УДК 517.958:539.4

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ НА НАКЛОННОЙ КОНТАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ДИСКРЕТНО-НЕОДНОРОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В.Л. Дильман, А.И. Носачева

Формулируется задача линейного сопряжения для напряжений на контактной поверхности для дискретно-неоднородного тела. В случае плоской контактной поверхности эта задача решается численно и аналитически. На этой основе проводится численный анализ напряжений на наклонной контактной поверхности в соединении из двух различных по прочности частей при плоской деформации.

Ключевые слова: плоская деформация, неоднородное соединение, задача сопряжения для напряжений.

Задача линейного сопряжения для напряжений на границе между пластическими средами с различными параметрами текучести впервые была поставлена и в некоторых частных случаях решена в работах [1–8], в которых рассматривался случай, когда контактная поверхность плоская и расположена ортогонально направлению внешней нагрузки. В работах [1–4] эта задача исследовалась при плоском деформированном состоянии. Осесимметричная задача линейного сопряжения для напряжений решалась для неоднородного сплошного стержня в работах [2, 3, 5–8]. Решения задачи сопряжения для напряжений получены в работах [1–4] в аналитической форме. Первые попытки рассмотреть существенно более сложный случай, когда контактная поверхность наклонена к направлению внешней нагрузки, сделаны в работе [9]. В основе метода решения задачи сопряжения для напряжений является вычисление напряжений на контактной границе через их значения на свободной границе на основе использования инвариантов Римана вдоль характеристик. Это позволяет уравнения равновесия на контактной поверхности представить как систему трансцендентных (не дифференциальных) уравнений, решение которой может быть численным или приближенным аналитическим. Цель работы – решение задачи сопряжения для наклонной контактной поверхности в случае плоской деформации и, на этой основе, исследование влияния наклона контактной поверхности на напряженное состояние материала соединения при плоской деформации. Напряженное состояние пластического участка при плоской деформации определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \qquad (2)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \qquad (3)$$

Эта система имеет гиперболический тип. Ее инварианты Римана вдоль характеристик (уравнения Генки) известны: $\sigma \pm 2k\gamma = c$, где γ – угол наклона характеристик (рис. 1) к оси Ox, c – постоянная вдоль характеристики (знак плюс – для семейства характеристик

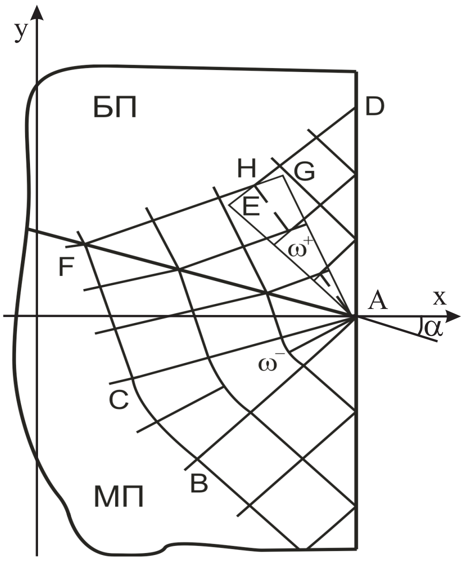

Рис. 1. Фрагмент неоднородного соединения с наклонной контактной границей FA и характеристики системы уравнений пластического равновесия (линии скольжения). МП и БП – менее прочный и более прочный участки соединения

с острым углом γ). Уравнения равновесия на контактной границе имеют вид: $\sigma^+_{y'} = \sigma^-_{y'}$, $\tau^+_{x'y'} = \tau^-_{x'y'}$, где оси координат (x', y') направлены вдоль и ортогонально линии FA (рис. 1).

