УДК 517.946

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Н.Р. Пинигина

Целью работы является доказательство существования и единственности регулярных решений первой краевой задачи для систем уравнений соболевского типа с эллиптико-параболическими операторами с пространственным вырождением. А.И. Кожановым были рассмотрены начально-краевые задачи для уравнений соболевского типа с эллиптико-параболическими операторами второго порядка, действующими по пространственным переменным. В его работах были доказаны существование решения при выполнении условий «характеристической выпуклости» границы области относительно пространственных операторов. Техника, используемая в настоящей работе, будет близка к технике работ вышеуказанного автора. Для исследования вырождающихся систем уравнений соболевского типа используется также сочетание метода регуляризации и метода априорных оценок. С помощью метода регуляризации строится семейство приближенных решений вырождающихся уравнений. Анализ интегральных неравенств, при получении априорных оценок, основан на интегрировании по частям, применении неравенств Коши – Буняковского и Гельдера и неравенства Юнга. Также применяются свойства весовых соболевских пространств.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение соболевского типа, регулярные решения, априорные оценки.

Рассмотрим уравнение

$$\lambda A D_t^{2m+1} u(x,t) + (-1)^m B u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $m \geq 0$ – целое, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ — комплексное число, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$.

Оператор A эллиптико-параболический второго порядка вида

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u, \quad a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \ \ x \in \bar{\Omega}, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

оператор B эллиптический такого же вида

$$\begin{gathered} Bu = \tfrac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b_0(x)u, \\ b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_0 \mid \xi \mid^2, \ \ m_0 > 0, \ \ x \in \bar{\Omega}, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{3}$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до n).

В случае эллиптико-параболического оператора A подобные уравнения рассматривались в работах А.И. Кожанова [1–5] с действительнозначной функцией $f(x,t)$; техника, используемая в настоящей работе, будет близка к технике вышеуказанных работ.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, ..., x_n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, $Q = \Omega \times (0,T)$ – цилиндрическая область, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0,T)$. Функция $f(x,t)$ имеет вид $f(x,t) = f_1(x,t) + if_2(x,t)$. Функции $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$, $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,...,n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$ действительнозначные, заданные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Будем считать выполненными условия

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \ \ b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \ \ x \in \bar{\Omega}, \ \ i,j = 1,...,n. \tag{4}$$

Первая краевая задача: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,t)\mid_S = 0, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} u(x,0) = D_t u(x,0) = ... = D_t^m u(x,0) = 0, \\ u(x,T) = D_t u(x,T) = ... = D_t^{m-1} u(x,T) = 0 \quad x \in \Omega. \end{gathered} \tag{6}$$

Уравнение (1) можно свести к системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 A D_t^{2m+1} u_1(x,t) - \lambda_2 A D_t^{2m+1} u_2(x,t) + (-1)^m B u_1(x,t) = f_1(x,t), \\ \lambda_2 A D_t^{2m+1} u_1(x,t) + \lambda_1 A D_t^{2m+1} u_2(x,t) + (-1)^m B u_2(x,t) = f_2(x,t), \end{array} \right. \tag{7}$$

и именно эта система в дальнейшем будет анализироваться.

Через V_0 будем обозначать анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|v\|_{V_0} = \left(\int_Q (|v|^2 + |v_t|^2 + |D_t^{2m+1} v|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |D_t^{2m+1} v_{x_i x_j}|^2) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ниже через $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ будем обозначать вектор внутренней нормали к границе Γ в текущей точке x.

Теорема 1. *Пусть для операторов A и B выполнены указанные выше условия (2)–(4). Кроме того, пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} f_s(x,t) \in L_2(Q),\;\; D_t f_s(x,t) \in L_2(Q), ..., D_t^{4m+2} f_s(x,t) \in L_2(Q), \\ f_{s x_i} \in L_2(Q),\;\; D_t f_{s x_i}(x,t) \in L_2(Q), ..., D_t^{4m+2} f_{s x_i} \in L_2(Q); \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} f_s(x,0) = D_t f_s(x,0) = ... = D_t^{4m} f_s(x,0) = 0, \\ f_s(x,T) = D_t f_s(x,T) = ... = D_t^{4m-1} f_s(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad s = 1,2. \end{gathered} \tag{9}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \mid \lambda \mid > 0, \tag{10}$$

$$\exists\ \alpha^i(x) : \alpha^i \geq 0, \quad C_1 \alpha^i(x) \xi_i^2 \leq a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq C_2 \alpha^i(x) \xi_i^2,\;\; C_1 > 0,\;\; x \in \bar{\Omega},\;\; \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{11}$$

$$|a^{ij}_{x_k}(x)| \leq M \sqrt{\alpha^i(x)},\;\; x \in \bar{\Omega},\;\; i,j,k = 1,...,n; \tag{12}$$

$$a^{ij}(x) \nu_i \nu_j = 0 \quad \forall x \in \Gamma; \tag{13}$$

$$a_0(x) \leq -\bar{a}_0 < 0,\;\; b_0(x) \leq -\bar{b}_0 < 0 \;\; \forall x \in \bar{\Omega}; \tag{14}$$

$$a^{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega}),\;\; b^{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega}),\;\; a_0(x) \in C(\bar{\Omega}),\;\; b_0(x) \in C(\bar{\Omega}). \tag{15}$$

