

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРАМИ

Г.В. Демиденко, К.М. Дулина, И.И. Матвеева

Рассматривается некоторый класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с параметрами. Дифференциальные уравнения такого типа возникают при изучении колебаний «перевернутого маятника», точка подвеса которого совершает произвольные периодические колебания. Установлены условия, при которых нулевое решение асимптотически устойчиво. Указаны оценки области притяжения нулевого решения и получены оценки скорости убывания решений на бесконечности. При получении результатов используется критерий асимптотической устойчивости нулевого решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Критерий формулируется в терминах разрешимости специальной краевой задачи на отрезке для дифференциального уравнения Ляпунова. Оценки области притяжения нулевого решения и оценки скорости убывания решений на бесконечности указываются с использованием нормы решения этой краевой задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка, периодические коэффициенты, асимптотическая устойчивость, дифференциальное уравнение Ляпунова.

Введение

Настоящая работа продолжает исследования авторов [1–4] асимптотической устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В работе [1] рассматривались линейные системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T -периодическими элементами. В терминах разрешимости специальной краевой задачи для дифференциального матричного уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t) \quad (2)$$

был установлен критерий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

Теорема 1. *Нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда существует эрмитово решение краевой задачи*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H &= -C(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ H(0) = H(T) &> 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $C(t)$ — эрмитова положительно определенная матрица с непрерывными элементами на $[0, T]$.

Отметим, что дифференциальные матричные уравнения вида (2) рассматривались во многих работах при исследовании качественного поведения решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (см., например, [5–10]).

Замечание 1. Если $A(t) \equiv A$ и $C(t) \equiv C$ постоянные матрицы, то краевая задача (3) эквивалентна матричному уравнению Ляпунова

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0,$$

т. е. теорема 1 совпадает с критерием Ляпунова.

Используя решение $H(t)$ краевой задачи (3), можно указать радиус круга, содержащего мультипликаторы системы (1), и получить оценки, характеризующие скорость убывания решений системы (1) на бесконечности [1].

Теорема 2. Если нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, то для ее решений имеет место следующая оценка

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\|H(0)\|}{h_1(t)} \|x(0)\|^2 \exp\left(-\int_0^t \frac{c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right), \quad t > 0, \quad (4)$$

где $H(t)$ — T -периодическое продолжение решения краевой задачи (3) на полуось $\{t \geq 0\}$, $h_1(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$, $c_1(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $C(t)$.

Всюду мы используем спектральную матричную норму.

Замечание 2. Если $A(t) \equiv A$ постоянная матрица и $C(t) = I$, то оценка (4) совпадает с оценкой Крейна (см., например, [6]).

Замечание 3. Теоремы 1 и 2 позволяют проводить исследования асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), не переходя к решению задачи на собственные значения матрицы монодромии, т. е. без нахождения мультипликаторов.

С использованием перечисленных результатов в работах [2, 3] исследовалась асимптотическая устойчивость нулевого решения нелинейных систем

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad t > 0, \quad (5)$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T -периодическими элементами, $f(t, x)$ — вещественнозначная гладкая вектор-функция, $f(t, 0) = 0$. В терминах решения $H(t)$ краевой задачи (3) были получены оценки области притяжения нулевого решения и установлены оценки экспоненциального убывания решений системы (5) при $t \rightarrow \infty$. Приведем формулировку результата из работы [3].

Теорема 3. Пусть нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, и вектор-функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \langle H(t)f(t, x), x \rangle \leq q \langle H(t)x, x \rangle^{1+\gamma}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad q \geq 0, \quad \gamma > 0. \quad (6)$$

Тогда нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво, и область

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{C}^n : \langle H(0)x, x \rangle^\gamma < r\},$$

где

$$r = \left(1 - \exp \left(- \int_0^T \frac{\gamma c_1(s)}{\|H(s)\|} ds \right) \right) \left(2q\gamma \int_0^T \exp \left(- \int_0^\xi \frac{\gamma c_1(s)}{\|H(s)\|} ds \right) d\xi \right)^{-1},$$