Пусть $k^{\pm}$ – пластические постоянные, соответствующие различным по прочности частям соединения, $K = k^+/k^-$. В безразмерных неизвестных уравнения равновесия на контактной границе (условия сопряжения) имеют вид:

$$\widetilde{\sigma}^+_{y'} = K\widetilde{\sigma}^-_{y'}; \quad \widetilde{\tau}^+_{x'y'} = K\widetilde{\tau}^-_{x'y'}, \tag{4}$$

где тильда указывает на отсутствие размерности данной величины. Задача сопряжения для напряжений на контактной границе формулируется так: найти напряжения $\widetilde{\sigma}^+_{y'} = K\widetilde{\sigma}^-_{y'}$ и $\widetilde{\tau}^+_{x'y'} = K\widetilde{\tau}^-_{x'y'}$ на контактной границе, используя условия сопряжения (4) и граничные условия на свободной границе. Будем предполагать граничные условия однородными: на свободной поверхности пусть $\widetilde{\sigma}_y = 0$; $\widetilde{\tau}_{xy} = 0$. Используя эти условия и известную методику [2, 3], основанную на уравнениях Генки, можно записать систему (1) – (3) в виде:

$$1 + 2\omega^- + \cos(2\omega^- + 2\alpha) = K(1 - 2\omega^+ + \cos(2\omega^+ + 2\alpha)); \tag{5}$$

$$\sin(2\omega^- + 2\alpha) = K\sin(2\omega^+ + 2\alpha); \tag{6}$$

здесь α – угол наклона контактной поверхности к оси Ox.

Лемма 1. *При* $K \in [1; +\infty)$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$ *система* (5), (6) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Якобиан системы (5), (6) имеет вид $J = 16K\cos(\omega^- - \omega^+)\sin(\frac{\pi}{4} + \omega^+ + \alpha)\sin(\omega^- + \alpha - \frac{\pi}{4})$, который не равен нулю при соответствующих значениях α. Действительно, существование области $AFHD$ (см. рис. 1) равносильно тому, что $\omega^- + \alpha < \frac{\pi}{4}$, откуда следует, что последний сомножитель якобиана не равен нулю. По теореме о неявной функции система (5), (6) в окрестности любого значения K имеет единственное решение. Соображения компактности приводят к единственности решения для каждого α на промежутке $K \in [1; +\infty)$. □

Решение системы (5), (6) разложением в степенной ряд по параметру $\lambda = K - 1$ приводит к сложным выражениям:

$$\omega^- = \Sigma\omega^-_k\lambda^k, \quad \omega^+ = \Sigma\omega^+_k\lambda^k; \tag{7}$$

$$\omega^- = \frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{4\cos 2\alpha}\lambda + \frac{1}{8}(\frac{1}{\cos 2\alpha} + 1)\frac{\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\lambda^2 + ...; \tag{8}$$

$$\omega^+ = \frac{1+\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{4\cos 2\alpha}\lambda + [\frac{1}{4}\operatorname{tg} 2\alpha - \frac{1}{8}(1+\frac{1}{\cos 2\alpha})(\frac{1}{\cos^2 2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} + 1)]\lambda^2 + ... \qquad (9)$$

При малых α выражения (7) – (9) можно упростить, сохранив достаточно высокую точность. В общем случае можно получить численное решение, используя итерационную процедуру, основанную на системе (5), (6):

$$(2-2\sin\alpha)\omega^{-(n+1)} + K(2+2\sin\alpha)\omega^{+(n+1)} =$$

$$= K + K\cos 2\omega^{+(n)}\cos 2\alpha - K\sin 2\alpha(\sin 2\omega^{+(n)} -$$

$$2\omega^{+(n)}) - 1 - K\cos 2\omega^{-(n)}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha(\sin 2\omega^{-(n)} - 2\omega^{-(n)}); \qquad (10)$$

$$2\omega^{-(n+1)}\cos 2\alpha - 2K\omega^{+(n+1)}\cos 2\alpha = K\cos 2\alpha(\sin 2\omega^{+(n)} - 2\omega^{+(n)}) +$$

$$+K\cos 2\omega^{+(n)}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha(2\omega^{-(n)} - \sin 2\omega^{-(n)}) - \sin 2\alpha\cos 2\omega^{-(n)}. \qquad (11)$$

Последовательность значений $(\omega^{-(n)}, \omega^{+(n)})$, полученных по формулам (10), (11) из начального вектора $(0;0)$, при точности 0,0001 стабилизируется уже на четвертом шаге. На рис. 2 показана зависимость от K и от α критических значений углов $\omega^{\pm}$ и напряжений.

