УДК 519.642.8

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин

В работе получены простые формулы вычисления собственных чисел и аналитические формулы нахождения «взвешенных» поправок теории возмущений дискретных полуограниченных снизу операторов. Также получены оценки остатков сумм функциональных рядов Рэлея – Шредингера. На основе полученных формул создан неитерационный численный метод, позволяющий находить собственные числа и значения собственных функций возмущенной спектральной задачи. Был проведен численный эксперимент по нахождению собственных характеристик оператора Лапласа, возмущенного оператором умножения на дважды непрерывно дифференцируемую функцию. Из эксперимента видно, что результаты численных расчетов собственных чисел и значений собственных функций хорошо согласуются с результатами, полученными известными методами: найденные собственные числа сравнивались с методом Леверье, а значения собственных функций – с методами Данилевского А.М. и Крылова А.Н.

Ключевые слова: собственные числа, собственные функции, «взвешенные» поправки теории возмущений, возмущенные операторы.

Введение

Некоторые проблемы современной теории операторов в гильбертовом пространстве появились в результате поиска аналогов инвариантного следа для операторов, заведомо не имеющих следа в обычном смысле [1]. Вначале конечномерный результат был перенесен на случай ядерных операторов – было доказано (см. [2]), что если оператор A ядерный, то для любой пары $(\{\varphi\}_{n=1}^{+\infty}, \{\psi\}_{n=1}^{+\infty})$ ортонормированных базисов верно

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(A\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}(A\psi_n, \psi_n). \tag{0.1}$$

Также верно равенство, известное как теорема В. Б. Лидского [3],

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(A\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n, \tag{0.2}$$

где $\{\lambda_n\}$ – все собственные числа оператора A. Если A не имеет собственных чисел, то в правой части (0.2) стоит 0.

Постановка задачи обобщения понятия следа для дискретных операторов ставится следующим образом: доказать соотношение

$$\sum_{n=1}^{+\infty}((A\varphi_n, \varphi_n) - (A\psi_n, \psi_n)) = 0, \tag{0.3}$$

аналогичное формуле (0.1), при расходимости ряда из матричных элементов оператора. Однако, без существенных уточнений в постановке вопроса формулы (0.1) и (0.3) эквивалентны, так как, если ряд из матричных элементов расходится в некотором базисе $\{\varphi_n\}$, то существует перенумерация векторов этого базиса, которую можно принять за другой базис $\{\psi_n\}$, так, что ряд (0.3) расходится. Поэтому для любых пар базисов различных неядерных операторов A равенство (0.3) не выполняется. Таким образом, постановка основной задачи принимает вид: указать класс операторов A и соответствующий класс пар базисов $(\{\varphi_n\}, \{\psi_n\})$, для которых верна инвариантность следа в смысле (0.3).

Основной идеей, направляющей выбор базисов дискретных операторов, является спектральная формулировка следа (0.2): оператор A «расщепляется» в сумму двух $A = A_0 + B$, причем предполагается подчиненность оператора B оператору A_0. Первый базис $\{\psi_n\}$ выбирается из собственных векторов оператора A с собственными числами $\{\mu_n\}$, а второй из собственных векторов $\{\varphi_n\}$ оператора A_0 с собственными числами $\{\lambda_n\}$. Тогда формула (0.3) примет вид:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}((A\varphi_n, \varphi_n) - (A\psi_n, \psi_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n - \mu_n + (B\varphi_n, \varphi_n)) = 0.$$

Теоретическое обоснование вычисления первых собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля, основанное на системе нелинейных уравнений, составленной из регуляризованных следов оператора, впервые было произведено В.А. Садовничим и В.Е. Подольским в работе [4]. В последнее время большое значение приобретает вопрос о нахождении собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов [5 – 11]. Это послужило толчком к созданию новых численных методов нахождения собственных характеристик для широкого класса абстрактных операторов. В работах [12 – 15] был разработан неитерационный метод нахождения собственных чисел полуограниченных снизу дискретных операторов, названный авторами методом *регуляризованных следов* (РС). Развивая метод РС, в статье получены простые формулы для нахождения собственных чисел дискретных полуограниченных снизу операторов в случае, когда собственные числа невозмущенных операторов имеют произвольную кратность. Рассматривается использование метода РС для вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. Излагаются новые результаты, позволяющие с успехом применять метод РС специалистам, имеющим начальные знания в области спектральной теории операторов.

Рассмотрим задачу нахождения собственных значений оператора $T + P$

$$\Big(T + P\Big)u = \mu u,$$

где T – дискретный полуограниченный снизу оператор, P – ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения в D. Предположим, что известны собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, занумерованные в порядке возрастания собственных чисел λ_n по величине с учетом кратности. Обозначим через ν_n кратность собственного числа λ_n, а количество всех неравных друг другу λ_n, лежащих внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{|\lambda_{n_0+1} + \lambda_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности, а $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – соответствующие им собственные функции. Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n = \dfrac{2\|P\|}{|\lambda_{n+\nu_n} - \lambda_n|} < 1$, тогда первые $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные числа $\{\mu_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T + P$ являются решениями системы m_0 нелинейных уравнений вида [12]

$$\sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p = \sum_{k=1}^{m_0} \lambda_k^p + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0),\ p = \overline{1, m_0}. \tag{0.4}$$

Здесь $\alpha_k^{(p)}(m_0) = \dfrac{(-1)^k p}{2\pi k i} Sp \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^{p-1}\Big[PR_\lambda(T)\Big]^k d\lambda$ – k-тые поправки теории возмущений оператора $T+P$ целого порядка p, $R_\lambda(T)$ - резольвента оператора T.