является областью притяжения нулевого решения. Для решения системы (5) с начальными данными $x(0) \in \mathcal{E}$ имеет место оценка

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\|H(0)\|}{h_1(t)} \|x(0)\|^2 \exp \left(- \int_0^t \frac{c_1(s)}{\|H(s)\|} ds \right) \left(1 - \frac{\langle H(0)x(0), x(0) \rangle^\gamma}{r} \right)^{-1/\gamma}, \quad t > 0.$$

В настоящей работе рассматриваются уравнения второго порядка следующего вида

$$y'' + \alpha \mu y' + (\beta \mu^2 + \mu \varphi(t)) \psi(y) = 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

где $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\mu > 0$ — параметры, $\varphi(t)$ — непрерывная T -периодическая функция такая, что

$$\int_0^T \varphi(s) ds = 0, \quad (8)$$

$\psi(y)$ — вещественнозначная гладкая вектор-функция, $\psi(0) = 0$.

Цель работы — получить условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (7), установить оценки области притяжения нулевого решения и указать оценки скорости убывания решений уравнения (7) при $t \rightarrow \infty$.

1. Основные результаты

Вначале рассмотрим линейное уравнение

$$y'' + \alpha \mu y' + (\beta \mu^2 + \mu \varphi(t)) y = 0, \quad t > 0, \quad (9)$$

где $\mu > 0$, функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (8). Очевидно, что в случае $\beta < 0$ и $\varphi(t) \equiv 0$ нулевое решение уравнения (9) является неустойчивым. Ниже мы докажем, что при наличии периодической функции $\varphi(t)$ и определенных условиях на параметры α , β , μ нулевое решение уравнения (9) будет асимптотически устойчиво.

При проведении рассуждений мы будем существенно опираться на результаты из работ [1–3]. В частности, мы будем использовать утверждения об асимптотической устойчивости нулевого решения систем дифференциальных уравнений следующего вида

$$\frac{dx}{dt} = \mu(A_1 + A_2(t))x + \nu g(t, x), \quad t > 0, \quad (10)$$

где A_1 — постоянная матрица размера $n \times n$, спектр которой принадлежит левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, $A_2(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T -периодическими элементами такая, что $\int_0^T A_2(t) dt = 0$, μ , ν — параметры, $g(t, x)$ — вещественнозначная гладкая вектор-функция такая, что $g(t + T, x) \equiv g(t, x)$ и

$$\|g(t, x)\| \leq q \|x\|^{1+\gamma}, \quad \gamma \geq 0, \quad q = \text{const.}$$

Как известно (см., например, различные доказательства этого факта в [1, 6, 10]), при достаточно малых μ нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = \mu(A_1 + A_2(t))x, \quad t > 0, \quad (11)$$

асимптотически устойчиво. Отметим, что в [1] этот результат был доказан с использованием критерия, сформулированного в теореме 1. В [2] было показано, что если нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво, то при малых параметрах μ и ν нулевое решение системы (10) будет также асимптотически устойчиво, при этом были указаны диапазоны изменения параметров. Приведем соответствующее утверждение в случае $\gamma = 0$. Для этого введем некоторые обозначения. Поскольку спектр матрицы A_1 принадлежит левой полуплоскости, то существует единственное решение $H_1 = H_1^* > 0$ матричного уравнения Ляпунова

$$H_1 A_1 + A_1^* H_1 = -I. \quad (12)$$

Обозначим через h_{\min} минимальное собственное значение матрицы H_1 .

Теорема 4. Пусть

$$\beta_1 = \max_{t \in [0, T]} \left\| H_1 \int_0^t A_2(\tau) d\tau + \int_0^t A_2^*(\tau) d\tau H_1 \right\|, \quad \mu_1 = \frac{h_{\min}}{\beta_1},$$

$$\beta_2 = \max_{t \in [0, T]} \left\| \left[H_1 \int_0^t A_2(\tau) d\tau + \int_0^t A_2^*(\tau) d\tau H_1 \right] [A_1 + A_2(t)] \right\|, \quad \mu_2 = \frac{1}{2\beta_2}.$$

Если параметры μ, ν удовлетворяют неравенствам

$$0 < \mu < \min \{ \mu_1, \mu_2 \}, \quad 2\mu\beta_2 + 2|\nu|q \left(\frac{\|H_1\|}{\mu} + \beta_1 \right) < 1,$$

то нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво.