Тогда существует решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (5), (6) и принадлежащее пространству V_0.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации. Пусть ε есть положительное число, $a^{ij}_\varepsilon(x)$, $i,j = 1,...,n$, есть функции

$$a^{ij}_\varepsilon(x) = a^{ij}(x) + \varepsilon b^{ij}(x),$$

$A_0, B_0, A_{0\varepsilon}$ и A_ε есть операторы задаваемые равенствами

$$A_0 u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x) u_{x_j}), \qquad B_0 u = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x) u_{x_j}),$$

$$A_{0\varepsilon} u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}_\varepsilon(x) u_{x_j}), \qquad A_\varepsilon u = A_{0\varepsilon} u + a_0(x) u.$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 A_\varepsilon D_t^{2m+1} u_1(x,t) - \lambda_2 A_\varepsilon D_t^{2m+1} u_2(x,t) + (-1)^m B u_1(x,t) = f_1(x,t) \\ \lambda_2 A_\varepsilon D_t^{2m+1} u_1(x,t) + \lambda_1 A_\varepsilon D_t^{2m+1} u_2(x,t) + (-1)^m B u_2(x,t) = f_2(x,t), \end{cases} \tag{7_ε}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u_1(x,t)\mid_S = 0, \quad u_2(x,t)\mid_S = 0, \\ u_s(x,0) = D_t u_s(x,0) = ... = D_t^m u_s(x,0) = 0, \\ u_s(x,T) = D_t u_s(x,T) = ... = D_t^{m-1} u_s(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \ \ s = 1,2. \end{gathered} \tag{16}$$

Система (7_ε), регуляризирующая систему (7), является системой псевдопараболических уравнений. Поскольку оператор $A_{0\varepsilon}$ – эллиптический, то эта система разрешима в пространстве V_0 – см. [6]; более того, эту систему можно дифференцировать по переменной t столько раз, сколько позволяет правая часть (вновь см. [6]).

Возникающие ниже постоянные $K_r, r = \overline{1,11}$, будут определяться коэффициентами операторов A и B, функциями $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$, а также числом T и числами $\lambda_i, \ i = 1,2$.

Покажем, что для краевой задачи (7_ε), (16) имеют место «хорошие» априорные оценки. Умножим первое уравнение (7_ε) на $(-1)^m(T-t)[\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2]$, второе — на $(-1)^m(T-t)[\lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2]$ и сложим. Интегрируя в получаемом равенстве по частям, используя условия теоремы, неравенство Юнга, получаем первую априорную оценку

$$\begin{gathered} \int_0^T\int_\Omega a_\varepsilon^{ij}\left[D_t^m u_{1x_i} D_t^m u_{1x_j} + D_t^m u_{2x_i} D_t^m u_{2x_j}\right] dxdt + \\ + \int_0^T\int_\Omega \left[u_1^2 + u_2^2\right] dxdt + \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\sum_{i=1}^n \int_0^T\int_\Omega (T-t)\left[u_{1x_i}^2 + u_{2x_i}^2\right] dxdt \le K_1. \end{gathered} \tag{17}$$

На следующем шаге $2m+1$ раз продифференцируем систему уравнений (7_ε) по переменной t. Заметим, что вследствие условий (9) и (10) для функций $D_t^{2m+1}u_1$, $D_t^{2m+1}u_2$ будут выполняться условия (16). Умножим первое уравнение на $(-1)^m(T-t)[\lambda_1 D_t^{2m+1}u_1 - \lambda_2 D_t^{2m+1}u_2]$, второе уравнение на $(-1)^m(T-t)[\lambda_2 D_t^{2m+1}u_1 + \lambda_1 D_t^{2m+1}u_2]$ и сложим. Полученное равенство также интегрируем по области Q. Выкладки, аналогичные тем, которые привели к неравенству (17), дают вторую априорную оценку

$$\begin{gathered} \int_0^T\int_\Omega a_\varepsilon^{ij}\left[D_t^{3m+1} u_{1x_i} D_t^{3m+1} u_{1x_j} + D_t^{3m+1} u_{2x_i} D_t^{3m+1} u_{2x_j}\right] dxdt + \\ + \int_0^T\int_\Omega \left[(D_t^{2m+1}u_1)^2 + (D_t^{2m+1}u_2)^2\right] dxdt + \\ + \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\sum_{i=1}^n \int_0^T\int_\Omega (T-t)\left[(D_t^{2m+1}u_{1x_i})^2 + (D_t^{2m+1}u_{2x_i})^2\right] dxdt \le K_2. \end{gathered} \tag{18}$$