Известно, что в этом случае контур T_{n_0} содержит одинаковое количество собственных чисел операторов T и $T+P$ [16].

Система уравнений (0.4) лежит в основе численного метода РС, позволяющего находить собственные числа возмущенных самосопряженных операторов в случае, когда самосопряженные операторы имеют собственные числа с произвольной кратностью.

В работе [13] показано, что *если T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и при этом система собственных функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T является базисом H, и существует $n_0 \in N$ такое, что для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n < 1$, тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) = Sp\mathbf{A}^p - \sum_{k=1}^{m_0} \lambda_k^p + \delta_p(m_0),\ p = \overline{1, m_0}, \tag{0.5}$$

$$|\delta_1(m_0)| \le \Big|\sum_{k=2}^{t_1} \alpha_k^{(1)}(m_0)\Big| + m_0 \rho_{n_0} \frac{q^{t_1+1}}{1-q},\ q = \max_{n\ge1} q_n,\ t_1 \in N,$$

$$|\delta_p(m_0)| \le \Big|\sum_{k=2}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0}\Big(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \lambda_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} +$$

$$+ \sum_{\substack{j_2,\dots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r}\Big)\Big| + p m_0 \rho_{n_0}^p \frac{q^{t_p+1}}{1-q},\ p = \overline{2, m_0},\ t_p \in N.$$

Здесь $\delta_p(m_0) = \sum\limits_{k=1}^{m_0} \widetilde{\delta}_{kp}(m_0)$, $\widetilde{\delta}_{kp}(m_0) = \mu_k^p - \widetilde{\mu}_k^p(m_0)$, $\{\widetilde{\mu}_k(m_0)\}_{k=1}^{m_0}$ – приближенные значения по Бубнову – Галеркину соответствующих собственных чисел $\{\mu_k\}_{k=1}^{m_0}$ оператора $T+P$, $a_{km} = \lambda_k \delta_{km} + V_{km}$, δ_{kn} – символ Кронекера, $V_{km} = (Pv_k, v_m)$, $r = \begin{cases} s+1, & s \ne p, \\ 1, & s = p. \end{cases}$

*След p – ой степени матрицы **A** вычисляется по формуле*

$$Sp\mathbf{A}^p(m_0) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r}. \tag{0.6}$$

В статьях [17, 18] получена система уравнений для «взвешенных» поправок теории возмущений. Если для всех $n \ge n_0$ выполняются неравенства $q_n = \frac{2||P||}{|\lambda_{n+1}-\lambda_n|} < 1$, то первые n_0 собственных функций оператора $T+P$ являются решениями системы нелинейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n_0} \mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y) = \sum_{j=1}^{n_0} \lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y) + \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^{(p)}(n_0, x, y) + \varepsilon_t^{(p)}. \tag{0.7}$$

Здесь

$$\alpha_k^{(p)}(n_0, x, y) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p [K_T(x, z_k, \lambda) \circ P_{z_k}]^k \circ K_T(z_k, y, \lambda) d\lambda$$

– k-тые поправки теории возмущений к «взвешенной» спектральной функции оператора $T+P$ целого порядка p; $K_T(x,y,\lambda)$ – ядро резольвенты $R_\lambda(T)$ оператора T; операция «$\circ$» вводится по правилу

$$(K\circ P\circ Q)(x,y,\lambda)=\int\limits_D K(x,z,\lambda)P_zQ(z,y,\lambda)dz,$$

а $\varepsilon_t^{(p)}=\sum\limits_{m=t+1}^{\infty}\alpha_m^{(p)}(n_0,x,y)$, $\forall t\in N$ – остатки сумм функциональных рядов Рэлея–Шредингера.

1. Основные положения метода РС

1.1. Вычисление собственных чисел

В [14] получены формулы, позволяющие находить собственные числа возмущенных дискретных операторов для случая, когда собственные числа невозмущенного оператора имеют произвольную кратность. Для их использования необходимо почленно суммировать числовые ряды Рэлея – Шредингера $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0)$, для чего надо вычислять поправки теории возмущений оператора $T+P$, которые находятся путем суммирования кратных числовых рядов. Причем кратность этих рядов на единицу меньше номера поправки. Это вызывает большие вычислительные трудности при применении этих формул. В данном разделе получены простые формулы, которые лишены этого недостатка и позволяющие с высокой *вычислительной эффективностью* находить собственные числа дискретного полуограниченного снизу оператора вида $T+P$, когда собственные числа и собственные функции оператора T известны, а для возмущающего оператора P выполнены неравенства $q_n<1$ для любых натуральных n.

Теорема 1. *Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для всех $n\in N$ выполняются неравенства $q_n<1$ и собственные функции $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T являются базисом в H, то собственные числа $\{\mu_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ вычисляются по формулам:*

$$\mu_n=\lambda_n+(Pv_n,v_n)+\tilde{\delta}_1(n),\ n=\overline{1,m_0}, \tag{1.1}$$

где для $\tilde{\delta}_1(n)$ справедливы оценки $|\tilde{\delta}_1(n)|\le(2n-1)\rho_n\dfrac{q^2}{1-q}$.