Перейдем к исследованию решений уравнения (9).

Теорема 5. Если $\alpha > 0$ и

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^\tau \varphi(s) ds \right)^2 d\tau > \left(\frac{1}{T} \int_0^T \tau \varphi(\tau) d\tau \right)^2 - \beta, \quad (13)$$

тогда при достаточно малых $\mu > 0$ нулевое решение уравнения (9) асимптотически устойчиво.

Доказательство. При доказательстве мы будем следовать схеме рассуждений из работы [3]. Введем вектор-функцию

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

В силу уравнения (9) имеем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v, \quad (14)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta\mu^2 - \mu\varphi(t) & -\alpha\mu \end{pmatrix}.$$

Сделаем следующую замену

$$v_1(t) = (1 + \mu a(t))u_1(t), \quad v_2(t) = \mu b(t)u_1(t) + \mu c(t)u_2(t). \quad (15)$$

Покажем, что существуют T -периодические функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ такие, что вектор-функция $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ удовлетворяет системе

$$\frac{du}{dt} = \mu U(t, \mu)u. \quad (16)$$

Вначале заметим, что в силу замены (15) система (14) сводится к следующей системе

$$\frac{du}{dt} = \tilde{U}(t, \mu)u,$$

где элементы матрицы $\tilde{U}(t, \mu)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{11}(t, \mu) &= \frac{\mu(b(t) - a'(t))}{1 + \mu a(t)}, \quad \tilde{u}_{12}(t, \mu) = \frac{\mu c(t)}{1 + \mu a(t)}, \\ \tilde{u}_{21}(t, \mu) &= -\frac{\mu}{c(t)} \left(\beta + \alpha b(t) + \mu\beta a(t) + \varphi(t)a(t) + \frac{b(t)(b(t) - a'(t))}{1 + \mu a(t)} \right) - \frac{b'(t) + \varphi(t)}{c(t)}, \\ \tilde{u}_{22}(t, \mu) &= -\mu \left(\alpha + \frac{b(t)}{1 + \mu a(t)} \right) - \frac{c'(t)}{c(t)}. \end{aligned}$$

По аналогии с [3, § 3] возьмем $c(t) \equiv 1$ и выберем функции $a(t)$, $b(t)$ так, чтобы

$$a'(t) - b(t) = 0, \quad b'(t) + \varphi(t) = 0. \quad (17)$$

Тогда действительно получаем систему (16), где

$$U(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1 + \mu a(t)} \\ -\beta - \alpha b(t) - \mu\beta a(t) - \varphi(t)a(t) & -\alpha - \frac{b(t)}{1 + \mu a(t)} \end{pmatrix}.$$

Используя представление

$$\frac{1}{1 + \mu a(t)} = 1 - \mu a(t) + \frac{\mu^2 a^2(t)}{1 + \mu a(t)},$$

перепишем матрицу $U(t, \mu)$ в виде

$$U(t, \mu) = U_1 + U_2(t, \mu) + \mu^2 U_3(t, \mu),$$

где

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta - \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) a(\tau) d\tau & -\alpha \end{pmatrix},$$

$$U_2(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & -\mu a(t) \\ -\alpha b(t) - \mu \beta a(t) - \varphi(t)a(t) + \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau)a(\tau)d\tau & (\mu a(t) - 1)b(t) \end{pmatrix},$$

$$U_3(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a^2(t)}{1 + \mu a(t)} \\ 0 & -\frac{a^2(t)b(t)}{1 + \mu a(t)} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что существуют функции $a(t)$ и $b(t)$, удовлетворяющие условиям (17), такие, что спектр матрицы U_1 принадлежит левой полуплоскости, матрица $U_2(t, \mu)$ является T -периодической и

$$\int_0^T U_2(\tau, \mu) d\tau = 0.$$

В этом случае система (16) будет принадлежать классу систем вида (10), нулевое решение которых, как отмечалось выше, асимптотически устойчиво при малых μ .

