УДК 519.833

ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО ПАРЕТО РАВНОВЕСИЕ В ДУОПОЛИИ ХОТЕЛЛИНГА НА ПЛОСКОСТИ

К.Н. Кудрявцев, И.С. Стабулит

Исследуется дуополия Хотеллинга при неопределенности. На единичном квадрате с манхэтеннским расстоянием расположены две фирмы, которые объявляют цены на товар. Одновременно с этим, на предлагаемый фирмами товар вводится акциз, величина которого заранее не известна и представляет собой нестохастическую неопределенность. Одна из фирм увеличивает стоимость товара на величину акциза, а другая - не изменяет. Покупатели делают выбор фирмы, сравнивая затраты на ее посещение, которые представляют собой сумму цены и расстояния. Находится гарантированное по Парето равновесие.

Ключевые слова: дуополия, гарантированное равновесие, игра при неопределенности.

Введение

Модель ценообразования в дуополии, учитывающая пространственное расположение фирм, была впервые рассмотрена Гарольдом Хотеллингом в 1929 г. В работе [1] он предположил, что покупатель, выбирая где купить требуемый товар, будет учитывать не только цену, но и «транспортную доступность» места продажи. Так человек, отдыхающий на пляже, представляющем собой длинную прямую полосу на берегу моря, выбирая к какому из киосков с мороженым отправиться, ориентируется не только на цену, но и на расстояние, которое придется пройти. Достаточно большое количество публикаций посвящено исследованию дуополии Хотеллинга с точки зрения теории игр. Так, в работах [2–4] исследуется формирование равновесных цен, [5–8] посвящены вопросам оптимального пространственного расположения фирм. В данной работе исследуется вариант задачи ценообразования при наличии нестохастической неопределенности. Формализация равновесия основывается на предложенном в [9] «аналоге векторного максимина».

1. Город Хотеллинга и подакцизный товар

В данной работе рассматривается рынок (обычно называемый *городом Хотеллинга* на плоскости), представляющий собой единичный квадрат

$$\mathrm{D} = \left\{ (x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \right\},$$

на котором с равной плотностью расположены покупатели. В городе применяется манхэттенское расстояние, а именно, расстояние между двумя точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) представляет собой сумму модулей разностей их координат

$$\rho = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

На рынке действуют две фирмы I и II (называемые далее игроками), предлагающие покупателям один и тот же товар. Продавцы расположены в точках A и B с координатами $(x_1, 0)$ и (x_2) соответственно, при этом считаем $x_1 < x_2$.

Фирмы объявляют цену p_1 и p_2 на свой товар. После этого каждый из покупателей, находящийся в точке (x, y), сравнивает свои затраты на посещение каждого из продавцов, складывающиеся из стоимости товара p_i и затрат на дорогу $|x - x_i| + |y - 0|$ $(i = 1, 2)$. Эти затраты будут иметь вид $L_i^*(x, y) = p_i + |x - x_i| + |y - 0|$ $(i = 1, 2)$. Покупатель выбирает для посещения ту фирму, затраты на посещение которой меньше. В этом случае все покупатели разобьются на два множества – тех, кто предпочитает фирму I и II, соответственно.

На предлагаемый компаниями товар планируется введение акциза. *Ставка акциза* игрокам не известна, можно лишь считать, что это некоторая нестохастическая положительная неопределенность $z > 0$.

Хотя игроки не имеют никакой информации о вводимом налоге, однако они определились с отношением к нему. Так, фирма I пусть планирует «переложить налог на потребителя», просто добавив его к цене p_1, которую объявляет на свой товар. Таким образом, окончательная цена товара составит $p_1 + z$.

Фирма II решает платить акциз «из собственной прибыли», сохраняя установленную ей цену p_2. При этом после продажи единицы товара и удержания налога, она получит лишь $p_2 - z$.

Сам процесс игры протекает следующим образом. Игроки самостоятельно, не вступая в переговоры, определяют свои цены p_1 и p_2 на продаваемый товар. Одновременно с этим, городские власти объявляют размер вводимой в городе ставки акциза $z > 0$ на предлагаемый продавцами товар. Узнав о размере введенного налога, продавец I устанавливает окончательную цену своего товара в размере $p_1 + z$, а продавец под номером II сохраняет цену на уровне p_2.