Для получения третьей априорной оценки первое из уравнений системы (7_ε) умножим на $(-1)^m(T-t)[\lambda_1 B_0 u_1 - \lambda_2 B_0 u_2]$, а второе – на $(-1)^m(T-t)[\lambda_2 B_0 u_1 + \lambda_1 B_0 u_2]$, и сложим. Также интегрируя по частям как в левой, так и в правой части полученного равенства, применяя неравенство Юнга, нетрудно перейти к неравенству

$$\begin{gathered} \int_0^T\int_\Omega a^{ij} b^{kl}\left[D_t^m u_{1x_j x_k} D_t^m u_{1x_l x_i} + D_t^m u_{2x_j x_k} D_t^m u_{2x_l x_i}\right] dxdt \\ + \varepsilon\int_0^T\int_\Omega \left[(B_0 D_t^m u_1)^2 + (B_0 D_t^m u_2)^2\right] dx + \\ + \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\int_0^T\int_\Omega (T-t)\left[(B_0 u_1)^2 + (B_0 u_2)^2\right] dxdt \le K_5 + |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_\Gamma|, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$I_1=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega a^{ij}_{x_k}(x)b^{kl}(x)\left(D_t^m u_{1x_j}D_t^m u_{1x_ix_l}+D_t^m u_{2x_j}D_t^m u_{2x_ix_l}\right)dxdt,$$
$$I_2=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega a^{ij}(x)b^{kl}_{x_i}(x)\left(D_t^m u_{1x_l}D_t^m u_{1x_kx_j}+D_t^m u_{2x_l}D_t^m u_{2x_kx_j}\right)dxdt,$$
$$I_3=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega a^{ij}_{x_k}(x)b^{kl}_{x_i}(x)\left(D_t^m u_{1x_j}D_t^m u_{1x_l}+D_t^m u_{2x_j}D_t^m u_{2x_l}\right)dxdt,$$
$$I_\Gamma=\int\limits_0^T\int\limits_\Gamma\Big[a^{ij}(x)D_t^m u_{1x_j}\nu_i\tfrac{\partial}{\partial x_k}\left(b^{kl}(x)D_t^m u_{1x_l}\right)-a^{ij}(x)D_t^m u_{1x_j}\tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{kl}(x)D_t^m u_{1x_l}\right)\nu_k+$$
$$+a^{ij}(x)D_t^m u_{2x_j}\nu_i\tfrac{\partial}{\partial x_k}\left(b^{kl}(x)D_t^m u_{2x_l}\right)-a^{ij}(x)D_t^m u_{2x_j}\tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{kl}(x)D_t^m u_{2x_l}\right)\nu_k\Big]dSdt.$$

Поскольку $u(x,t)=0$ при $x\in\Gamma$, то $D_tu(x,t)=...=D_t^mu(x,t)=0$ и, далее, $D_t^mu_{x_j}\nu_k=D_t^mu_{x_k}\nu_j$ (в силу обращения в нуль касательной производной). Отсюда и из условия (13) граничный интеграл в (19) будет равен нулю. Проанализируем слагаемые $|I_1|,|I_2|,|I_3|$ правой части неравенства (19). Для $|I_1|$ условие (12) и оценка (17) дают оценку

$$|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega a^{ij}_{x_k}(x)b^{kl}(x)D_t^m u_{1x_ix_l}D_t^m u_{1x_j}dxdt|\le M\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sqrt{\alpha^i(x)}|D_t^m u_{1x_ix_l}||b^{kl}(x)||D_t^m u_{1x_j}|dxdt\le$$
$$\le\tfrac{\delta^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\alpha^i(x)(D_t^m u_{1x_ix_l})^2dxdt+\tfrac{M^2}{2\delta^2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(b^{kl}(x))^2(D_t^m u_{1x_j})^2dxdt.$$

Также будет и для слагаемых с функцией $u_2(x,t)$.

Во втором интеграле, вследствие неравенства Коши – Буняковского и условия (11), будет

$$|I_2|\le K_6\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left(a^{ij}(x)D_t^m u_{1x_ix_k}D_t^m u_{1x_jx_k}\right)^{\frac12}\left(a^{ij}(x)D_t^m u_{1x_l}D_t^m u_{1x_l}\right)^{\frac12}dxdt\le$$
$$\le\tfrac{\delta^2C_2}{2}\sum_{k=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\alpha^i(x)(D_t^m u_{1x_ix_k})^2dxdt+\tfrac{C_2^2}{2\delta^2}\sum_{l=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(D_t^m u_{1x_l})^2dxdt,$$

аналогично для интеграла с функцией $u_2(x,t)$ (здесь и ранее δ – произвольное положительное число). Далее, $|I_3|$ есть конечные величины — в силу оценок (17) и (18). Суммируя, получаем неравенство

$$|I_1|+|I_2|+|I_3|\le\delta_1\sum_{l=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\alpha^i(x)\left((D_t^m u_{1x_ix_l})^2+(D_t^m u_{2x_ix_l})^2\right)dxdt+C,\qquad(20)$$

