УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ СОВМЕСТИМОСТИ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.В. Нещадим

Исследуется система уравнений с, вообще говоря, переменными коэффициентами, описывающая функционально-инвариантные решения волнового уравнения в пространстве $\mathbb{R}^3(t,x,y)$. Хорошо известно, что для единичной матрицы коэффициентов все функционально-инвариантные решения описываются формулой Соболева. В работе доказано, что если решение рассматриваемой системы имеет максимальный произвол (который понимается в смысле теории совместности переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных), то коэффициенты волнового уравнения связаны алгебраическим соотношением второго порядка (гиперболическим или эллиптическим) и, кроме того, дифференциальным соотношением второго порядка. На множестве дифференциальных уравнений естественно действует группа преобразований, индуцированных заменами пространственных переменных. Получена полная классификация рассматриваемых систем относительно этой группы. Доказано, что есть ровно три класса эквивалентности. В работе используются классические методы теории Рикье исследования переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: волновое уравнение, теория совместности, функционально-инвариантные решения.

В работе рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$u_{tt} = A^2 u_{xx} + B^2 u_{yy}, \tag{1}$$

где $u = u(t,x,y)$ — неизвестная функция, $A = A(x,y)$, $B = B(x,y)$ — ненулевые коэффициенты. Предполагается, что все рассматриваемые функции аналитические. Для частных производных используются обозначения вида $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$.

Напомним, что функция $u = u(t,x,y)$ называется функционально-инвариантным решением уравнения (1), если для любой достаточно гладкой функции $F(z)$ одного аргумента функция $F(u)$ также будет решением уравнения (1). Легко понять, что u функционально-инвариантное решение уравнения (1) только, если u решение системы

$$u_{tt} = A^2 u_{xx} + B^2 u_{yy}, \ \ u_t^2 = A^2 u_x^2 + B^2 u_y^2. \tag{2}$$

При $A = B = 1$ общее решение этой системы дается формулой Смирнова-Соболева [1]

$$t\sqrt{a^2 + b^2} + xa + yb = c, \tag{3}$$

где a, b, c — произвольные функции от переменной u.

Приведение системы (2) в инволюцию, при $A = B = 1$, в соответствие с теорией Рикье [2, 3] показывает, что (2) эквивалентна системе

$$u_t = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \ \ u_{xx} = 2\frac{u_x}{u_y}u_{xy} - \frac{u_x^2}{u_y^2}u_{yy}, \tag{4}$$

которая уже находится в инволюции, и решение которой однозначно определяется данными

$$u|_{t=x=0} = \varphi(y),\ u_x|_{t=x=0} = \psi(y), \tag{5}$$

для двух произвольных функций $\varphi(y)$, $\psi(y)$, что соответствует формуле (3).

Широтой (или произволом) решения системы (4) называется наименьший набор данных, по которым однозначно восстанавливается решение (см. [2, 3]). В данном случае это две функции одного аргумента.

Рассмотрим следующую задачу:

Определить коэффициенты $A = A(x,y)$, $B = B(x,y)$ при которых функционально-инвариантные решения уравнения (1) определяются двумя произвольными функциями одного аргумента, т.е. широта решения системы (2) совпадает с широтой решения системы (4).

Отметим, что такая постановка соответствует обратной задаче теории совместности, сформулированной в ([4], с. 24):

≪Какого вида должны быть дифференциальные связи $\Psi_{\alpha\beta}$ и уравнения Φ_μ подсистемы $(S^{'}) \subset (S)$, чтобы переопределенная система имела заданный произвол в своем решении≫.

Имеет место

Теорема 1. *Системы (2) и (4) имеют одинаковую широту решения тогда и только тогда, когда по модулю преобразований*

$$A \longmapsto \alpha A,\ \ B \longmapsto \beta B,\ \ \text{где}\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

справедливо одно из следующих соотношений:

1. $B^2 = A^2$, где $A = \exp\gamma$, $\gamma = \gamma(x,y)$ — некоторое решение уравнения $\gamma_{xx} + \gamma_{yy} = 0$,

2. $B^2 = A^2 + 1$, где $(\ln A^2)_{yy} + (\ln(A^2+1))_{xx} = 0$,

3. $B^2 = 1 - A^2$, где $(\ln A^2)_{yy} = (\ln(1-A^2))_{xx}$.