Литература

1. Дильман, В.Л. Об одной математической модели напряженного состояния пластического слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестн. ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – № 6 (46), вып. 6. – С. 19–23.
2. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.
3. Дильман, В.Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Вестн. ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – № 17 (150), вып. 3. – С. 36–58.
4. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 2. – С. 89–102.
5. Дильман, В.Л. О некоторых математических моделях напряженного состояния пластической среды при осесимметричной деформации / В.Л. Дильман // Вестн. ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – № 2 (42), вып. 5. – С. 20–25.
6. Дильман, В.Л. Прочность механически неоднородных соединений стержней арматуры / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин, Т.В. Ерошкина // Вестн. машиностроения. – 2008. – № 9. – С. 13–17.
7. Ерошкина, Т.В. Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне / Т.В. Ерошкина, В.Л. Дильман // Изв. ВУЗов. Математика. – 2011. – № 11. – С. 1–11.
8. Дильман, В.Л. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестн. ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – № 37 (170), вып. 4. – С. 65–77.

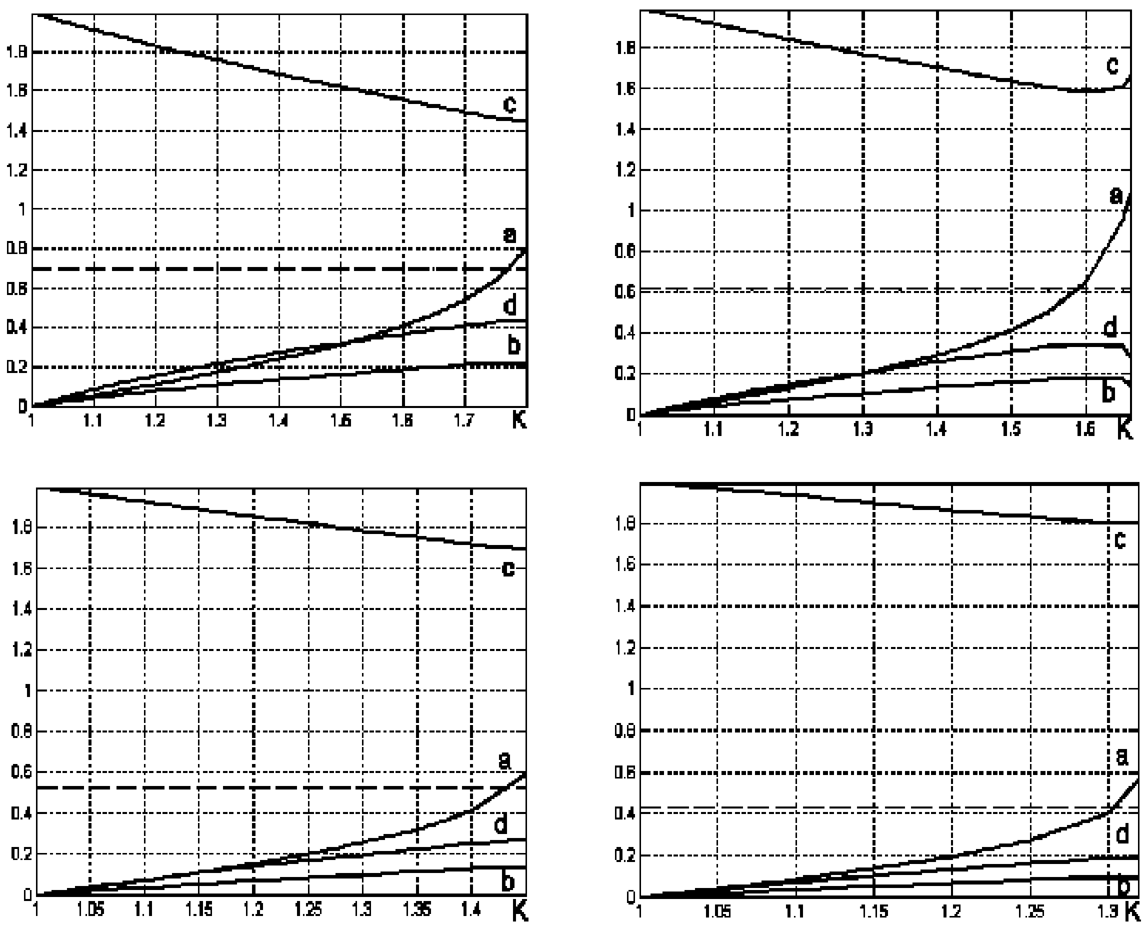

Рис. 2. Зависимость напряжений на контактной поверхности от коэффициента K. Горизонтальная пунктирная прямая - угол $\frac{\pi}{4}$, ω^{-} – линия (a), ω^{+} – линия (b), σ_y – линия (c), τ_{xy} – линия (d). Угол α принимает значения: 1) 5^0; 2) 10^0; 3) 15^0; 4) 20^0