После этого каждый из покупателей, находящийся в точке (x, y), сравнивает свои затраты на посещение фирм $L_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$, которые представляют собой сумму цены товара и стоимости доставки, равной расстоянию до продавца. Таким образом, затраты на посещение первой фирмы составят

$$L_1(x, y) = p_1 + z + |x - x_1| + |y|\,,$$

а на посещение второй

$$L_2(x) = p_2 + |x - x_2| + |y|\,.$$

Покупатель приобретает тот товар, затраты на который ниже. Территория же города разобьется на два множества

$$\mathrm{D}_1 = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant x^*,\ -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right\}$$

и

$$\mathrm{D}_2 = \left\{(x, y) \mid x^* \leqslant x \leqslant 1,\ -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right\}$$

тех, кто предпочитает фирму I и II, соответственно. Граница множеств — прямая $x = x^*$, определяемая из равенства затрат $L_1(x^*, y) = L_2(x^*, y)$ $\forall y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, имеет вид

$$x^* \;=\; \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2} - \frac{z}{2}.$$

Прибыль первого игрока при этом составит

$$f_1(p_1, p_2, z) = p_1 x^* = p_1 \left[\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2} - \frac{z}{2}\right],$$

прибыль второго –

$$f_2(p_1, p_2, z) = (p_2 - z)(1 - x^*) = (p_2 - z)\left[1 - \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{2} + \frac{z}{2}\right].$$

Следуя предложенному Ю.Б. Гермейером принципу гарантированного результата, при формализации игры в качестве функций выигрыша i-го игрока будем рассматривать $\Phi_i(p_1, p_2, z) = f_i(p_1, p_2, z) + \frac{z^2}{2}$ $(i = 1, 2)$, а именно

$$\begin{array}{l} \Phi_1(p_1, p_2, z) = p_1 \left[\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{p_2-p_1}{2} - \frac{z}{2}\right] + \frac{z^2}{2}, \\ \Phi_2(p_1, p_2, y) = (p_2 - z)\left[1 - \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{p_2-p_1}{2} + \frac{z}{2}\right] + \frac{z^2}{2}. \end{array} \quad (1)$$

Здесь слагаемое $\frac{z^2}{2}$ добавлено в функции выигрыша для того, чтобы увеличивая выигрыши, игроки вынуждены были максимально «усиливать»противодействие неопределенности.

Моделью изложенного выше конфликта будет бескоалиционная игра при неопределенности

$$\langle \{1, 2\}, \{\mathrm{X}_i = (0, +\infty)\}_{i=1,2}, \mathrm{Z} = (0, +\infty), \{\Phi_i(p_1, p_2, z) \div (1)\}_{i=1,2}\rangle. \quad (2)$$

Здесь 1 и 2 — порядковые номера игроков – продавцов, стратегиями которых является формирование цены $p_i \in \mathrm{X}_i = (0, +\infty)$ $(i = 1, 2)$. $\mathrm{Z} = (0, +\infty)$ — множество неопределенностей z, функции выигрыша игроков $\Phi_i(p_1, p_2, z)$ $(i = 1, 2)$ определены в (1). Игра (2) протекает следующим образом. Игроки независимо друг от друга объявляют цены p_i $(i = 1, 2)$, в результате чего складывается ситуация $p = (p_1, p_2) \in \mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$. Одновременно с этим и независимо от действий игроков руководство города объявляет ставку акциза z — реализацию неопределенности из множества Z. В результате образуется пара (p, z). На множестве всех таких пар $\mathrm{X}\times\mathrm{Z}$ определена функция выигрыша i-го игрока $\Phi_i(p_1, p_2, z)$ $(i = 1, 2)$. Значение функции $\Phi_i(p_1, p_2, z)$ на реализовавшейся паре (p, z) есть выигрыш игрока i, а значение $f_i(p_1, p_2, z)$, соответственно его прибыль.

Следуя предложенному в [10] подходу, введем следующие два определения.

