельный переход в этом равенстве при $\alpha \to 0$ приводит к равенству

$$K(0)x^0 = g(0),$$

которое с учетом обратимости $K(0)$ дает (26). □

Пример 1. Рассмотрим задачу псевдообращения динамической системы

$$\begin{aligned}
&\dot x_1 = x_2, \quad x_1(0) = x_1^0,\\
&\dot x_2 = u_1(t) + u_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0,\\
&y_1(t) = x_1(t),\\
&y_2(t) = x_1(t) + u_2(t) + u_3(t), \quad t \in [0, \vartheta].
\end{aligned}$$

Для этой системы

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие (24) оказалось выполненным при $k = 3$, $r = 2$. При этом

$$\widehat{y}_3(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot y_1(t) \\ \dot y_2(t) \\ 0 \\ \ddot y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \widehat{C}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{D}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричное дифференциальное уравнение Риккати (25) имеет вид

$$\dot K = -K \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} K + K \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решая его с учетом граничного условия $K(\vartheta) = 0$, имеем

$$K(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{3}[\vartheta - t]\right) + 2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\operatorname{sh}\left(\sqrt{3}[\vartheta - t]\right) & \operatorname{ch}\left(\sqrt{3}[\vartheta - t]\right) - 1 \\ \operatorname{ch}\left(\sqrt{3}[\vartheta - t]\right) - 1 & \sqrt{3}\operatorname{sh}\left(\sqrt{3}[\vartheta - t]\right) \end{pmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения (28) и (29) выглядят следующим образом

$$\begin{pmatrix} \dot g_1 \\ \dot g_2 \end{pmatrix} = -S'(t) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dot y_1(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g_1(\vartheta) \\ g_2(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix},$$

где

$$S(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{3}[\vartheta - t]\right) + 2} \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{ch}\left(\sqrt{3}[\vartheta - t]\right) + 2 \\ 1 - \operatorname{ch}\left(\sqrt{3}[\vartheta - t]\right) & -\sqrt{3}\operatorname{sh}\left(\sqrt{3}[\vartheta - t]\right) \end{pmatrix}.$$

Восстановленный нормальный вход (26), (27) приобретает вид

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\operatorname{ch}\left(\sqrt{3}\vartheta\right) - 2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\operatorname{sh}\left(\sqrt{3}\vartheta\right) & 1 - \operatorname{ch}\left(\sqrt{3}\vartheta\right) \\ 1 - \operatorname{ch}\left(\sqrt{3}\vartheta\right) & \sqrt{3}\operatorname{sh}\left(\sqrt{3}\vartheta\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} - K(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \right] +\\
&+ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[\widehat{y}_3(t) - \widehat{C}_3(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}$$

3. Заключение

Теорема 1 фактически дает явный вид оператора $\mathcal{F}^+ : L_2^p \to W$, псевдообратного [31] к оператору $\mathcal{F} : W \to L_2^p$ «вход–выход» системы (1), (2), т.е. оператору, который каждому входу $w = \big(x^0, u(\cdot)\big) \in W$ ставит в соответствие выход $y(\cdot) \in L_2^p$ по правилу (1), (2). Недостатком теоремы является ограничительное условие (24). Однако при невыполнении этого условия можно, например, перейти к динамической системе, сопряженной к (1), (2):

$$\begin{aligned}
&\dot z = -A'(t)z - C'(t)y(t), \quad z(\vartheta) = 0,\\
&x^0 = z(0),\\
&u(t) = B'(t)z(t) + D'(t)y(t), \quad t \in [0, \vartheta].
\end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{F}^* : L_2^p \to W$ «вход–выход» этой системы сопряжен к $\mathcal{F}$ и действует по правилу $\big(x^0, u(\cdot)\big) = \mathcal{F}^* y(\cdot)$ в соответствии с выше приведенными равенствами. Псевдообращение сопряженной системы (оператора $\mathcal{F}^*$) можно выполнить аналогично псевдообращению, описанному в теореме 1. В результате, для получения явного вида оператора $\mathcal{F}^+$ останется воспользоваться формулой $\mathcal{F}^+ = (\mathcal{F}^{*+})^*$. Другие методы обращения динамической системы могут быть получены с помощью формул $\mathcal{F}^+ = (\mathcal{F}^*\mathcal{F})^+ \mathcal{F}^*$ и $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}^* (\mathcal{F}\mathcal{F}^*)^+$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00672) и в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1019).