Доказательство. Пусть $A^2 = B^2$, тогда система (2) принимает вид

$$u_{tt} = A^2(u_{xx} + u_{yy}),\ \ u_t^2 = A^2(u_x^2 + u_y^2). \tag{6}$$

Второе уравнение системы (6) запишем в виде

$$u_t = A\sqrt{u_x^2 + u_y^2}. \tag{7}$$

Из (7) находим u_{tt} и подставляем в первое уравнение системы (6)

$$A\frac{u_x u_{tx} + u_y u_{ty}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} = A^2(u_{xx} + u_{yy}).$$

Производные u_{tx} и u_{ty} заменяем в силу (7)

$$\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\left(A_x\sqrt{u_x^2+u_y^2} + A\frac{u_x u_{xx} + u_y u_{xy}}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\right) +$$

$$\frac{u_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\left(A_y\sqrt{u_x^2+u_y^2} + A\frac{u_x u_{xy} + u_y u_{yy}}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\right) = A(u_{xx} + u_{yy})$$

или

$$u_{xx} = \frac{2u_x}{u_y}u_{xy} - \frac{u_x^2}{u_y^2}u_{yy} + \frac{1}{Au_y^2}(A_x u_x + A_y u_y)(u_x^2 + u_y^2).$$

Таким образом, система (6) эквивалентна системе

$$\begin{cases} u_t = A\sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \\ u_{xx} = \frac{2u_x}{u_y}u_{xy} - \frac{u_x^2}{u_y^2}u_{yy} + \frac{1}{Au_y^2}(A_x u_x + A_y u_y)(u_x^2 + u_y^2). \end{cases} \tag{8}$$

Так как системы (8) и (4) имеют одинаковую широту решения, то система (8) находится в инволюции. Это означает, что соотношение $(u_t)_{xx} = (u_{xx})_t$ для правых частей системы (8) должно выполняется тождественно в силу самой же системы (8). Производя соответствующие вычисления, находим, что это соотношение эквивалентно равенству

$$AA_{xx} + AA_{yy} - A_x^2 - A_y^2 = 0.$$

Положим $A = \exp\gamma$, где $\gamma = \gamma(x, y)$. Тогда это соотношение примет вид

$$\gamma_{xx} + \gamma_{yy} = 0.$$

Рассмотрение случая $A^2 = B^2$ завершено.

Пусть A, B — произвольные. Перепишем второе соотношение системы (2) в виде

$$u_t = \sqrt{A^2 u_x^2 + B^2 u_y^2}. \tag{9}$$

Отсюда найдем u_{tt} и подставим в первое уравнение системы (2)

$$\frac{A^2 u_x u_{tx} + B^2 u_y u_{ty}}{\sqrt{A^2 u_x^2 + B^2 u_y^2}} = A^2(u_{xx} + u_{yy}).$$

Производные u_{tx} и u_{ty} заменяем в силу (9)

$$A^2 u_x \frac{AA_x u_x^2 + A^2 u_x u_{xx} + BB_x u_y^2 + B^2 u_y u_{xy}}{\sqrt{A^2 u_x^2 + B^2 u_y^2}} +$$

$$B^2 u_y \frac{AA_y u_x^2 + A^2 u_x u_{xy} + BB_y u_y^2 + B^2 u_y u_{yy}}{\sqrt{A^2 u_x^2 + B^2 u_y^2}} = A^2(u_{xx} + u_{yy}).$$

или

$$u_{xx} = \frac{2u_x}{u_y}u_{xy} - \frac{u_x^2}{u_y^2}u_{yy} + \frac{u_x}{B^2 u_y^2}(AA_x u_x^2 + BB_x u_y^2) + \frac{1}{B^2 u_y}(AA_y u_x^2 + BB_y u_y^2).$$