в котором δ_1 есть произвольное положительное число, число же C определяется числом δ_1 и коэффициентами $a^{ij}(x),b^{ij}(x),a_0(x),b_0(x)$. Учитывая (20), из неравенства (19) получаем оценку

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\alpha^i(x)\left[(D_t^m u_{1x_ix_k})^2+(D_t^m u_{2x_ix_k})^2\right]dxdt+\\+\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left[(B_0D_t^m u_1)^2+(B_0D_t^m u_2)^2\right]dxdt+\\+\tfrac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(T-t)\left[(B_0u_1)^2+(B_0u_2)^2\right]dxdt\le K_7.\end{gathered}\qquad(21)$$

Далее, $2m+1$ раз дифференцируем уравнения системы (7_ε) по переменной t. Умножим первое уравнение на $(-1)^m(T-t)[\lambda_1 B_0 D_t^{2m+1}u_1 - \lambda_2 B_0 D_t^{2m+1}u_2]$, а второе – на $(-1)^m(T-t)[\lambda_2 B_0 D_t^{2m+1}u_1 + \lambda_1 B_0 D_t^{2m+1}u_2]$, сложим и проинтегрируем. Сделав выкладки, аналогичные тем, которые привели к оценке (21), получим следующую оценку

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \alpha^i(x)\left[\left(D_t^{3m+1}u_{1x_ix_k}\right)^2+\left(D_t^{3m+1}u_{2x_ix_k}\right)^2\right]dxdt+\\ +\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left[\left(B_0D_t^{3m+1}u_1\right)^2+\left(B_0D_t^{3m+1}u_2\right)^2\right]dxdt+\\ +\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left[\left(B_0D_t^{2m+1}u_1\right)^2+\left(B_0D_t^{2m+1}u_2\right)^2\right]dxdt\le K_8.\end{gathered}\tag{22}$$

Умножим первое уравнение системы на $(-1)^m[\lambda_1 A_0u_1-\lambda_2A_0u_2]$, а второе – на $(-1)^m[\lambda_2A_0u_1+\lambda_1A_0u_2]$ и сложим

$$\begin{gathered}(-1)^m(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\left(A_\varepsilon D_t^{2m+1}u_1A_0u_1+A_\varepsilon D_t^{2m+1}u_2A_0u_2\right)+\lambda_1\left(Bu_1A_0u_1+Bu_2A_0u_2\right)=\\ =(-1)^m\left[\lambda_1f_1A_0u_1-\lambda_2f_1A_0u_2+\lambda_2f_2A_0u_1+\lambda_1f_2A_0u_2\right].\end{gathered}$$

Интегрируя это равенство по частям, получим неравенство

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left[(A_{0\varepsilon}D_t^mu_1)^2+(A_{0\varepsilon}D_t^mu_2)^2\right]dxdt+\\ +\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left[a^{ij}b^{kl}\left(u_{1x_lx_i}u_{1x_jx_k}+u_{2x_lx_i}u_{2x_jx_k}\right)\right]dxdt\le\\ \le 2|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega a^{ij}_{x_k}(x)b^{kl}(x)D_t^mu_{1x_j}D_t^mu_{2x_ix_l}dxd\tau|+2|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega a^{ij}(x)b^{kl}_{x_i}(x)D_t^mu_{1x_jx_k}D_t^mu_{2x_l}dxd\tau|+\\ +|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega a^{ij}_{x_k}(x)b^{kl}_{x_i}(x)D_t^mu_{2x_j}D_t^mu_{1x_l}dxd\tau|+|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega a^{ij}_{x_k}(x)b^{kl}_{x_i}(x)D_t^mu_{1x_j}D_t^mu_{2x_l}dxd\tau|+\\ +|\int\limits_0^T\int\limits_\Gamma\Big[a^{ij}(x)D_t^mu_{1x_j}\nu_i\tfrac{\partial}{\partial x_k}\left(b^{kl}(x)D_t^mu_{2x_l}\right)-a^{ij}(x)D_t^mu_{1x_j}\tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{kl}(x)D_t^mu_{2x_l}\right)\nu_k+\\ +a^{ij}(x)D_t^mu_{2x_j}\nu_i\tfrac{\partial}{\partial x_k}\left(b^{kl}(x)D_t^mu_{1x_l}\right)-a^{ij}(x)D_t^mu_{2x_j}\tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{kl}(x)D_t^mu_{1x_l}\right)\nu_k\Big]dSd\tau|+K_9.\end{gathered}\tag{23}$$

Первый интеграл в правой части (23) будет оцениваться с помощью неравенства Юнга, условия (12) и оценок (17), (21). Второй интеграл оценивается также неравенством Юнга, оценками (17), (21) и условием (11). Третий и четвертый интегралы – конечены в силу оценки (17). Граничные интегралы также будут равны нулю, в силу условий (13) и (15). Получим следующую оценку

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left[(A_{0\varepsilon}D_t^mu_1)^2dx+(A_{0\varepsilon}D_t^mu_2)^2\right]dxdt\le K_{10}.\tag{24}$$