Литература

1. Жуковский, Н.Е. Теоретическая механика / Н.Е. Жуковский. – М.: Гостехиздат, 1952.
2. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968.
3. Куржанский, А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. – М.: Наука, 1977.
4. Гусев, М.И. Обратные задачи динамики управляемых систем / М.И. Гусев, А.Б. Куржанский // Механика и научно-технический прогресс. Т.1. Общая и прикладная механика. – М.: Наука, 1987. – С. 187–195.
5. Кирин, Н.Е. Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем / Н.Е. Кирин. – Ленинград: ЛГУ, 1975.
6. Аникин, С.А. Оценивание возмущающих сил по измерениям параметров движения / С.А. Аникин, М.И. Гусев // Гарантированное оценивание и задачи управления. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. – С. 19–30.
7. Silverman, L.M. Inversion of multi-variable linear systems / L.M. Silverman // IEEE Tr. Aut. Control. – 1969. – V. 14. – P. 270–276.
8. Willsky, A.S. On the invertibility of linear systems / A.S. Willsky // IEEE Tr. Aut. Control. – 1974. – V. 19. – P. 272–274.
9. Sain, M.K. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems / M.K. Sain, J.L. Massey // IEEE Tr. Aut. Control. – 1969. – V. 14. – P. 141–149.
10. Никольский, М.С. Об идеально наблюдаемых системах / М.С. Никольский // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, № 4. – С. 631–638.
11. Аникин, С.А. Об оценке погрешности метода регуляризации А.Н.Тихонова в задачах восстановления входов динамических систем / С.А. Аникин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1997. – № 9. – С. 1056–1067.

12. Аникин, С.А. Идентификация входов квазилинейных систем / С.А. Аникин // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 11. – С. 12–30.

13. Ильин, А.В. Алгоритмы обращения управляемых линейных систем / А.В. Ильин, С.К. Коровин, В.В. Фомичев // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 744–750.

14. Кряжимский, А.В. О позиционном моделировании управления в динамической системе / А.В. Кряжимский, Ю.С.Осипов // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. – 1983. – № 2. – С. 51–60.

15. Максимов, В.И. О динамическом оценивании управлений в условиях неопределенности / В.И. Максимов // Известия РАН. Техн. кибернетика. – 1994. – № 3. – С .127–133.

16. Savkin, A.V. Set-Valued State Estimation via Limited Capacity Communication Channel / A.V. Savkin, I.R. Petersen // IEEE Tr. Aut. Control. – 2003. – V. 48, № 4. – P. 676–680.

17. Ананьев, Б.И. Задача восстановления входных воздействий при коммуникационных ограничениях / Б.И. Ананьев, С.А. Аникин // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 7. – С. 73–84.

18. Грановский, В.А. Динамические измерения / В.А. Грановский. – Л.: Энергоиздат, 1984.

19. Шестаков, А.Л. Решение обратной задачи динамики на основе теории модального управления с использованием измеряемого вектора параметров состояния первичного измерительного преобразователя / А.Л. Шестаков, Д.Ю. Иосифов // Изв. Челяб. науч. центра. – 2005. – № 4(30). – С. 144–149.

20. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

21. Шестаков, А.Л. Динамические измерения как задача оптимального управления / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Е.В.Захарова // Обозрение прикл. и пром. математики. – 2009. – Т. 16, № 4. – С. 732–733.

22. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – № 16 (192), вып. 5. – С. 116–120.

23. Чистяков, В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А.Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003.