Доказательство. Из системы уравнений (0.4) для $m_0=n$ и $m_0=n-1$ при $p=1$, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(1)}(n), \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(1)}(n-1). \tag{1.3}$$

Вычитая из уравнения (1.2) уравнение (1.3), найдем

$$\mu_n=\lambda_n+\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^{(1)}(n)-\alpha_k^{(1)}(n-1)]. \tag{1.4}$$

Используя (0.5), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^{(1)}(n) - \alpha_k^{(1)}(n-1)] = Sp\mathbf{A}(n) - Sp\mathbf{A}(n-1) - \lambda_n + \delta_1(n) - \delta_1(n-1). \qquad (1.5)$$

Из равенства (0.6), получаем

$$Sp\mathbf{A}(n) - Sp\mathbf{A}(n-1) = (Pv_n, v_n). \qquad (1.6)$$

Подставляя равенства (1.5) и (1.6) в (1.4), найдем формулы (1.1).

Оценки погрешностей $\tilde{\delta}_1(n)$ вычисления собственных чисел оператора $T+P$, входящие в формулы (1.1), найдем, используя соотношения (0.5)

$$|\tilde{\delta}_1(n)| = |\delta_1(n) - \delta_1(n-1)| \leq |\delta_1(n)| + |\delta_1(n-1)| \leq$$

$$\leq \Big[n\rho_n + (n-1)\rho_{n-1}\Big]\frac{q^2}{1-q} \leq (2n-1)\rho_n\frac{q^2}{1-q}.$$

□

1.2. Вычисление значений собственных функций

Система уравнений (0.7) позволяет разработать численный метод нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов.

В.А. Садовничий и В.В. Дубровский предложили искать решение системы (0.7) по правилу Крамера, т.к. основной определитель системы является определителем Вандермонта и отличен от нуля [17]. Следуя работе [20], из системы уравнений (0.7) получим:

$$u_n(x)\overline{u}_n(y) = \frac{1}{\mu_n^p}\Big(\lambda_n^p v_n(x)\overline{v}_n(y) + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^{(p)}(n,x,y) - \alpha_k^{(p)}(n-1,x,y)]\Big). \qquad (1.7)$$

Найдем аналитические формулы нахождения «взвешенных» поправок теории возмущений.

Теорема 2. *Если T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n < 1$, то «взвешенные» поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)$ для любых натуральных k, p и n_0 можно найти по формулам:*

$$\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y) = -\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{j_1,\dots,j_{k+1}=1}^{\infty} v_{j_1}(x)\overline{v}_{j_{k+1}}(y) r_k^{(p)}(n,j_1,\dots,j_{k+1})\prod_{m=1}^{k} V_{j_m j_{m+1}}, \qquad (1.8)$$

где

$$r_k^{(p)}(n,j_1,\dots,j_{k+1}) = \begin{cases} 0, \ \forall j_m \neq n, m = \overline{1,k+1}; \\ \frac{1}{k!}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}\frac{d^k}{d\lambda^k}\lambda^p, \ l = k+1; \\ \frac{1}{(l-1)!}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}\frac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}}\Big(\frac{\lambda^p}{\prod_{m=1}^{k-l+1}(\lambda-\lambda_{j_m})}\Big), \ 0 < l \leq k; \end{cases}$$

$V_{i,j} = (Pv_i, v_j)$ *– скалярное произведение; l- число совпадений $j_m = n$, $m = \overline{1,k+1}$.*

Доказательство. Т.к. оператор T дискретный и полуограниченный снизу, то его резольвента $R_\lambda(T)$ является интегральным оператором [21], и для ядра $K_T(x,y,\lambda)$ имеет место равенство:

$$K_T(x,y,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{v_i(x)\overline{v}_i(y)}{\lambda_i-\lambda}.$$

Тогда

$$\alpha_k^{(p)}(n_0,x,y)=\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\lambda^p[K_T(x,z_k,\lambda)\circ P_{z_k}]^k\circ K_T(z_k,y,\lambda)d\lambda=$$

$$=\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\lambda^p K_T(x,z_1,\lambda)\circ P_{z_1}\circ K_T(z_1,z_2,\lambda)\circ P_{z_2}\circ ...\circ$$

$$\circ K_T(z_{k-1},z_k,\lambda)\circ P_{z_k}\circ K_T(z_k,y,\lambda)d\lambda=$$

$$=\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\lambda^p\Big[\int\limits_D\int\limits_D...\int\limits_D K_T(x,z_1,\lambda)P_{z_1}K_T(z_1,z_2,\lambda)P_{z_2}\times...\times$$

$$\times K_T(z_{k-1},z_k,\lambda)P_{z_k}K_T(z_k,y,\lambda)dz_1dz_2...dz_k\Big]d\lambda=$$

$$=\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\lambda^p\Big[\int\limits_D...\int\limits_D\sum_{j_1=1}^{\infty}\frac{v_{j_1}(x)\overline{v}_{j_1}(z_1)}{\lambda_{j_1}-\lambda}\sum_{j_2=1}^{\infty}\frac{P_{z_1}v_{j_2}(z_1)\overline{v}_{j_2}(z_2)}{\lambda_{j_2}-\lambda}\times...\times$$

$$\times\sum_{j_k=1}^{\infty}\frac{P_{z_{k-1}}v_{j_k}(z_{k-1})\overline{v}_{j_k}(z_k)}{\lambda_{j_k}-\lambda}\sum_{j_{k+1}=1}^{\infty}\frac{P_{z_k}v_{j_{k+1}}(z_k)\overline{v}_{j_{k+1}}(y)}{\lambda_{j_{k+1}}-\lambda}dz_1...dz_k\Big]d\lambda=$$

$$=\sum_{j_1,j_2,...,j_{k+1}=1}^{\infty}v_{j_1}(x)\overline{v}_{j_{k+1}}(y)(Pv_{j_1},v_{j_2})(Pv_{j_2},v_{j_3})...(Pv_{j_k},v_{j_{k+1}})\times$$

$$\times\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\frac{\lambda^p d\lambda}{(-1)^{k+1}\prod\limits_{m=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_{j_m})}=$$

$$=-\sum_{j_1,...,j_{k+1}=1}^{\infty}\Big(v_{j_1}(x)\overline{v}_{j_{k+1}}(y)r_k^{(p)}(n,j_1,...,j_{k+1})\prod_{m=1}^{k}V_{j_mj_{m+1}}\Big),$$

где $r_k^{(p)}(n,j_1,...,j_{k+1})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\frac{\lambda^p d\lambda}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_{j_m})}$.