Условия (17) подсказывают, что функции $a(t)$, $b(t)$ можно искать в виде

$$b(t) = - \int_{t_1}^t \varphi(s) ds, \quad (18)$$

$$a(t) = - \int_{t_2}^t \int_{t_1}^s \varphi(\xi) d\xi ds, \quad (19)$$

при этом числа $t_1, t_2 \in [0, T]$ следует выбирать так, чтобы выполнялись равенства

$$\int_0^T a(\tau) d\tau = 0, \quad \int_0^T b(\tau) d\tau = 0.$$

Вначале построим функцию $b(t)$. Заметим, что по теореме о среднем существует $t_1 \in [0, T]$ такое, что имеет место равенство

$$\int_0^T \tau \varphi(\tau) d\tau = T \int_{t_1}^T \varphi(\tau) d\tau. \quad (20)$$

Учитывая, что

$$\int_0^T \tau \varphi(\tau) d\tau = \int_0^T \int_{\tau}^T \varphi(s) ds d\tau, \quad T \int_{t_1}^T \varphi(s) ds = \int_0^T \int_{t_1}^T \varphi(s) ds d\tau,$$

(20) можно переписать в виде

$$\int_0^T \int_{t_1}^{\tau} \varphi(s) ds d\tau = 0. \quad (21)$$

Возьмем функцию $b(t)$ в виде (18) с указанным числом t_1 . В силу условия (8) функция $b(t)$ является T -периодической, при этом из (21) имеем

$$\int_0^T b(\tau) d\tau = 0.$$

Построим теперь функцию $a(t)$. Вначале покажем, что существует $t_2 \in [0, T]$ такое, что выполнено соотношение

$$\frac{1}{2} \int_0^T \tau^2 \varphi(\tau) d\tau + T \int_{t_2}^T \int_{t_1}^s \varphi(\tau) d\tau ds = \frac{T^2}{2} \int_{t_1}^T \varphi(\tau) d\tau. \quad (22)$$

Действительно, представим правую часть в виде

$$\frac{T^2}{2} \int_{t_1}^T \varphi(\tau) d\tau = \int_0^T s \int_s^T \varphi(\tau) d\tau ds + \int_0^T s \int_{t_1}^s \varphi(\tau) d\tau ds.$$

Для первого слагаемого, очевидно, справедливо равенство

$$\int_0^T s \int_s^T \varphi(\tau) d\tau ds = \frac{1}{2} \int_0^T \tau^2 \varphi(\tau) d\tau.$$

Второе слагаемое по теореме о среднем можно записать в виде

$$\int_0^T s \int_{t_1}^s \varphi(\tau) d\tau ds = T \int_{t_2}^T \int_{t_1}^s \varphi(\tau) d\tau ds,$$

где $t_2 \in [0, T]$. Отсюда получаем (22). Нетрудно показать, что (22) можно переписать в виде

$$\int_0^T \int_{t_2}^{\tau} \int_{t_1}^s \varphi(\xi) d\xi ds d\tau = 0. \quad (23)$$

Действительно, интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{t_2}^{\tau} \int_{t_1}^s \varphi(\xi) d\xi ds d\tau &= T \int_{t_2}^T \int_{t_1}^s \varphi(\tau) d\tau ds - \int_0^T s \int_{t_1}^s \varphi(\tau) d\tau ds = \\ &= T \int_{t_2}^T \int_{t_1}^s \varphi(\tau) d\tau ds - \frac{T^2}{2} \int_{t_1}^T \varphi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^T \tau^2 \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что соотношение (22) эквивалентно (23). Следовательно, функцию $a(t)$ можно взять в виде (19) с указанным числом t_2 .

Покажем, что функция $a(t)$ является T -периодической. Действительно, по определению имеем

$$\frac{d}{dt}[a(t+T) - a(t)] \equiv b(t+T) - b(t) \equiv 0.$$

С другой стороны, учитывая свойства функции $b(t)$, получаем

$$a(T) - a(0) = \int_0^T b(s) ds = 0.$$

Отсюда $a(t + T) \equiv a(t)$.