24. Бояринцев, Ю.Е. Блочные алгебро-дифференциальные системы и их индексы / Ю.Е. Бояринцев, И.В. Орлова // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 6. – С. 6–13.

25. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967.

26. Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон , Н. Левинсон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

27. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986.

28. Аникин, С.А. Параллельный вариант алгоритма восстановления входов динамических систем / С.А. Аникин // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: сб. науч. тр. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН 2000. – Вып.4 – С. 24–31.

29. Алберт, А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А. Алберт. – М.: Наука, 1977.

30. Stewart, G.W. On the continuity of the generalized inverses / G.W. Stewart // SIAM J. on Appl. Math. – 1969. – V. 17, № 1. – P. 33–45.

31. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978.

Сергей Алексеевич Аникин, кандидат физико-математических наук, отдел оптимального управления, Институт математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация), asa@imm.uran.ru.

MSC 49N45

An Algorithm for the Pseudoinversion of Dynamic Systems

S.A. Anikin, Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (Yekaterinburg, Russian Federation)

The problem of the pseudoinversion of a dynamic system (the reconstruction of an normal input of a system by the results of measurement of its output) is considered. The input is understood as a pair: the initial state of the system and an input action onto the system (control, perturbation, *etc.*). The normal input is one having minimal norm on a set of all inputs consistent with the output. The system output is a function of a time, a system state and an input action. The dynamics of the system is specified by a linear ordinary differential equation. The pseudoinversion problem is solved by the reduction of the original dynamic system to some equivalent system, enabling to obtain an normal input in an explicit form. The reduction is performed using a finite number of algebraic and differentiation operations. The explicit form of the normal input of the reduced system is deduced from a explicit form of a solution of some auxiliary parametric problem of optimal control by passage to the limit.

Keywords: inverse problems of dynamics, the inversion of a dynamic system, the input identification.

References

1. Zhukovskii N.E. *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical Mechanics]. Moscow, Gostekhizdat, 1952.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory od Motion Control]. Moscow, Nauka, 1968.
3. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and Observation under Indeterminacy Conditions]. Moscow, Nauka, 1977.
4. Gusev M.I., Kurzhanskii A.B. Inverse Problems in Dynamics of Control Systems. *Mekhanika i nauchno-tekhnicheskiy progress. T.1: Obshchaya i prikladnaya mekhanika* [Mechanics and Scientific and Technological Progress. vol.1: General and Applied Mechanics], Moscow, Nauka, 1987, pp. 187–195.
5. Kirin N.E. *Metody posledovatel'nykh otsenok v zadachakh optimizatsii upravlyaemykh sistem* [Methods of Successive Estimates in Problems of Optimization of Control Systems]. Leningrad, Leningrad. Gos. Univ., 1975.
6. Anikin S.A., Gusev M.I. Estimation of Perturbing Forces by Measuring the Parameters of Motion. *Garantirovannoe otsenivanie i zadachi upravleniya* [Guaranteed Estimation and Control Problems], Sverdlovsk, Ural. Nauch. Tsentr, Akad. Nauk SSSR, 1986, pp. 19–30.
7. Silverman L.M. Inversion of Multi-variable Linear Systems. *IEEE Tr. Aut. Control.,* 1969, vol. 14, pp. 270–276.
8. Willsky A.S. On the Invertibility of Linear Systems. *IEEE Tr. Aut. Control,* 1974, vol. 19, pp. 272–274.

9. Sain M.K., Massey J.L. Invertibility of Linear Time-invariant Dynamical Systems. *IEEE Tr. Aut. Control,* 1969, vol. 14, pp. 141–149.

10. Nikol'skii M.S. On the Perfectly Observable Systems [Ob ideal'no nablyudaemykh sistemakh]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations],* 1971, vol. 7, no. 4, pp. 631–638.

11. Anikin S.A. Error Estimate for a Regularization Method in Problems of the Reconstruction of Inputs of Dynamics Systems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 1997, vol. 37, no. 9, pp. 1020–1031.