Здесь $V_{ij}=(Pv_i,v_j)=\int\limits_D P_zv_i(z)\overline{v}_j(z)dz$. Функция $\frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_{j_m})}$ в круге T_{n_0} имеет в точках λ_n, $n=\overline{1,n_0}$ полюсы кратности l – количество совпадений $j_m=n$, $m=\overline{1,k+1}$. На основании теоремы о вычетах имеем:

$$r_k^{(p)}(n,j_1,...,j_{k+1})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}}\frac{\lambda^p d\lambda}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_{j_m})}=\operatorname*{res}_{\lambda_n}\frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_{j_m})}=$$

$$= \begin{cases} 0, \ \forall j_m \neq n, m = \overline{1, k+1}; \\ \frac{1}{k!} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \frac{d^k}{d\lambda^k} \lambda^p, \ l = k+1; \\ \frac{1}{(l-1)!} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \frac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}} \Big(\frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k-l+1} (\lambda - \lambda_{j_m})} \Big), \ 0 < l \leq k. \end{cases}$$

□

Теорема 3. *Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для некоторого натурального числа n_0 выполняются неравенства $\frac{2||P||}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|} < 1$, то для остатков сумм рядов Рэлея – Шредингера $\varepsilon_t^{(p)}(n_0)$ оператора $T + P$ справедливы оценки:*

$$|\varepsilon_t^{(p)}(n_0)| \leq C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} S_{n_0} ||P|| \frac{q^t}{1-q}.$$

Здесь $q = \frac{2||P||}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|}$, $S_{n_0} = \sup\limits_{\lambda_i} \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_0} - \lambda_i|} \Big)^2$, $|v_i(x)| \leq C_0 \ \forall i = \overline{1, \infty}$.

Доказательство. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$([K_T \circ P]^m \circ K_T)(x, y, \lambda) = \int\limits_D ... \int\limits_D K_T(x, z_1, \lambda) P_{z_1} K_T(z_1, z_2, \lambda) P_{z_2} \times ... \times$$

$$\times K_T(z_{m-1}, z_m, \lambda) P_{z_m} K_T(z_m, y, \lambda) dz_1 ... dz_m =$$

$$= \int\limits_D ... \int\limits_D \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i(x) \overline{v}_i(z_1)}{\lambda_i - \lambda} P_{z_1} K_T(z_1, z_2, \lambda) P_{z_2} \times ... \times K_T(z_{m-1}, z_m, \lambda) P_{z_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_j(z_m) \overline{v}_j(y)}{\lambda_j - \lambda} dz_1 ... dz_m =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{v_i(x) \int\limits_D \overline{v}_i(z_1) P_{z_1} [R_\lambda(T) P]^{m-1} v_j(z_1) dz_1 \overline{v}_j(y)}{(\lambda_i - \lambda)(\lambda_j - \lambda)} = \sum_{i,j} \frac{v_i(x) (P[R_\lambda(T) P]^{m-1} v_j, v_i) \overline{v}_j(y)}{(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_j)}.$$

Тогда

$$|\alpha_m^{(p)}(n_0, x, y)| = \left| \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p \sum_{i,j} \frac{v_i(x) (P[R_\lambda(T) P]^{m-1} v_j, v_i) \overline{v}_j(y)}{(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_j)} d\lambda \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{T_{n_0}} |\lambda^p| \sum_{i,j} \frac{|v_i(x)| |(P[R_\lambda(T) P]^{m-1} v_j, v_i)| |\overline{v}_j(y)|}{|\lambda - \lambda_i| |\lambda - \lambda_j|} d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \rho_{n_0}^{p+1} \sup_{\lambda_i} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_0^2}{|\lambda_{n_0} - \lambda_i|} \Big)^2 ||P||^m \Big(\frac{2}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|} \Big)^{m-1} \leq$$

$$\leq C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} ||P||^m \Big(\frac{2}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|} \Big)^{m-1} \sup_{\lambda_i} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_0} - \lambda_i|} \Big)^2 \leq$$

$$\leq C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} ||P|| q^{m-1} S_{n_0},$$

где $q = \frac{2||P||}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|}$, $S_{n_0} = \sup\limits_{\lambda_i} \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_0} - \lambda_i|} \Big)^2$, $|v_i(x)| \leq C_0$, $\forall i = \overline{1, \infty}$.

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_0}-\lambda_i|}$ сходится [17]. Поэтому для $\varepsilon_t^{(p)}(n_0)$ справедливы оценки

$$|\varepsilon_t^{(p)}(n_0)| \leq C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} S_{n_0} ||P|| \sum_{m=t+1}^{\infty} q^{m-1} = C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} S_{n_0} ||P|| \frac{q^t}{1-q}.$$

□

Используя формулу (1.1), найдем собственные числа, а по формуле (1.7) и Теоремам 2 и 3 – собственные функции возмущенного оператора Лапласа.

2. Возмущенный оператор Лапласа

Пусть оператор $T = -\Delta$ задан на прямоугольнике $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ с границей Γ. Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. В качестве возмущения P возьмем оператор умножения на функцию $p(x, y)$, определенную на прямоугольнике Π.