Определение 1. *Гарантированным по Парето равновесием (ГПР) игры (2) назовем тройку $(p^e, \Phi_1^e, \Phi_2^e)$, для которой существует функция $z_P(p) : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ такая, что*

во-первых, функция $z_P(p)$ является минимальной по Парето неопределенностью в двухкритериальной задаче

$$\langle\, \mathrm{Z}, \{\Phi_i(p, z)\}\, \rangle,$$

полученной из (2) при каждой фиксированной ситуации $p = (p_1, p_2) \in \mathrm{X}$;

во-вторых, ситуация $p^e = (p_1^e, p_2^e)$ является равновесной по Нэшу в игре без неопределенностей

$$\langle\, \{1, 2\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2}, \{\Phi_i(p, z_P(p))\}_{i=1,2}\, \rangle,$$

полученной при подстановке в игру (2) вместо неопределенности z ее реализации $z_P(p)$.

При этом $p^e = (p_1^e, p_2^e)$ назовем Парето-гарантирующей ситуацией, а $\Phi^e = (\Phi_1^e, \Phi_2^e)$, где $\Phi_i^e = \Phi_i(p^e, z_P(p^e))$ $(i = 1, 2)$ — соответствующей ей векторной гарантией.

Определение 2. *Гарантированным по Парето равновесием (ГПР) в городе (дуополии) Хотеллинга при неопределенности будем называть тройку (p^e, f_1^e, f_2^e), где Парето-гарантирующая ситуация $p^e = (p_1^e, p_2^e)$ та же, что и в ГПР игры (2), а $f_i^e = f_i(p^e, z_P(p^e))$ $(i = 1, 2)$ есть соответствующая прибыль i-ой фирмы.*

2. Построение гарантированного по Парето равновесия

Нахождение гарантированного по Парето равновесия в городе Хотеллинга при неопределенности сводится к следующей последовательности шагов:

1) определить непрерывную функцию $z_P = z_P(p)$, доставляющую минимум по Парето в двухкритериальной задаче

$$\langle\, \mathrm{Z} = (0, +\infty), \{\Phi_i(p, z)\}\, \rangle, \quad (3)$$

полученной из (2) при каждой фиксированной ситуации $p = (p_1, p_2) \in \mathrm{X}$;

2) построить ситуацию $p^e = (p_1^e, p_2^e)$ равновесную по Нэшу в игре без неопределенностей

$$\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i = (0, +\infty)\}_{i=1,2}, \{\Phi_i(p, z_P(p))\}_{i=1,2} \rangle, \tag{4}$$

полученной подстановкой в (2) минимальной по Парето неопределенности $z_P = z_P(p)$;

3) вычислить прибыли игроков $f_i(p_1^e, p_2^e, z_P(p_1^e, p_2^e)) = f_i^e \ (i = 1, 2)$.

Следуя предложенному алгоритму, заметим, что имеют место следующие три утверждения.

Утверждение 1. *Неопределенность*

$$z_P(p_1, p_2) \ = \ 1 - \frac{x_1 + x_2}{2} - p_2 + p_1$$

минимальна по Парето в двухкритериальной задаче (3) *при каждой ситуации* $p = (p_1, p_2) \in (0, +\infty)^2$.

Утверждение 2. *Ситуация равновесия по Нэшу в* (4) *имеет вид*

$$p^e = (p_1^e, p_2^e) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x_1 + x_2}{4}, \frac{4}{3} - \frac{x_1 + x_2}{3} \right).$$

Утверждение 3. *Гарантированное по Парето равновесие в городе Хотеллинга при неопределенности есть тройка* (p^e, f_1^e, f_2^e)*, где*

$$p^e = (p_1^e, p_2^e) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x_1 + x_2}{4}, \frac{4}{3} - \frac{x_1 + x_2}{3} \right),$$

а соответствующая прибыль фирм

$$f_1^e = \frac{(2 + x_1 + x_2)^2}{24},$$

$$f_2^e = \left(\frac{7}{6} - \frac{5}{12}(x_1 + x_2) \right) \left(\frac{2}{3} - \frac{x_1 + x_2}{6} \right).$$