Итак, мы указали функции $a(t)$ и $b(t)$, удовлетворяющие условиям (17), такие, что матрица $U_2(t, \mu)$ является T -периодической и

$$\int_0^T U_2(\tau, \mu) d\tau = 0.$$

По определению спектр матрицы U_1 принадлежит левой полуплоскости тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$ и

$$\beta + \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) a(\tau) d\tau > 0. \quad (24)$$

Покажем, что последнее неравенство эквивалентно условию (13). Для этого сделаем ряд преобразований. Применяя дважды формулу интегрирования по частям и учитывая условие (8), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi(\tau) a(\tau) d\tau &= \int_0^\tau \varphi(\xi) d\xi a(\tau) \Big|_0^T - \int_0^T \int_0^\tau \varphi(\xi) d\xi a'(\tau) d\tau = \\ &= - \int_0^\tau \int_0^s \varphi(\xi) d\xi ds a'(\tau) \Big|_0^T + \int_0^T \int_0^\tau \int_0^s \varphi(\xi) d\xi ds a''(\tau) d\tau = \\ &= - \int_0^T \int_0^s \varphi(\xi) d\xi ds a'(T) + \int_0^T \int_0^\tau \int_0^s \varphi(\xi) d\xi ds a''(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

В силу (19) имеем

$$\int_0^T \varphi(\tau) a(\tau) d\tau = \int_0^T \int_0^s \varphi(\xi) d\xi ds \int_{t_1}^T \varphi(\tau) d\tau - \int_0^T \int_0^\tau \int_0^s \varphi(\xi) d\xi ds \varphi(\tau) d\tau.$$

Используя (20), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi(\tau) a(\tau) d\tau &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^s \varphi(\xi) d\xi ds \int_0^T \tau \varphi(\tau) d\tau - \int_0^T \int_0^\tau \int_0^s \varphi(\xi) d\xi ds \varphi(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (T - s) \varphi(s) ds \int_0^T \tau \varphi(\tau) d\tau - \\ &- \int_0^\tau \int_0^s \varphi(\xi) d\xi ds \int_0^\tau \varphi(\eta) d\eta \Big|_0^T + \int_0^T \left(\int_0^\tau \varphi(\xi) d\xi \right) \left(\int_0^\tau \varphi(\eta) d\eta \right) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая условие (8), имеем

$$\int_0^T \varphi(\tau) a(\tau) d\tau = -\frac{1}{T} \left(\int_0^T \tau \varphi(\tau) d\tau \right)^2 + \int_0^T \left(\int_0^\tau \varphi(\xi) d\xi \right)^2 d\tau.$$

В силу этого равенства получаем эквивалентность (24) и условия (13).

Следовательно, если выполнены условия теоремы, то спектр матрицы U_1 принадлежит левой полуплоскости. Тогда, как отмечалось выше, при малых μ нулевое решение системы (16) асимптотически устойчиво. Следовательно, асимптотически устойчиво нулевое решение системы (14), что влечет асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (9).

Теорема доказана. \square

Замечание 4. Диапазон изменения параметра μ , при котором можно гарантировать асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (9), может быть получен из теоремы 4. Действительно, возьмем в качестве A_1 , $A_2(t)$ матрицы U_1 , $U_2(t, \mu)$ и $\nu = \mu^3$. Пусть $\mu_3 < \left(-\min_{t \in [0, T]} a(t) \right)^{-1}$ — положительное число такое, что

$$2\mu_3\beta_2 + 2\mu_3^2 \max_{t \in [0, T]} \|U_3(t, \mu_3)\| \left(\|H_1\| + \beta_1\mu_3 \right) < 1.$$

Тогда при

$$0 < \mu < \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} \tag{25}$$

нулевое решение уравнения (9) асимптотически устойчиво.