Рассмотрим спектральную задачу

$$(T + P)\varphi = \beta\varphi, \ \ \varphi \in D_T. \tag{2.1}$$

$$D_T = \Big\{\varphi \mid \varphi \in C^2(\Pi) \bigcap C[\Pi], \Delta\varphi \in L_2[\Pi] : \varphi\Big|_{\Gamma} = 0\Big\}.$$

Собственные числа λ_{nk} и собственные функции v_{nk} оператора T имеют вид:

$$\lambda_{nk} = \pi^2\Big(\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\Big), \ v_{nk}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad n, k \in N.$$

Система собственных функций $\{v_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2[\Pi]$. В случае, когда $\dfrac{a^2}{b^2}$ – иррациональное число, оператор T имеет однократный спектр.

Пронумеруем собственные числа $\{\lambda_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ оператора T одним индексом в порядке возрастания их действительных частей.

В таблице 1 приведены результаты вычисления первых собственных чисел спектральной задачи (2.1), найденных методом РС по формулам (1.1) и методом Леверье. В первом случае собственные числа обозначены через $\widehat{\mu}_n(x, y)$, во втором – $\widetilde{\mu}_n(x, y)$.

Таблица 1

Значения $\widehat{\mu}_n$ и $\widetilde{\mu}_n$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленных при $a = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $b = 1$ и $p(x, y) = (1 + i)xy^2$

n	λ_n	$\widehat{\mu}_n$	$\widetilde{\mu}_n$	$\lvert\widehat{\mu}_n - \widetilde{\mu}_n\rvert$	$\frac{\lvert\widehat{\mu}_n - \widetilde{\mu}_n\rvert}{\lvert\widetilde{\mu}_n\rvert}100\%$
1	$28,7191603$	$28,821431 + 0,1022712i$	$28,821431 + 0,1019185i$	$0,000353$	$0,001223$
2	$58,3279734$	$58,443991 + 0,1160179i$	$58,443278 + 0,1159876i$	$0,000714$	$0,001221$
3	$85,2678278$	$85,370099 + 0,1022711i$	$85,372052 + 0,1020498i$	$0,001966$	$0,002303$
4	$107,675995$	$107,794560 + 0,1185636i$	$107,79083 + 0,118432i$	$0,003732$	$0,003462$
5	$114,876641$	$114,992659 + 0,1160179i$	$114,995050 + 0,116314i$	$0,002409$	$0,002095$
6	$164,224663$	$164,343227 + 0,1185636i$	$164,343115 + 0,118743i$	$0,000211$	$0,000129$
7	$176,763226$	$176,882681 + 0,1194546i$	$176,882782 + 0,1197155i$	$0,000279$	$0,000158$
8	$179,515607$	$179,617879 + 0,1022711i$	$179,617905 + 0,1020416i$	$0,000231$	$0,0001286$
9	$209,124421$	$209,240439 + 0,1160179i$	$209,240438 + 0,1163887i$	$0,000371$	$0,0001772$
10	$233,311894$	$233,431349 + 0,1194546i$	$233,431348 + 0,1196891i$	$0,000234$	$0,0001005$

Таблица 2

Значения $\widehat{u}_n$ и $\widetilde{u}_n$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленных при $a = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $b = 1$ и $p(x, y) = (1 + i)xy^2$