Литература

1. Hotelling, H. Stability in Competition / H. Hotelling // Economic Journal. – 1929. – V. 39. – P. 41–57.
2. d'Aspremont, C. On Hotelling's Stability in Competition / C. d'Aspremont, J. Gabszewicz, J.-F. Thisse // Econometrica. – 1979. – V. 47. – N. 5 – P. 1145–1150.
3. Salop, S. Monopolitic Competition with Outside Goods / S. Salop // Bell Journal of Economics 1979. – V. 10. – P. 141–156.
4. Dresner, Z. Competitive Location Strategies for Two Facilities / Z. Dresner // Regional Science and Urban Economics – 1982. – V. 12. – P. 485–493.
5. Bester, H. A Non-Cooperative Analysis of Hotelling's Location Game / H. Bester, A. de Palma, W. Leininger, J. Thomas, E.-L. von Tadden // Games and Economic Behavior. – 1996. – V. 12. – P. 165–186.
6. Sakaguchi, M. Pure Strategy Equilibrium in a Location Game with Discriminatory Pricing / M. Sakaguchi // Game Theory and Applications. – 2001. – V. 6. – P. 132–140.
7. Mazalov, V. Location Game on the Plane / V. Mazalov, M. Sakaguchi //International Game Theory Review. – 2003. – V. 5, № 1. – P. 13–25.

8. Competitive Facility Location: the Voronoi Game / H.K. Ann, S.W. Cheng, O. Cheong, M. Golin, R. van Oostrum // Theoretical Computer Science. – 2004. – V. 310. – P. 357–372.
9. Zhukovskiy, V.I. The Vector-Valued Maximin / V.I. Zhukovskiy, M.E. Salukvadze. – N.Y. etc.: Academic Press, 1994.
10. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов и приложения / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев. – М.: URSS, Ленанд, 2012.

Константин Николаевич Кудрявцев, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математический анализ», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), kudrk@mail333.com.

Ирина Станиславовна Стабулит, кафедра «Математика», Челябинская государственная агроинженерная академия (г. Челябинск, Российская Федерация), irisku76@mail.ru.

MSC 91A10

Pareto – Guaranteed Equilibrium in Hotelling's Duopoly on the Plane

K.N. Kudryavtsev, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),
I.S. Stabulit, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

In this paper we study Hotelling's duopoly under uncertainty. On a single square are located two firms, which claim the price of the goods. At same time, on the proposed firms product is introduced excise tax, the value of which is not known in advance and is uncertainty. One of the firms increases the value of the goods at the amount of excise tax, and the other does not change. Buyers make a firm choice, comparing costs of its visit which represent the price and distance sum. There is a decision Pareto – guaranteed equilibrium.

Keywords: duopoly, guaranteed equilibrium, game under uncertainty.

References

1. Hotelling H. Stability in Competition. *Economic Journal*, 1929, vol. 39, pp. 41–57.
2. d'Aspremont C., Gabszewicz J., Thisse J.-F. On Hotelling's Stability in Competition. *Econometrica*, 1979, vol.47,no. 5, pp. 1145–1150.
3. Salop S. Monopolitic Competition with Outside Goods. *Bell Journal of Economics*, 1979, vol. 10, pp. 141–156.
4. Dresner Z. Competitive Location Strategies for Two Facilities. *Regional Science and Urban Economics*, 1982, vol. 12, pp. 485–493.
5. Bester H., De Palma A., Leininger W., Thomas J., Von Tadden E.-L. A Non-Cooperative Analysis of Hotelling's Location Game. *Games and Economic Behavior*, 1996, vol. 12, pp. 165–186.
6. Sakaguchi M. Pure Strategy Equilibrium in a Location Game with Discriminatory Pricing. *Game Theory and Applications*, 2001, vol. 6, pp. 132–140.
7. Mazalov V. Sakaguchi M. Location Game on the Plane. *International Game Theory Review,* 2003, vol. 5, no. 1, pp. 13–25.
8. Ann H.K. Cheng S.W., Cheong O., Golin M., van Oostrum R. Competitive Facility Location: the Voronoi Game. *Theoretical Computer Science,* 2004, vol. 310, pp. 357–372.
9. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The Vector-Valued Maximin.* N.Y., Academic Press, 1994.
10. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. *Balancing and Application Conflicts.* Moscow, URSS, 2012.

Поступила в редакцию 8 августа 2012 г.