9. Дильман, В.Л. Особенности напряженного состояния неоднородной полосы с наклонной контактной границей / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Дифференциальные уравнения и их приложения: тр. всерос. науч. конф. с междунар. участием (27–30 июня 2011 г., г. Стерлитамак). – Уфа: Гилем, 2011. – С. 303–305.

Дильман Валерий Лейзерович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), dilman49@mail.ru.

Носачева Алия Исламовна, ассистент, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация).

MSC 35L72, 74C05

The Numerical Analysis of Tensions on the Inclined Contact Surface at Stretching of Discrete-Heterogeneous Solid

V.L. Dilman, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)***,***
A.I. Nosacheva, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

The problem of linear coupling for tensions on a contact surface for the discrete-heterogeneous solid is formulated. In the case of a plane contact surface this problem is solved by numerical and analytic methods. On this basis the numerical analysis of tensions on an inclined contact surface in connection from two various parts on durability at flat deformation is carried out.

Keywords: flat deformation, heterogeneous connection, problem of interface for tensions.

References

1. Dilman V.L., Eroshkina T.V. Mathematical Model of Stress the State of the Plastic Layer in Plane Strain. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematika, fizika, himiya≫*, 2005, vol. 6, no. 6(46), pp. 19–23. (in Russian)
2. Dilman V.L. *Mathematical Models of the Stress State Inhomogeneous Thin Cylindrical Shells.* Chelyabinsk, Izdatel'stvo Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta, 2007. 202 p. (in Russian)
3. Dilman V.L. Research of the Mathematical Models of the Stress Condition of the Thin-Walled Heterogeneous Cylindrical Shells Based on Analytical Methods. *Bulletin of South Ural State University. Seria ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2009, issue 3, no. 17(150), pp. 36–58.(in Russian)
4. Dilman V.L. Stress and Strength of the Inhomogeneous Plastic Strip with a Defect in a Stronger Part. *Izvestiya RAN. MTT*, 2010, no. 2, pp. 89–102. (in Russian)
5. Dilman V.L. On Some Mathematical Models of Stress State of Plastic Medium in Axisymmetric Strain. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematika, fizika, himiya≫*, 2005, vol. 5, no. 2 (42), pp. 20–25. (in Russian)
6. Dilman V.L., Ostsemin A.A., Eroshkina T.V. Mechanical Strength of Heterogeneous Connections Rebar. *Russian Engineering Research*, 2008, no. 9, pp. 13–17. (in Russian)
7. Eroshkina T.V., Dilman V.L. Mathematical Modeling of the Stress State of a Transverse Plastic Layer in a Round Rod. *Russian Mathematics,* 2011, vol. 55, no. 11, pp. 9–17. (in Russian)
8. Dilman V.L., Eroshkina T.V. Research of Mathematical Models of the Stress Condition of a Non-Homogeneous Cross Layer in a Round Rod. *Bulletin of South Ural State University. Seria ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2009, issue 4, no. 37 (170), pp. 65–77. (in Russian)
9. Dilman V.L., Nosacheva A.I. Features of the Stress State of the Inhomogeneous Strip with Oblique Contact Boundary. *Differencial'nie uravneniya i ih prilozheniya: Trudi vserossijskoj nauchnoj konferencii s mezhdunarodnim uchastiem (27–30 iunya 2011 g., g. Sterlitamak)* [Differential equations and their applications. Proceedings of the Scientific Conference with international participation (27–30 June 2011, Sterlitamak)]. Ufa, Gilem, 2011. pp. 303–305. (in Russian)

Поступила в редакцию 11 сентября 2012 г.