Таким образом система (2) эквивалентна системе

$$\begin{cases} u_t &= \sqrt{A^2 u_x^2 + B^2 u_y^2}, \\ u_{xx} &= \frac{2u_x}{u_y}u_{xy} - \frac{u_x^2}{u_y^2}u_{yy} + \frac{u_x}{B^2 u_y^2}(AA_x u_x^2 + BB_x u_y^2) + \frac{1}{B^2 u_y}(AA_y u_x^2 + BB_y u_y^2). \end{cases} \tag{10}$$

Так как системы (10) и (4) имеют одинаковую широту решения, то система (10) находится в инволюции. Это означает, что соотношение $(u_t)_{xx} = (u_{xx})_t$ для правых частей системы (10) должно выполняется тождественно в силу самой же системы (10). Производя соответствующие вычисления, находим, что это соотношение эквивалентно равенству

$$B^3(AB^3B_{yy} - 2A_yB^3B_y + AB^2B_y^2 + A^3BB_{xx} - A^3B_x^2)u_y^4 +$$

$$
\begin{gathered}
2A^2B^4(A_xB_y - A_yB_x)u_y^3u_x + \\
AB(-B^4A_y^2 + AB^4A_{yy} + A^2B^3B_{yy} - 2AB^3A_yB_y + A^3B^3A_{xx} + \\
A^2B^2A_x^2 + A^2B^2B_y^2 - 2A^3BA_xB_x + A^4BB_{xx} - A^4B_x^2)u_x^2u_y^2 + \\
2A^4B^2(A_xB_y - A_yB_x)u_x^3u_y + \\
A^3(AB^3A_{yy} - B^3A_y^2 + A^2BA_x^2 + A^3BA_{xx} - 2A^3A_xB_x)u_x^4 = 0.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Производные u_x, u_y в соотношении (11) надо считать независимыми переменными. Поэтому (11) эквивалентно системе соотношений

$$
\left\{
\begin{array}{l}
AB^3B_{yy} - 2A_yB^3B_y + AB^2B_y^2 + A^3BB_{xx} - A^3B_x^2 = 0, \\
-B^4A_y^2 + AB^4A_{yy} + A^2B^3B_{yy} - 2AB^3A_yB_y + A^3B^3A_{xx} + \\
A^2B^2A_x^2 + A^2B^2B_y^2 - 2A^3BA_xB_x + A^4BB_{xx} - A^4B_x^2 = 0, \\
AB^3A_{yy} - B^3A_y^2 + A^2BA_x^2 + A^3BA_{xx} - 2A^3A_xB_x = 0, \\
A_xB_y - A_yB_x = 0.
\end{array}
\right. \tag{12}
$$

Последнее соотношение означает, что функции A и B функционально-зависимы. Для определенности будем считать, что

$$
B = B(A). \tag{13}
$$

Тогда оставшиеся три соотношения системы (12) примут вид

$$
\left\{
\begin{array}{l}
AB^3(B'' + B'A_{yy}) - 2A_y^2B^3B' + AB^2(B')^2A_y^2 + \\
A^3B(B''A_x^2 + B'A_{xx}) - A^3(B')^2A_x^2 = 0, \\
\\
-B^4A_y^2 + AB^4A_{yy} + A^2B^3(B''A_y^2 + B'A_{yy}) - \\
2AB^3B'A_y^2 + A^3B^3A_{xx} + A^2B^2A_x^2 + A^2B^2(B')^2A_y^2 - \\
2A^3BB'A_x^2 + A^4B(B''A_x^2 + B'A_{xx}) - A^4(B')^2A_x^2 = 0, \\
\\
AB^3A_{yy} - B^3A_y^2 + A^2BA_x^2 + A^3BA_{xx} - 2A^3B'A_x^2 = 0.
\end{array}
\right. \tag{14}
$$