Оценка (24) означает, что

$$\begin{gathered}A_0D_t^mu_1+\varepsilon B_0D_t^mu_1=\varphi_1(x,t)\in L_2(Q),\\ A_0D_t^mu_2+\varepsilon B_0D_t^mu_2=\varphi_2(x,t)\in L_2(Q).\end{gathered}\tag{25}$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left((A_0D_t^mu_1A_0D_t^mu_1+A_0D_t^mu_2A_0D_t^mu_2)+\varepsilon(B_0D_t^mu_1A_0D_t^mu_1+B_0D_t^mu_2A_0D_t^mu_2)\right)dxdt=\\ =\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(\varphi_1(x,t)A_0D_t^mu_1+\varphi_2(x,t)A_0D_t^mu_2)dxdt.\end{gathered}$$

Повторяя для интеграла

$$\varepsilon \int_0^T \int_\Omega (B_0 D_t^m u_1 A_0 D_t^m u_1 + B_0 D_t^m u_2 A_0 D_t^m u_2) dxdt$$

все выкладки, которые делались при анализе аналогичных интегралов правой части неравенства (19), получим, что следствием включений (25) и условий теоремы будут включения

$$A_0 D_t^m u_1 \in L_2(Q), \qquad A_0 D_t^m u_2 \in L_2(Q).$$

Далее, $2m+1$ раз дифференцируем уравнения системы (7_ε) по t. Умножим первое уравнение системы на $(-1)^m[\lambda_1 A_{0\varepsilon} D_t^{2m+1} u_1 - \lambda_2 A_{0\varepsilon} D_t^{2m+1} u_2]$, а второе уравнение на $(-1)^m[\lambda_2 A_{0\varepsilon} D_t^{2m+1} u_1 + \lambda_1 A_{0\varepsilon} D_t^{2m+1} u_2]$ и сложим.

Повторяя все выкладки, которые делались при анализе неравенства (19), придем к оценке

$$\int_0^T \int_\Omega \left[(A_{0\varepsilon} D_t^{3m+1} u_1)^2 + (A_{0\varepsilon} D_t^{3m+1} u_2)^2 \right] dxdt \le K_{11}. \tag{26}$$

Оценка (26) означает справедливость включений

$$\begin{array}{ll} A_0 D_t^{3m+1} u_1 + \varepsilon B_0 D_t^{3m+1} u_1 \in L_2(Q), & A_0 D_t^{3m+1} u_1 \in L_2(Q), \\ A_0 D_t^{3m+1} u_2 + \varepsilon B_0 D_t^{3m+1} u_2 \in L_2(Q), & A_0 D_t^{3m+1} u_2 \in L_2(Q). \end{array}$$

Заметим, что из этих включений и оценок (17), (18), (21), (22) следуют включения $B_0 D_t^m u_1 \in L_2(Q)$, $B_0 D_t^m u_2 \in L_2(Q)$. Повторяя рассуждения [7], касающиеся второго основного неравенства для эллиптических операторов, получим, что для функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ выполняется $u_1(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_2(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$.

Продифференцируем уравнения системы (7_ε) $4m+2$ раза по переменной t и умножим первое уравнение системы на $(-1)^m[\lambda_1 A_{0\varepsilon} D_t^{4m+2} u_1 - \lambda_2 A_{0\varepsilon} D_t^{4m+2} u_2]$, а второе уравнение на $(-1)^m[\lambda_2 A_{0\varepsilon} D_t^{4m+2} u_1 + \lambda_1 A_{0\varepsilon} D_t^{4m+2} u_2]$. Анализируя полученное равенство тем же образом, каким анализировалось равенство (19), получим включения

$$\begin{array}{ll} A_0 D_t^{5m+2} u_1 + \varepsilon B_0 D_t^{5m+2} u_1 \in L_2(Q), & A_0 D_t^{5m+2} u_1 \in L_2(Q), \\ A_0 D_t^{5m+2} u_2 + \varepsilon B_0 D_t^{5m+2} u_2 \in L_2(Q), & A_0 D_t^{5m+2} u_2 \in L_2(Q). \end{array}$$

Отсюда получаем $B_0 D_t^{2m+1} u_1 \in L_2(Q)$, $B_0 D_t^{2m+1} u_2 \in L_2(Q)$. Следовательно, $D_t^{2m+1} u_1 \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$, $D_t^{2m+1} u_2 \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$. Переходя к пределу по параметру регуляризации (см., например, [2, 3]), получим, что краевая задача (7_ε)–(16) имеет решение, для которого выполняются оценки (17), (18), (21), (22) с $\varepsilon = 0$. А это и означает существование требуемого решения системы (7) и далее — уравнения (1). □

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (8)-(12), (14), (15) теоремы 1 и пусть существует такое* $\alpha_0 > 0$, *что*

$$\alpha^i(x) \ge \alpha_0 > 0 \qquad \forall x \in \Gamma, \quad i = 1, ..., n. \tag{27}$$