Пример 1. Пусть

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^l a_k \cos(kt) + \sum_{j=1}^m b_j \sin(jt).$$

Тогда условие (13) имеет вид

$$\beta > -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \left(\frac{a_k}{k} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{b_j}{j} \right)^2.$$

Ниже мы покажем, что используя теоремы 1 и 2, можно получить оценки решений уравнения (9), характеризующие скорость убывания при $t \rightarrow \infty$. Если выполнены условия теоремы 5, то нулевое решение системы (14) асимптотически устойчиво. Тогда, в силу теоремы 1, краевая задача (3) имеет единственное решение $H(t) = H^*(t)$, при этом, как показано в [1], $H(t) > 0$, $t \in [0, T]$. Поэтому, согласно теореме 2, для получения оценок экспоненциального убывания решений системы (14) достаточно построить решение краевой задачи (3) при некоторой матрице $C(t) = C^*(t) > 0$. Вначале рассмотрим матрицу

$$\mathcal{H}(t, \mu) = \frac{1}{\mu} H_1 - H_2(t, \mu),$$

где H_1 — решение уравнения Ляпунова (12) с $A_1 = U_1$,

$$H_2(t, \mu) = H_1 \int_0^t U_2(\tau, \mu) d\tau + \int_0^t U_2^*(\tau, \mu) d\tau H_1.$$

Нетрудно проверить, что она является решением краевой задачи вида (3) для системы (16)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{H} + \mu\mathcal{H}U(t, \mu) + \mu U^*(t, \mu)\mathcal{H} &= -\mathcal{C}(t, \mu), \quad 0 \leq t \leq T, \\ \mathcal{H}(0, \mu) &= \mathcal{H}(T, \mu) > 0, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{C}(t, \mu) = I + \mu H_2(t, \mu)U(t, \mu) + \mu U^*(t, \mu)H_2(t, \mu) - \mu^2 H_1 U_3(t, \mu) - \mu^2 U_3^*(t, \mu)H_1.$$

Заметим, что $\mathcal{C}(t, \mu) = \mathcal{C}^*(t, \mu)$, причем в силу условия (25) на параметр μ эта матрица является положительно определенной. Введем матрицу

$$H(t, \mu) = L^*(t, \mu)\mathcal{H}(t, \mu)L(t, \mu), \quad (26)$$

где

$$L(t, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{1 + \mu a(t)} & \frac{1}{\mu} \\ -\frac{b(t)}{1 + \mu a(t)} & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Используя замену (15), нетрудно показать, что для системы (14) матрица $H(t, \mu)$ является решением краевой задачи (3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H &= -C(t, \mu), \quad 0 \leq t \leq T, \\ H(0, \mu) &= H(T, \mu) > 0, \end{aligned}$$

где

$$C(t, \mu) = L^*(t, \mu)\mathcal{C}(t, \mu)L(t, \mu). \quad (27)$$

Тогда, в силу теоремы 2, для решений системы (14) справедлива оценка (4). Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5 и параметр μ удовлетворяет условию (25). Тогда для решений $y(t)$ уравнения (9) имеет место следующая оценка

$$\|y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2 \leq \frac{\|H(0, \mu)\|}{h_1(t, \mu)} (\|y(0)\|^2 + \|y'(0)\|^2) \exp\left(-\int_0^t \frac{c_1(s, \mu)}{\|H(s, \mu)\|} ds\right), \quad t > 0,$$

где $h_1(t, \mu) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t, \mu)$, определенной в (26), $c_1(t, \mu) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $C(t, \mu)$, определенной в (27).

Перейдем к рассмотрению нелинейного уравнения (7). Будем предполагать, что функция $\psi(y)$ удовлетворяет оценке

$$|\psi(y) - \psi'(0)y| \leq p|y|^{1+\delta}, \quad p > 0, \quad \delta > 0, \quad (28)$$

причем $\psi'(0) \neq 0$. Перепишем уравнение (7) следующим образом

$$y'' + \alpha\mu y' + (\beta\mu^2 + \mu\varphi(t))\psi'(0)y + (\beta\mu^2 + \mu\varphi(t))(\psi(y) - \psi'(0)y) = 0. \quad (29)$$

Рассмотрим линейное уравнение

$$y'' + \alpha\mu y' + (\beta\mu^2 + \mu\varphi(t))\psi'(0)y = 0, \quad t > 0.$$

Вводя обозначения $\tilde{\beta} = \beta\psi'(0)$, $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)\psi'(0)$, получаем уравнение вида (9), для решений которого справедливы доказанные выше утверждения.