Соотношения системы (14) не являются независимыми. Если первое соотношение домножить на A и вычесть из второго, то получим третье соотношение. Поэтому достаточно рассматривать только первое и третье соотношения. Если третье соотношение домножить на B' и вычесть из первого, то получим

$$
(ABB'' + A(B')^2 - BB')(A^2A_x^2 + B^2A_y^2) = 0.
$$

Так как $A^2A_x^2 + B^2A_y^2 \neq 0$ (иначе A постоянная и в силу (13) B постоянная), то

$$
ABB'' + A(B')^2 - BB' = 0.
$$

Итак, система (14) эквивалентна системе

$$
\left\{
\begin{array}{l}
AB^3A_{yy} - B^3A_y^2 + A^2BA_x^2 + A^3BA_{xx} - 2A^3B'A_x^2 = 0, \\
ABB'' + A(B')^2 - BB' = 0.
\end{array}
\right. \tag{15}
$$

Второе соотношение (15) перепишем в виде

$$
A(BB')' = BB'.
$$

Отсюда
$$B^2 = a_0 A^2 + a_1,$$
где a_0, a_1 — некоторые вещественные числа. Растяжением коэффициентов
$$A \longmapsto \alpha A, \;\; B \longmapsto \beta B, \;\; \text{где } \alpha, \; \beta \in \mathbb{R} \backslash \{0\},$$
(которые индуцированы растяжением переменных t, x, y, u исходной системы (2)) приходим к одному из случаев

1. $B^2 = A^2$,
2. $B^2 = A^2 + 1$,
3. $B^2 = 1 - A^2$.

Случай $B^2 = A^2$ уже рассмотрен.

Пусть $B^2 = A^2 + 1$. Так как $BB' = A$, то первое соотношение (15) примет вид
$$-2A^4 A_x^2 + AB^2(B^2 A_{yy} + A^2 A_{xx}) + B^2(A^2 A_x^2 - B^2 A_y^2) = 0.$$
Подставляем сюда $B^2 = A^2 + 1$
$$-2A^4 A_x^2 + A(A^2+1)^2 A_{yy} + A^3(A^2+1)A_{xx} + A^2(A^2+1)A_x^2 - (A^2+1)^2 A_y^2 = 0.$$
Домножим на A^2 и перепишем в виде
$$-P^2 P_x^2 + P(P+1)^2 P_{yy} - (P+1)^2 P_y^2 + P^2(P+1)P_{xx} = 0,$$
где $P = A^2$. Или
$$P^2(P+1)P_{xx} - P^2 P_x^2 + P(P+1)^2 P_{yy} - (P+1)^2 P_y^2 = 0,$$
$$P^2(P+1)^2 \left(\frac{P_x}{P+1}\right)_x + P^2(P+1)^2 \left(\frac{P_y}{P}\right)_y = 0,$$
$$(\ln(P+1))_{xx} + (\ln(P))_{yy} = 0.$$
Итак, функция A^2 в случае $B^2 = A^2 + 1$ удовлетворяет уравнению
$$(\ln A^2)_{yy} + (\ln(A^2+1))_{xx} = 0.$$

Пусть $B^2 = 1 - A^2$. Так как $BB' = -A$, то первое соотношение (15) примет вид
$$2A^4 A_x^2 + AB^2(B^2 A_{yy} + A^2 A_{xx}) + B^2(A^2 A_x^2 - B^2 A_y^2) = 0.$$
Подставляем сюда $B^2 = 1 - A^2$
$$2A^4 A_x^2 + A(1-A^2)^2 A_{yy} + A^3(1-A^2)A_{xx} + A^2(1-A^2)A_x^2 - (1-A^2)^2 A_y^2 = 0.$$
Домножим на A^2 и перепишем в виде
$$P^2 P_x^2 + P(1-P)^2 P_{yy} - (1-P)^2 P_y^2 + P^2(1-P)P_{xx} = 0,$$
где $P = A^2$. Или
$$(1-P)^2(PP_{yy} - P_y^2) + P^2((1-P)P_{xx} + P_x^2) = 0,$$
$$P^2(1-P)^2 \left(\frac{P_x}{1-P}\right)_x + P^2(1-P)^2 \left(\frac{P_y}{P}\right)_y = 0,$$
$$(\ln(1-P))_{xx} - (\ln(P))_{yy} = 0.$$
Итак, функция A^2 в случае $B^2 = 1 - A^2$ удовлетворяет уравнению
$$(\ln A^2)_{yy} = (\ln(1-A^2))_{xx}.$$