12. Anikin S.A. Identification of the Inputs of Quasilinear Systems. *Automation and Remote Control,* 2007, vol. 68, no. 11, pp. 1900–1916.

13. Il'in A.V., Korovin S.K., Fomichev V.V. Algorithms for the Inversion of Control Linear Systems [Algoritmy obrashcheniya upravlyaemykh lineynykh sistem]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations],* 1998, vol. 34, no. 6, pp. 744–750.

14. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Positional Modeling of Control in a Dynamic System [O pozitsionnom modelirovanii upravleniya v dinamicheskoy sisteme]. *Izvestiya AN SSSR. Tekh. kibernetika,* 1983, no. 2, pp. 51–60.

15. Maksimov V.I. The Dynamic Estimation of Controls under Indeterminacy Conditions [O dinamicheskom otsenivanii upravleniy v usloviyakh neopredelennosti] *Izvestiya RAN. Tekh. kibernetika,* 1994, no. 3, pp. 127–133.

16. Savkin A.V., Petersen I.R. Set-Valued State Estimation via Limited Capacity Communication Channel. *IEEE Tr. Aut. Control,* 2003, vol. 48, no. 4, pp. 676–680.

17. Anan'ev B.I., Anikin S.A. Problem of Reconstructing Input Signals under Communication Constraints. *Automation and Remote Control,* 2009, vol. 70, no. 7, pp. 1153–1164.

18. Granovskii V.A. *Dinamicheskie izmereniya* [Dynamical measurements]. Leningrad, Energoizdat, 1984.

19. Shestakov A.L., Iosifov D.Yu. Solving the Inverse Problems of Dynamics Based on Modal Control Theory Using the Measured Vector of Parameters of the Primary Measurement Converter State [Reshenie obratnoy zadachi dinamiki na osnove teorii modal'nogo upravleniya s ispol'zovaniem izmeryaemogo vektora parametrov sostoyaniya pervichnogo izmeritel'nogo preobrazovatelya]. *Izvestiya Chelyabinskogo nauchnogo tsentra,* 2005, no. 4(30), pp. 144–149.

20. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003.

21. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Zaharova E.V. Dynamical Measurements as an Optimal Control Problem [Dinamicheskie izmereniya kak zadacha optimal'nogo upravleniya]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki,* 2009, vol. 16, no. 4, pp. 732–733.

22. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. A New Approach to the Measurement of Dynamically Distorted Signals [Novyy podkhod k izmereniyu dinamicheski iskazhennykh signalov]. *Vestnik Yuzhno-Ural. gos. univ. Serija: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie,* 2010, no. 16, pp. 116–120.

23. Chistyakov V.F., Scheglova A.A. *Izbrannye glavy teorii algebro-differentsial'nykh sistem* [Selected Chapters of the Theory of Differential-Algebraic Systems]. Novosibirsk, Nauka, 2003.

24. Boyarintsev Yu.E., Orlova I.V. Block Algebraic-Differential Systems and Their Indices [Blochnye algebro-differentsial'nye sistemy i ikh indeksy]. *Izv. vuzov. Matematika,* 2004, no. 6, pp. 6–13.

25. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Theory of Matrices]. Moscow, Nauka, 1967.

26. Coddington E.A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations.* New York, Toronto, London, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1955.

27. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1986.

28. Anikin S.A. A Parallel Version of the Algorithm for the Reconstruction of Inputs of Dynamic Systems. *Algoritmy i program. sredstva paral. vychisleniy* [The Algorithms and Software of Parallel Computing], Yekaterinburg, IMM UrO RAN, 2000, no. 4, pp. 24–31.

29. Albert A. *Regression and the Moor-Penrose Pseudoinverse.* New York and London, ACADEMIC PRESS, 1972.

30. Stewart G.W. On the Continuity of the Generalized Inverses. *SIAM J. on Appl. Math.,* 1969, vol. 17, no. 1. pp. 33–45.

31. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach ee prilozheniya* [Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Application]. Moscow: Nauka, 1978.

Поступила в редакцию 3 июня 2012 г.