Тогда существует решение $u(x,t)$ *уравнения (1) такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $D_t^{2m+1} u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$ *и удовлетворяющее условиям (5)–(6).*

Доказательство. Пусть функция $\psi(x)$ есть функция из класса $C^2(\bar\Omega)$ такая, что $\psi(x) \geq \psi_0 > 0$ при $x \in \Omega_\rho$, $\psi(x) \geq 0$ при $x \in \Omega_{2\rho}$, $\psi(x) \equiv 0$ при $x \in \Omega \setminus \Omega_{2\rho}$. Здесь $\Omega_\rho = \{x \in \Omega : 0 < d(x, \Gamma) < \rho\}$, $\Omega_{2\rho} = \{x \in \Omega : \ 0 < d(x, \Gamma) < 2\rho\}$, ρ — положительное число, величину которого определим позже.

Положим

$$v_1(x,t) = \psi(x)u_1(x,t), \quad v_2(x,t) = \psi(x)u_2(x,t).$$

В области $\Omega_{2\rho}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 A_\varepsilon D_t^{2m+1} v_{1x_ix_j} - \lambda_2 A_\varepsilon D_t^{2m+1} v_{2x_ix_j} + (-1)^m B D_t^{2m+1} v_{1x_ix_j} = \psi f_1 + \\
&+\lambda_1 [a^{ij}_{\varepsilon x_j} D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_1 + a^{ij}_\varepsilon D_t^m \psi_{x_ix_j} D_t^m u_1 + 2a^{ij}_\varepsilon D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_{1x_j}] - \\
&-\lambda_2 [a^{ij}_{\varepsilon x_j} D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_2 + a^{ij}_\varepsilon D_t^m \psi_{x_ix_j} D_t^m u_2 + 2a^{ij}_\varepsilon D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_{2x_j}] + \\
&+(-1)^m [b^{ij}_{x_j} D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_1 + b^{ij} D_t^m \psi_{x_ix_j} D_t^m u_1 + 2b^{ij} D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_{1x_j}],
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_2 A_\varepsilon D_t^{2m+1} v_{1x_ix_j} + \lambda_1 A_\varepsilon D_t^{2m+1} v_{2x_ix_j} + (-1)^m B D_t^{2m+1} v_{2x_ix_j} = \psi f_2 + \\
&+\lambda_2 [a^{ij}_{\varepsilon x_j} D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_1 + a^{ij}_\varepsilon D_t^m \psi_{x_ix_j} D_t^m u_1 + 2a^{ij}_\varepsilon D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_{1x_j}] + \\
&+\lambda_1 [a^{ij}_{\varepsilon x_j} D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_2 + a^{ij}_\varepsilon D_t^m \psi_{x_ix_j} D_t^m u_2 + 2a^{ij}_\varepsilon D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_{2x_j}] + \\
&+(-1)^m [b^{ij}_{x_j} D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_2 + b^{ij} D_t^m \psi_{x_ix_j} D_t^m u_2 + 2b^{ij} D_t^m \psi_{x_i} D_t^m u_{2x_j}].
\end{aligned} \tag{29}$$

Обозначим правые части равенств (28) и (29) как $F_1(x,t)$ и $F_2(x,t)$ соответственно. Заметим, что вследствие оценок (17) — (22) выполняются включения $F_1(x,t) \in L_2(Q)$, $F_2(x,t) \in L_2(Q)$. Пусть число ρ настолько мало, что в $\overline{\Omega}_{2\rho}$ выполняется

$$\alpha^i(x) \geq \frac{\alpha_0}{2} > 0$$

(вследствие гладкости функций $\alpha^i(x)$, компактности Γ и условия (27) такое ρ существует). Тогда оператор A в $\overline{\Omega}_{2\rho}$ будет равномерно эллиптическим. Второе основное неравенство для эллиптических операторов и оценки (17) — (22) означают, что выполняются неравенства

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (D_t^m v_{1x_ix_j}(x,T))^2\,dx \leq M_1\varepsilon \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (D_t^m v_{1x_ix_j}(x,T))^2\,dx + M_2 \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_{2x_ix_j}(x,T)\,dx + M_3,$$

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (D_t^m v_{2x_ix_j}(x,T))^2\,dx \leq M_1\varepsilon \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (D_t^m v_{2x_ix_j}(x,T))^2\,dx + M_2 \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_{1x_ix_j}(x,T)\,dx + M_3,$$

в которых числа $M_1 - M_3$ определяются лишь коэффициентами операторов A и B, а также областью Ω. Складывая эти неравенства, учитывая, что число ε может изначально считаться сколь угодно малым, используя далее представления

$$D_t^m v_{1x_ix_j}(x,T) = \int_0^T D_t^m v_{1x_ix_j}(x,t)\,dt, \quad D_t^m v_{2x_ix_j}(x,T) = \int_0^T D_t^m v_{2x_ix_j}(x,t)\,dt,$$

и, наконец, применяя неравенство Гельдера, получим априорную оценку

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_{2\rho}} [(D_t^m v_{1x_ix_j}(x,T))^2 + (D_t^m v_{2x_ix_j}(x,T))^2]\,dx \leq M_4. \tag{30}$$