n	x	y	$\widehat{u}_n$	$\widetilde{u}_n$	$\lvert\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n\rvert$	$\left\lvert\frac{\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n}{\widetilde{u}_n}\right\rvert \times 100\%$
	$0,22$	$0,22$	$1,2277949 + 0,0044957i$	$1,2278057 - 0,0042655i$	$0,0000099$	$0,000813$
	$0,22$	$0,33$	$1,6565221 + 0,0047339i$	$1,6565321 - 0,0043272i$	$0,0000087$	$0,000531$
	$0,22$	$0,44$	$1,8884005 + 0,0035046i$	$1,8884043 - 0,0028878i$	$0,0000027$	$0,000145$
	$0,22$	$0,55$	$1,896431 + 0,0013475i$	$1,8964256 - 0,0005408i$	$0,0000058$	$0,000306$
	$0,33$	$0,22$	$1,4892400 + 0,0048573i$	$1,4892428 - 0,0048056i$	$0,0000025$	$0,000174$
	$0,33$	$0,33$	$2,0090895 + 0,0046755i$	$2,0090924 - 0,004586i$	$0,0000027$	$0,000138$
	$0,33$	$0,44$	$2,2900251 + 0,0026136i$	$2,2900265 - 0,0024607i$	$0,0000013$	$0,000058$
	$0,33$	$0,55$	$2,2993781 - 0,0005276i$	$2,2993764 + 0,0007641i$	$0,0000015$	$0,000065$
1	$0,44$	$0,22$	$1,4173573 + 0,0040158i$	$1,4173494 - 0,0041988i$	$0,0000073$	$0,000521$
	$0,44$	$0,33$	$1,9119410 + 0,0033633i$	$1,9119346 - 0,0036901i$	$0,0000057$	$0,000301$
	$0,44$	$0,44$	$2,1789915 + 0,0008194i$	$2,1789898 - 0,0012814i$	$0,0000014$	$0,000068$
	$0,44$	$0,55$	$2,1874983 - 0,0027052i$	$2,1875019 + 0,0021727i$	$0,0000029$	$0,000136$
	$0,55$	$0,22$	$1,0284621 + 0,0025431i$	$1,02845 - 0,00281783i$	$0,0000114$	$0,001115$
	$0,55$	$0,33$	$1,3872356 + 0,0017766i$	$1,3872254 - 0,0022656i$	$0,0000095$	$0,000685$
	$0,55$	$0,44$	$1,5808143 - 0,0004246i$	$1,5808112 - 0,0002822i$	$0,0000032$	$0,000201$
	$0,55$	$0,55$	$1,5867458 - 0,003309i$	$1,5867515 + 0,0024593i$	$0,0000042$	$0,000262$
	$0,22$	$0,22$	$1,8850059 + 0,0004272i$	$1,88500701 + 0,0004706i$	$0,0000012$	$0,000063$
	$0,22$	$0,33$	$1,6784847 + 0,0034971i$	$1,67826304 + 0,0037777i$	$0,000221$	$0,013171$
	$0,22$	$0,44$	$0,6994813 + 0,0070236i$	$0,69948269 + 0,7156526i$	$0,0000027$	$0,00039$
	$0,22$	$0,55$	$-0,6018627 + 0,0085762i$	$-0,6018597 + 0,0085335i$	$0,0000036$	$0,000597$
	$0,33$	$0,22$	$2,2870274 + 0,0004618i$	$2,2870278 + 0,0004908i$	$0,0000003$	$0,000015$
	$0,33$	$0,33$	$2,0366146 + 0,004053i$	$2,0363444 + 0,0043579i$	$0,0002695$	$0,013235$
	$0,33$	$0,44$	$0,8494149 + 0,0077875i$	$0,8494154 + 0,0078879i$	$0,0000014$	$0,000168$
2	$0,33$	$0,55$	$-0,7284031 + 0,008672i$	$-0,7284013 + 0,0086151i$	$0,0000025$	$0,000337$
	$0,44$	$0,22$	$2.1772798 + 0,0003818i$	$2,1772789 + 0,0003854i$	$0,0000008$	$0,000037$
	$0,44$	$0,33$	$1.9390401 + 0,0036649i$	$1.9387817 + 0,0039191i$	$0,0002579$	$0,013303$
	$0,44$	$0,44$	$0,8094209 + 0,0066661i$	$0,8094202 + 0,0067014i$	$0,0000004$	$0,000047$
	$0,44$	$0,55$	$-0,6915945 + 0,006490381i$	$-0,6915942 + 0,0064204i$	$0,0000009$	$0,000132$
	$0,55$	$0,22$	$1,5802695 + 0,0002418i$	$1,5802682 + 0,0002298i$	$0,0000013$	$0,00008$
	$0,55$	$0,33$	$1,4074509 + 0,0025418i$	$1,4072626 + 0,0027042i$	$0,000188$	$0,013359$
	$0,55$	$0,44$	$0,5879461 + 0,0043815i$	$0,5879449 + 0,0043715i$	$0,0000012$	$0,000211$
	$0,55$	$0,55$	$-0,5008262 + 0,0036323i$	$-0,5008267 + 0,0035652i$	$0,00000002$	$0,000004$
	$0,22$	$0,22$	$1,4187905 - 0,0051851i$	$1,4188759 - 0,0057146i$	$0,0000874$	$0,0061611$
	$0,22$	$0,33$	$1,9129145 - 0,0040801i$	$1,9129666 - 0,0047342i$	$0,0000535$	$0,0027981$
	$0,22$	$0,44$	$2,1788502 - 0,0005046i$	$2,1790041 - 0,001328i$	$0,0001542$	$0,007076$
	$0,22$	$0,55$	$2,1863271 + 0,0039513i$	$2,1866724 + 0,0029744i$	$0,0003437$	$0,01572$
	$0,33$	$0,22$	$0,4113426 - 0,0021685i$	$0,4111416 - 0,0025359i$	$0,0001989$	$0,048372$
	$0,33$	$0,33$	$0,5535044 - 0,0010144i$	$0,5534391 - 0,0016927i$	$0,0000637$	$0,011504$
	$0,33$	$0,44$	$0,629121 + 0,0013327i$	$0,6284397 + 0,0012098i$	$0,0006816$	$0,108455$
3	$0,33$	$0,55$	$0,630164 + 0,0036967i$	$0,6292143 + 0,0039061i$	$0,0009484$	$0,1507218$
	$0,44$	$0,22$	$-0,9427961 + 0,0021345i$	$-0,9427938 + 0,0015746i$	$0,0000034$	$0,000365$
	$0,44$	$0,33$	$-1,2733068 + 0,0030433i$	$-1,2733446 + 0,0023681i$	$0,0000363$	$0,0028558$
	$0,44$	$0,44$	$-1,4529489 + 0,0032497i$	$-1,4532817 + 0,0028594i$	$0,0003319$	$0,022847$
	$0,44$	$0,55$	$-1,4601338 + 0,0024015i$	$-1,4608663 + 0,0025289i$	$0,0007327$	$0,050182$
	$0,55$	$0,22$	$-1,4993769 + 0,0041142i$	$-1,4992294 + 0,0035299i$	$0,0001489$	$0,0099374$
	$0,55$	$0,33$	$-2,0238185 + 0,0046577i$	$-2,0238457 + 0,0041449i$	$0,0000261$	$0,001288$
	$0,55$	$0,44$	$-2,3079068 + 0,0035688i$	$-2,307408 + 0,0025263i$	$0,0005001$	$0,0216738$
	$0,55$	$0,44$	$-2,3181168 + 0,0010602i$	$-2,3172614 - 0,0002723i$	$0,0008556$	$0,036923$

В таблице 2 приведены результаты вычисления значений первых собственных функций спектральной задачи (2.1) методами РС $\widetilde{u}_n(x, y)$ и методом А. М. Данилевского $\widehat{u}_n(x, y)$. Аргументы x и y изменяются с шагом 0,11. В методе РС суммы рядов Рэлея – Шредингера приближаются третьими частичными суммами по формулам (1.8).