□

Далее рассмотрим вопрос о существовании замены переменных вида

$$t = t, \ \ \widetilde{x} = \varphi(x, y), \ \ \widetilde{y} = \psi(x, y), \tag{16}$$

которая бы приводила систему

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \ \ u_t^2 = u_x^2 + u_y^2, \tag{17}$$

к виду

$$u_{tt} = A^2 u_{\widetilde{x}\widetilde{x}} + B^2 u_{\widetilde{y}\widetilde{y}}, \ \ u_t^2 = A^2 u_{\widetilde{x}}^2 + B^2 u_{\widetilde{y}}^2 \tag{18}$$

в каждом из трех случаев указанных в теореме.

1-й случай. $B^2 = A^2$, где $A = \exp\gamma$, $\gamma = \gamma(x, y)$ — некоторое решение уравнения $\gamma_{xx} + \gamma_{yy} = 0$. Покажем, что существует замена переменных вида (16), причем (φ, ψ) — пара гармонически сопряженных функций.

Итак, пусть функции $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши – Римана

$$\varphi_x = \psi_y, \ \ \varphi_y + \psi_x = 0. \tag{19}$$

Тогда замена (16) приводит систему (17) к виду

$$u_{tt} = (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)(u_{\widetilde{x}\widetilde{x}} + u_{\widetilde{y}\widetilde{y}}), \ \ u_t^2 = (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)(u_{\widetilde{x}}^2 + u_{\widetilde{y}}^2),$$

т.е. $A^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$. Исключая ψ из (19), получим систему уравнений

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = A^2, \ \ \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

на функцию φ, причем функцию A надо считать заданной. Перепишем эту систему в виде

$$\varphi_x = \sqrt{A^2 - \varphi_y^2}, \ \ \varphi_{xx} = -\varphi_{yy} \tag{20}$$

составим соотношение $(\varphi_x)_x = \varphi_{xx}$ и преобразуем его в силу самой системы (20). После несложных вычислений получим

$$\varphi_x = \sqrt{A^2 - \varphi_y^2}, \ \ \varphi_{yy} = \frac{A_y}{A}\varphi_y - \frac{A_x}{A}\sqrt{A^2 - \varphi_y^2}, \tag{21}$$

Условие совместности $(\varphi_x)_{yy} = (\varphi_{yy})_x$ после преобразований в силу (21) принимает вид

$$(\ln A)_{xx} + (\ln A)_{yy} = 0.$$

Итак, существует замена вида (16), где (φ, ψ) — гармонически сопряженная пара функций, преобразующая (17) в (18), где $A^2 = B^2$.

Замечание 1. Ясно, что существует аналог формулы Соболева – Смирнова (3) для функционально-инвариантных решений уравнения (1) при $B^2 = A^2$.

2-й случай. Пусть $B^2 = 1 \pm A^2$. Замена переменных (16) преобразует систему (17) к виду

$$u_{tt} = |\nabla\varphi|^2 u_{\widetilde{x}\widetilde{x}} + 2 < \nabla\varphi, \nabla\psi > u_{\widetilde{x}\widetilde{y}} + |\nabla\psi|^2 u_{\widetilde{y}\widetilde{y}} + \triangle\varphi u_{\widetilde{x}} + \triangle\psi u_{\widetilde{y}},$$

$$u_t^2 = |\nabla\varphi|^2 u_{\widetilde{x}}^2 + 2 < \nabla\varphi, \nabla\psi > u_{\widetilde{x}} u_{\widetilde{y}} + |\nabla\psi|^2 u_{\widetilde{y}}^2.$$

Здесь использованы стандартные обозначения: $\nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$, $\triangle\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$, $|\nabla\varphi|^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$, $< \nabla\varphi, \nabla\psi >= \varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y$.