Из оценки (30) равенств

$$\psi D_t^{2m+1} u_{1x_ix_j} = D_t^{2m+1} v_{1x_ix_j} - \psi_{x_i} D_t^{2m+1} u_{1x_j} - \psi_{x_j} D_t^{2m+1} u_{1x_i} - \psi_{x_ix_j} D_t^{2m+1} u_1,$$

$$\psi D_t^{2m+1}u_{2x_ix_j}=D_t^{2m+1}v_{2x_ix_j}-\psi_{x_i}D_t^{2m+1}u_{2x_j}-\psi_{x_j}D_t^{2m+1}u_{2x_i}-\psi_{x_ix_j}D_t^{2m+1}u_2,$$

оценок (17) — (19) и из строгой положительности функции $\psi(x)$ в Ω_ρ следует, что выполняется оценка

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega_\rho}[D_t^{2m+1}u^2_{1x_ix_j}(x,t)+D_t^{2m+1}u^2_{2x_ix_j}(x,t)]\,dx\le M_5. \tag{31}$$

Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(x)\in C^2(\overline{\Omega})$, $\varphi(x)=0$ для $x\in\Gamma$ и $\varphi(x)>0$ для $x\in\Omega$, $|\varphi_{x_i}(x)|\le K\sqrt{\varphi(x)}$ для $x\in\overline{\Omega}$, $i=1,\dots,n$. Умножим первое уравнение системы на $(-1)^m\varphi(x)[\lambda_1B_0u_1-\lambda_2B_0u_2]$, а второе – на $(-1)^m\varphi(x)[\lambda_2B_0u_1+\lambda_1B_0u_2]$, проинтегрируем как по временной переменной, так и по области Ω, и сложим. Получим следующее равенство

$$\frac12\int\limits_\Omega\varphi(x)\left[(A_\varepsilon u_1)^2+(A_\varepsilon u_2)^2\right]\,dx=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\varphi[A_{0\varepsilon}u_2\cdot B_0u_1-A_{0\varepsilon}u_1\cdot B_0u_2]\,dx\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\varphi[a_0u_2Bu_1-a_0u_1Bu_2]\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\varphi[f_2A_\varepsilon u_2-f_1A_\varepsilon u_1]\,dx\,d\tau. \tag{32}$$

В этом равенстве второй интеграл правой части представляет собой конечную величину — это легко показать, если проинтегрировать по переменной x_i по частям и воспользоваться оценками (17) – (19). Далее, в первом интеграле правой части (32) после перехода к формально сопряженным операторам, т.е. после интегрирования по частям, с использованием свойств функции $\varphi(x)$, вновь получим конечную величину. Оценивая теперь последний интеграл правой части (32) с помощью неравенства Юнга, получим оценку

$$\int\limits_\Omega\varphi(x)\left[(A_\varepsilon D_t^m u_1(x,t))^2+(A_\varepsilon D_t^m u_2(x,t))^2\right]\le M_6. \tag{33}$$

$2m+1$ раз продифференцируем систему уравнений (7_ε) по переменной t и повторим выкладки, которые привели к оценке (33), но, умножив первое уравнение на $(-1)^{m+1}\varphi(x)[\lambda_1B_0D_t^{2m+1}u_1(x,t)-\lambda_2B_0D_t^{2m+1}u_2(x,t)]$, и второе – на $(-1)^{m+1}\varphi(x)[\lambda_2B_0D_t^{2m+1}u_1(x,t)+\lambda_1B_0D_t^{2m+1}u_2(x,t)]$, получим оценку

$$\int\limits_\Omega\varphi(x)\left\{[A_\varepsilon D_t^{3m+1}u_1(x,t)]^2+[A_\varepsilon D_t^{3m+1}u_2(x,t)]^2\right\}\,dx\le M_7. \tag{34}$$

В оценках (30), (31), (33) и (34) числа M_4–M_7 определяются лишь коэффициентами операторов A и B, а также областью Ω и числами T, λ_1, λ_2.

Из оценки (34) следует, что при почти всех t из $(0,T)$ имеют место включения

$$\sqrt{\varphi(x)}BD_t^m u_1(x,t)\in L_2(\Omega),\quad \sqrt{\varphi(x)}BD_t^m u_2(x,t)\in L_2(\Omega).$$

Из этих включений и оценки (31) следуют включения

$$BD_t^m u_1(x,t)\in L_2(\Omega),\quad BD_t^m u_2(x,t)\in L_2(\Omega);$$

поскольку же оператор B эллиптичен, то эти включения означают, что

$$u_1(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)),\quad u_2(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)),$$

причем нормы функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ в пространстве $L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$ ограничены равномерно по параметру ε.

Повторяя все выкладки, которые привели к оценкам (31) и (34), но для $4m+1$ раз продифференцированной по t системы (7_ε), получим включения

$$D_t^{2m+1}u_1(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)), \quad D_t^{2m+1}u_2(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)),$$

причем нормы функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ в пространстве $L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$ ограничены равномерно по параметру ε.