Проведенные расчеты показывают, что результаты вычислений, полученные методом РС и известными методами, хорошо согласуются.

Заключение

Разработаны новые неитерационные методы нахождения собственных чисел и собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. Проведенные численные эксперименты показали их надежность и вычислительную эффективность по сравнению с известными методами.

Литература

1. Садовничий, В.А. Следы операторов / В А. Садовничий, В Е. Подольский // Успехи математических наук. – Москва, 2006. – Т. 61, вып. 5 (371). – С. 89–156.
2. Гохберг, И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1965.
3. Лидский, В.Б. Несамосопряженные операторы, имеющие след / В.Б. Лидский // Докл. АН СССР. – 1959. – 125: 3. – С. 485–487.
4. Садовничий, В.А. О вычислении первых собственных значений оператора Штурма – Лиувилля / В.А. Садовничий, В.Е. Подольский // ДАН (Россия). – 1996. – Т. 346, №2. – С. 162–164.
5. Шестаков, А.Л. Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика / А.Л. Шестаков // Метрология. – 1987. – № 2. – С. 26–34.
6. Шестаков, А.Л. Коррекция динамической погрешности измерительного преобразователя линейным фильтром на основе модели датчика / А.Л. Шестаков // Изв. Вузов. Приборостроение. – 1991. – Т. 34, № 4. – С. 8–13.
7. Шестаков, А.Л. Модальный синтез измерительного преобразователя / А.Л. Шестаков // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 4. – С. 67–75.
8. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – №16 (192), вып. 5. – С. 116–120.
9. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
10. Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия «Физ.-мат. науки». – 2009. – №1 (18). – С. 6–17.
11. Свиридюк, Г.А. Устойчивость уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия «Физ.-мат. науки». – 2010. – №1 (15). – С. 6–15.
12. Вычисление первых собственных значений задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 742–746.

13. Кадченко, С.И. Вычисление сумм рядов Рэлея – Шредингера возмущенных самосопряженных операторов / С.И. Кадченко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2007. – Т. 47, № 9. – С. 1494–1505.

14. Кадченко, С.И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных операторов / С.И. Кадченко, И.И. Кинзина // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2006. – Т. 46, № 7. – С. 1265–1272.

15. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В.А. Садовничий, В.А. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 1. – С. 50–53.

16. Садовничий, В.А. Теория операторов: учеб. для вузов с углубленным изучением математики / В.А. Садовничий. – 5-е изд. стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.

17. Садовничий, В.А. Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Тр. семинара И.Г. Петровского. – М.: МГУ, 1994. – Вып. 17. – С. 244–248.

18. Дубровский В.В. Оценка разности спектральных функций операторов типа Лежандра / В.В. Дубровский, А.И. Седов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – Т. 6, №4, – С. 1075–1082.

19. Кадченко, С.И. Новый метод вычисления собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда / С.И. Кадченко // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2000. – Т. 5, № 6. – С. 4–10.

20. Кадченко, С.И. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – №17 (234), вып. 8. – С. 46–51.

21. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы. / М. А. Наймарк. - М.: Наука, 1969.

Сергей Иванович Кадченко, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет (г. Магнитогорск, Российская Федерация), kadchenko@masu.ru.

Сергей Николаевич Какушкин, аспирант, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет (г. Магнитогорск, Российская Федерация), kakushkin-sergei@mail.ru.

MSC 47A75

The Numerical Methods of Eigenvalues and Eigenfunctions of Perturbed Self-Adjoin Operator Finding

S.I. Kadchenko, Magnitogorsk State University (Magnitogorsk, Russian Federation)***,***
S.N. Kakushkin, Magnitogorsk State University (Magnitogorsk, Russian Federation)

In work are received simple formulas of the calculation eigenvalues and analytical formulas of finding ≪weighed≫ corrections of the perturbation theory of the discrete semi bounded from below operators. Estimations remainder of the sum of the Reley-Shredinger's functional series are received also. On the base of received formulas was created non-iteration numerical method, which allowed to find the eigenvalues and meanings of eigenfunctions perturbed spectral problem. The numerical experiment for finding of the eigenfeatures by the Laplas's operator, which was perturbed by operator of the multiplying on twice continuously differentiated function, was organized. From the experiment seen, that results numerical accounts of eigenvalues and meanings of eigenfunctions well-agree with result, which received by well-known methods: finding eigenvalues were compared with method Leverrie, and meanings of eigenfunctions – with methods by Danilevskiy A. M. and Krylov A.N.

Keywords: eigenvalues, eigenfunctions, ≪weighted≫ corrections of the perturbation theory, perturbed operators.