Предположим, что полученная система имеет вид (18), т.е.

$$|\nabla\varphi|^2 = A^2,\ \ <\nabla\varphi, \nabla\psi> = 0,\ \ |\nabla\psi|^2 = B^2,\ \ \triangle\varphi = \triangle\psi = 0$$

или, разрешив относительно производных,

$$\begin{array}{l} \psi_x = \frac{A}{B}\varphi_y,\ \ \psi_y = -\frac{B}{A}\sqrt{A^2-\varphi_y^2},\ \ \psi_{xx} = -\psi_{yy}, \\ \varphi_x = \sqrt{A^2-\varphi_y^2},\ \ \varphi_{xx} = -\varphi_{yy}. \end{array} \tag{22}$$

(Выбор знаков в правых частях системы (22) связан с наличием преобразований $\varphi \mapsto -\varphi$, $\psi \mapsto -\psi$, $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$.) Последние два соотношения заменим на эквивалентные

$$\varphi_x = \sqrt{A^2-\varphi_y^2},\ \ \varphi_{yy} = \frac{A_y}{A}\varphi_y - \frac{A_x}{A}\sqrt{A^2-\varphi_y^2}.$$

Из первых двух соотношений (22) находим

$$\begin{array}{l} \psi_{xx} = \frac{B_xA-BA_x}{A^2}\varphi_y + \frac{BA_y}{\sqrt{A^2-\varphi_y^2}} - \frac{B\varphi_y\varphi_{yy}}{A\sqrt{A^2-\varphi_y^2}}, \\ \psi_{yy} = \frac{BA_y-B_yA}{A^2}\sqrt{A^2-\varphi_y^2} - \frac{BA_y}{\sqrt{A^2-\varphi_y^2}} + \frac{B\varphi_y\varphi_{yy}}{A\sqrt{A^2-\varphi_y^2}} \end{array}$$

и подставляем в третье соотношение. Получим

$$(B_xA - BA_x)\varphi_y + (BA_y - B_yA)\sqrt{A^2-\varphi_y^2} = 0. \tag{23}$$

Пусть $B^2 + A^2 = 1$. Введем функцию $\theta = \theta(x, y)$ так, что

$$B = \cos\theta,\quad A = \sin\theta.$$

Тогда из (23)

$$\varphi_y = \frac{\theta_y\sin\theta}{\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}}.$$

Итак, исходная система (22) может быть переписана в эквивалентном виде

$$\begin{array}{l} \psi_x = \frac{\theta_y\cos\theta}{\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}},\ \ \psi_y = -\frac{\theta_x\cos\theta}{\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}}, \\ \varphi_x = \frac{\theta_x\sin\theta}{\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}},\ \ \varphi_y = \frac{\theta_y\sin\theta}{\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}},\ \ \varphi_{yy} = \frac{\theta_y^2-\theta_x^2}{\sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2}}\sin\theta. \end{array} \tag{24}$$

Из последних двух соотношений, составив равенство $(\varphi_y)_y = \varphi_{yy}$, найдем, что

$$(\theta_x\theta_{yy} - \theta_y\theta_{xy})\sin\theta + \theta_x(\theta_x^2+\theta_y^2)\cos\theta = 0.$$

Из соотношений $\psi_{xy} = \psi_{yx}$, $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$ найдем, что

$$(\theta_y(\theta_y\theta_{xx} - \theta_x\theta_{xy}) + \theta_x(\theta_x\theta_{yy} - \theta_y\theta_{xy}))\cos\theta = (\theta_x^2+\theta_y^2)^2\sin\theta,$$

$$\theta_x(\theta_y\theta_{xx} - \theta_x\theta_{xy}) = \theta_y(\theta_x\theta_{yy} - \theta_y\theta_{xy}).$$