Из доказанного следует, что в системе (7_ε) можно перейти к пределу по параметру ε при $\varepsilon \to 0$ [1, 2]; предельные функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ будут представлять собой решение системы (7), принадлежащее требуемому в теореме классу. А это и означает существование требуемого решения уравнения (1). $\square$

Замечание 1. Если $\lambda_2 = 0$, то система (7) распадается на два независимых (одинаковых по структуре) уравнения. Для таких уравнений разрешимость первой краевой задачи, в близкой к настоящей работе ситуации, рассматривалась в [5] (более точно, в [5] установлена разрешимость первой краевой задачи в весовых пространствах).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект №4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

Литература

1. Кожанов, А.И. О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений / А.И. Кожанов // Докл.РАН. – 1992. – Т. 236, № 5. – С. 781–786.

2. Kozhanov, A.I. Certain classes of degenerate Sobolev–Galpern equation / A.I. Kozhanov // Siberian Adv. Math. – 1994. – Vol. 4, № 1. – P. 65–94.

3. Кожанов, А.И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешенных относительно старшей производной / А.И. Кожанов // Сиб. мат. журн. – 1994. – Т. 35, № 2. – С. 359–376.

4. Kozhanov, A.I. Composite Type Equation and Inverse Problem / A.I. Kozhanov. – Utrecht, the Netherlands: VSP, 1999.

5. Кожанов, А.И. Существование «почти регулярных» решений граничной задачи для одного класса линейных соболевских уравнений нечетного порядка / А.И. Кожанов // Мат. заметки ЯГУ. – 1997. – Т. 4, № 1. – С. 29–37.

6. Якубов, С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, 1985. – 220 с.

7. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973.

Нюргуяна Романовна Пинигина, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Высшей математики», Северо-Восточный федеральный университет (г. Якутск, Российская Федерация), n-pinig@mail.ru.

MSC 35M12

Solvability of Boundary Value Problems for Degenerate Equations of Sobolev Type

N.R. Pinigina, North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov (Yakutsk, Russian Federation)

The aim of this work is to prove the existence and uniqueness of regular solutions of the first boundary value problem for the systems of Sobolev type equations with elliptic-parabolic operators with spatial degeneracy. By A.I. Kozhanov considered the initial-boundary value problems for Sobolev type equations with elliptic-parabolic operators of the second order acting on the space variables. The existence of solutions under the conditions «characteristic bulge» of the border area with respect to the spatial operators have been proved in the works. The technique used in this paper will be close to the technique of above author. For the study of degenerate systems of Sobolev type equations used the combination of the regularization method and the method of a priori estimates. It is constructed a family of approximate solutions of degenerate equations by the regularization method. Analysis of integral inequalities in obtaining of priori estimates, based on the integration by parts and in using of Cauchy – Bunyakovskii, Hölder's and Young's inequalities. The properties of weighted Sobolev spaces also ate used.

Keywords: the boundary value problem, the Sobolev type equation, regular solutions, a priori estimates.

References

1. Kozhanov A.I. On Properties of Solutions for a Class of Pseudo-parabolic Equations [O svoystvakh resheniy psevdoparabolicheskikh uravneniy]. *Dokl. RSA* [Reports of the Academy of Sciences of the Russia], 1992, vol. 236, no. 5, pp. 781–786.
2. Kozhanov A.I. Certain Classes of Degenerate Sobolev–Galpern Equation. *Siberian Adv. Math.* 1994, vol. 4, no. 1, pp. 65–94.
3. Kozhanov A.I. Boundary Value Problems for Some Classes of Higher-order Equations That Are Unsolved With Respect to the Highest Derivative [O kraevykh zadachakh dlya nekotorykh klassov uravneniy vysokogo poryadka, nerazreshchennykh otnositelno starshey proizvodnoy]. *Sib. Math. Jour* [Sibirskiy Matematicheskiy jurnal], 1994, vol. 35, no. 2, pp. 359–376.
4. Kozhanov, A.I. *Composite Type Equation and Inverse Problem.* Utrecht, the Netherlands, VSP, 1999.
5. Kozhanov A.I. The Existence of an «Almost Regular» Solutions of the Boundary Problem for a Class of Linear Sobolev Equations of the Odd Order [Sushchestvovanie «pochti regulyarnykh» resheniy granichnoy zadachi dlya odnogo klassa lineynykh sobolevskikh uravneniy nechetnogo poryadka]. *Mathematical notes YSU* [Matematicheskie zametki YaGU] 1997, vol. 4, no. 1, pp. 29–37.
6. Yakubov S.Ya. *Lineynye differentsialno-operatornye uravneniya i ikh prilojeniya* [Linear Differential-operator Equations and Their Applications]. Baku, Elm, 1985. 220 p.
7. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type]. Moskow, Nauka, 1973.

Поступила в редакцию 2 сентября 2012 г.