References

1. Sadovnichiy V.A., Podolskiy V.E. Tracks of the Operators [Sledy operatorov]. *Uspehi matematicheskih nauk [Successes of Mathematical Sciences]*, Moscow, 2006, vol. 61, no. 5 (371), pp. 89–156.
2. Gokhberg I.C., Kreyn M.G. *Introduction to the Theory of the Linear Non-Selfadjoin Operator in a Hilbert Space* [Vvedenie v teoriyu lineynyh nesamosopryajennyh operatorov v gilbertovom prostranstve]. Moscow, Science, 1965.
3. Lidskiy V.B. The Self-adjoin Operators Having a Track [Nesamosopryajennye operatory, imeyush'ie sled] *Dokl. AN SSSR [Reports of Academy of Sciences of the USSR]*. Moscow, 1959, no. 125: 3, pp. 485–487.
4. Sadovnichiy V.A., Podolskiy V.E. About an Evaluation of the First Eigenvalues of the Operator of Sturm-Liuvill [O vychislenii pervyh sobstvennyh zhacheniy operatora Shturma-Leuvill'ya]. *DAN(Rossiya) [RAN(Russia)]*, Moscow, 1996, vol. 346, no. 2, pp. 162–164.
5. Shestakov A.L. Dynamic Accuracy of the Measuring Converter with Correcting Device in the Manner of Sensor's Models [Dinamicheskaya tochnost' izmeritel'nogo preobrazovatelya s korrektiruyuschim ustroystvom v vide modeli datchika]. *Metrologiya [Metrology]*, 1987, no. 2, pp. 26–34.
6. Shestakov A.L. Correction of Dynamic Inaccuracy of the Measuring Converter by the Linear Filter on the Base of Sensor's Models [Korrekciya Dinamicheskoy pogreshnosti izmeritel'nogo preobrazovaniya lineynym fil'trom na osnove modeli datchika]. *Izv. Vuzov. Priborostroenie [The Notify of High School, Instrumentmaking]*, 1991, vol. 34, no. 4, pp. 8–13.
7. Shestakov A.L. Modal Syntheses of the Measuring Converter [Modal'nyy sintez izmeritel'nogo preobrazovatelya]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya [Notify of DAN. Theory and Managerial System]*, 1995, no. 4, pp. 67–75.
8. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. New Approach to Measurement of the Dynamically Distorted Signal [Novyy podhod k izmereniyu dinamicheskih iskajennyh signalov]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫ – Bulletin of South Ural State University. Seria ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2010, no. 16 (192), issue 5, pp. 116–120.
9. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of Optimal Measurement [Chislennoe reshenie zadachi optimal'nogo izmerenija]. *Automatics and Telemechanics*, 2012, no. 1, pp. 107–115.

10. Sviridyuk G.A., Bayazitova A.A. About Direct and Inverse Problems for the Equations of Hoff on the Graph [O pryamoy i obratnoy zadachah dlya uravneniy Hoffa na grafe]. *Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta, Ser. fiz.-mat. nauki [The Bulletin of the Samara State Engineering University, Series of Physical and Mathematical Sciences]*, 2009, no. 1(18), pp. 6–17.
11. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A., Pivovarova P.O. Stability of the Hoff's Equations on the Column [Ustoychivost' uravneniy Hoffa na grafe]. *Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta, Ser. fiz.-mat. nauki [The Bulletin of the Samara State Engineering University, Series of Physical and Mathematical Sciences]*, 2010, no. 1(15), pp. 6–15.
12. Sadovnichiy V.A., Dubrovskiy V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F. Calculating of the First Eigenvalues of the Hydrodynamic Stability Problem of Flow of Viscous Fluid Between Two Rotating Cylinders [Vychislenie pervyh sobstvennyh znacheniy zadachi gidrodinamicheskoy ustoychivosti techeniya vyazkoy jidkosti mejdu dvumya vrash'ayush'imisya cilindrami]. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 6, pp. 742–746.
13. Kadchenko S.I. Computing the sums of Rayleigh-Schrodinger series of perturbed self-adjoint operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 9, pp. 1435–1445.
14. Kadchenko S.I., Kinzina I.I. Computation of Eigenvalues of Perturbed Discrete Semibounded Operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 7. pp. 1200–1206.
15. Sadovnichiy V.A., Dubrovskiy V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F. First Eigenvalues of Boundary Problem of Hydrodynamic Stability of Flow of Puazejl in a Round Pipe Calculating [Vychislenie pervyh sobstvennyh chisel kraevoy zadachi gidrodinamicheskoy ustoychivosti techeniya Puazeylya v krugloy trube]. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 50–53.
16. Sadovnichiy V.A. *Teoriya operatorov: ucheb. dlya vuzov s uglublennym izucheniem matematiki* [The Theory of Operator: the Textbook for High Schools with Profound Learning of Mathematics]. Moscow, Drofa, 2004. 384 p.
17. Sadovnichiy V.A., Dubrovskiy V.V. Remark on a New Method of Calculation of Eigenvalues and Eigenfunctions for Discrete Operators [Zamechanie ob odnom novom metode vychisleniya sobstvennyh znacheniy i sobstvennyh funkcyy diskretnyh operatorov]. *J. of Mathematical Sciences*, 1995, vol. 75, no. 3, pp. 244–248.
18. Dubrovskiy V.V., Sedov A.I. An Estimate for the Difference of Spectral Functions of Legendre-type Operators [Otsenka raznosti spektral'nyh funkciy operatorov tipa Lezhandra]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika – J. of Mathematical Sciences*, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 1075–1082.
19. Kadchenko S.I. New Method of Calculation of Eigenvalues of the Spectral Orr-Sommerfeld's Problem [Novyy metod vychisleniya sobstvennyh chisel spektral'noy zadachi Orra – Zommerfel'da]. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy [Electromagnetic Waves and Electronic Systems]*, 2000, vol. 5, no. 6, pp. 4–10.
20. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. The Numerical Method of Finding Eigenvalues of the Discrete Semi Bounded From Below Operator [Chislennyy metod nahozhdeniya sobstvennyh znacheniy diskretnyh poluogranichennyh snizu operatorov]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie» – Bulletin of South Ural State University. Seria «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»*, 2011, no. 17 (234), issue 8. pp. 46–51.
21. Naymark M.A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [The Linear Differential Operator]. Moscow, Nauka, 1969, 528 p.

Поступила в редакцию 6 апреля 2012 г.