Введем обозначение $P = \frac{\theta_x}{\theta_y}$. Тогда три дополнительных соотношения перепишутся в виде

$$PP_x + P_y = 0,\ \ P_x - PP_y = (P^2+1)^2\theta_y\mathrm{tg}\theta,\ \ P_y = P(P^2+1)\theta_y\mathrm{ctg}\theta.$$

Из первых двух соотношений системы находим $P_y = -P(P^2+1)\theta_y \mathrm{tg}\theta$ и подставляем в третье соотношение. Получаем, что $\mathrm{tg}^2\theta = -1$. Противоречие.

Аналогично рассматривается случай $B^2 - A^2 = 1$.

Итак, не существует замены переменных (16), которая бы приводила систему (17) к виду (18) при $B^2 \pm A^2 = 1$.

В связи с этим можно поставить следующий

Вопрос. Существует ли аналог формулы Соболева – Смирнова (3) для функционально-инвариантных решений уравнения (1) при $B^2 \pm A^2 = 1$?

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (проект 44 – 2012) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг. (государственный контракт №16.740.11.0127).

Список литературы

1. Соболев, С.Л. Функционально-инварианатные решения волнового уравнения / С.Л. Соболев // Труды физ.-мат. ин-та им. Стеклова В.А. – 1934. – Т. 5. – С. 259–264.
2. Поммаре, Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли / Ж. Поммаре. – М.: Мир, 1983.
3. Фиников, С.П. Метод внешних форм Картана / С.П. Фиников. – М.; Л.: ГИИТЛ, 1948.
4. Сидоров, А.Ф. Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике / А.Ф. Сидоров, В.П. Шапеев, Н.Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1984.

Михаил Владимирович Нещадим, кандидат физико-математических наук, доцент, лаборатория «Обратные задачи математической физики», Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), neshch@math.nsc.ru.

MSC 35N10

Inverse Problem of the Theory of Compatibility and Functional-Invariant Solutions Wave Equation in Two-Dimensional Space

M.V. Neshchadim, Sobolev's Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russian Federation)

We investigated the system of equations with variable coefficients, which describe functional-invariant solutions of wave equation in space $\mathbb{R}^3(t, x, y)$. It is well known that in the case of identity matrix of coefficients we can describe all functional-invariant solutions by Sobolev formula. In this paper we prove that if solutions of considered systems have maximal arbitrariness (in the sense of the theory of compatibility overdetermined systems of differential equations in partial derivatives) then coefficients of the wave equation are connected by algebraic relation of the second order (hyperbolic or elliptic type) and in addition by differential relation of the second order. Group of transformations induced by change of space variables acts on the all set of differential equations naturally. We obtain complete classification of the considered systems with respect to this group. More precisely, we prove that there are exactly three classes of equivalence. In this paper we use classical methods Requier theory of investigation of overdetermined systems of differential equations in partial derivatives.

Keywords: Wave equation, theory of compatibility, functional-invariant solutions.

References

1. Sobolev S.L. Functionally invariant solutions to the wave equations [Functsional'no invariantnye resheniya volnovogo uravneniya]. *Trudy Math. Inst. Steklov.* 1934, vol. 5, pp. 259–264.
2. Pommaret J.F. *Systems of Partial Differential equations and Lie Pseudogroups.* Gordon and Breach, N.Y., 1978. 398 p.
3. Finikov S.P. *Metod vneshnih form Kartana* [The Method of Cartan's Exterior Forms]. Moscow-Leningrad, Gostehizdat, 1948. 432 p.
4. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. *Metod differentsialnyh svyazei i ego prilozhenie v gazovoi dinamike* [The Method of Differential Relations and its Applications in Gas Dynamics]. Novosibirsk, Izdatel'stvo Nauka, 1984. 272 p.

Поступила в редакцию 17 июля 2012 г.