Пусть $y(t)$ — решение уравнения (7) и $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. В силу (29) имеем систему

$$\frac{dv}{dt} = \tilde{A}(t)v + f(t, v), \quad (30)$$

где

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{\beta}\mu^2 - \mu\tilde{\varphi}(t) & -\alpha\mu \end{pmatrix}, \quad f(t, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\beta\mu^2 + \mu\varphi(t))(\psi(v_1) - \psi'(0)v_1) \end{pmatrix}.$$

Из (28) получаем

$$\|f(t, v)\| \leq \tilde{p}\|v\|^{1+\delta}, \quad \tilde{p} = (|\beta|\mu^2 - \mu \min_{t \in [0, T]} \varphi(t))p.$$

Обозначим через $\tilde{H}(t)$ решение краевой задачи (3) для дифференциального уравнения Ляпунова, построенное по указанной выше схеме для линейной системы

$$\frac{dv}{dt} = \tilde{A}(t)v.$$

Учитывая условия на $\tilde{H}(t)$ и $f(t, v)$, получаем

$$\operatorname{Re} \langle \tilde{H}(t)f(t, v), v \rangle \leq \|\tilde{H}(t)\| \|f(t, v)\| \|v\| \leq \frac{\tilde{p}\|\tilde{H}(t)\|}{(\tilde{h}_1(t))^{1+\delta/2}} \langle \tilde{H}(t)v, v \rangle^{1+\delta/2}, \quad t > 0,$$

где $\tilde{h}_1(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $\tilde{H}(t)$. Следовательно, система (30) входит в класс систем (5), правая часть которых удовлетворяет условию (6) с $q \geq \frac{\tilde{p}\|\tilde{H}(t)\|}{(\tilde{h}_1(t))^{1+\delta/2}}$, $\gamma = \delta/2$. Тогда из теоремы 3 мы получаем область притяжения для нулевого решения уравнения (7) и оценки экспоненциального убывания решений уравнения (7) с начальными данными из этой области притяжения.

Замечание 5. В частном случае уравнение (7) совпадает с уравнением «перевернутого маятника» ($\varphi(t) = \sin t$, $\psi(y) = \sin y$) с колеблющейся точкой подвеса по закону $x(t) = a \sin(t)$ [11, 12]. Указанные условия асимптотической устойчивости вида (13) совпадают с известными условиями Н.Н. Боголюбова, полученными методом усреднения (см., например, [13, 14]). К уравнению (7) сводится изучение колебаний «перевернутого маятника», точка подвеса которого совершает произвольные периодические колебания.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127, соглашение №14.В37.21.0355), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

Литература

1. Демиденко, Г.В. Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами / Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 2. – С. 332–348.

2. Demidenko, G.V. On asymptotic stability of solutions to nonlinear systems of differential equations with periodic coefficients / G.V. Demidenko, I.I. Matveeva // Selcuk J. Appl. Math. – 2002. – V. 3, № 2. – P. 37–48.
3. Демиденко, Г.В. Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений / Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1271–1284.
4. Demidenko, G.V. On numerical study of asymptotic stability of solutions to linear periodic differential equations with a parameter / G.V. Demidenko, I.I. Matveeva // J. Comput. Math. Optim. – 2009. – V. 5, № 3. – P. 163–173.
5. Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М.: Наука, 1966.
6. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970.
7. Якубович, В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. – М.: Наука, 1972.
8. Андреев, Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. – М.: Наука, 1976.
9. Розенвассер, Е.Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления / Е.Н. Розенвассер. – М.: Наука, 1977.
10. Бодунов, Н.А. О зависимости устойчивости линейных периодических систем от периода / Н.А. Бодунов, Ф.Ф. Котченко // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 2. – С. 338–341.
11. Боголюбов, Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике / Н.Н. Боголюбов // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. – Киев, 1950. – № 14. – С. 9–34.
12. Капица, П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса / П.Л. Капица // ЖЭТФ. – 1951. – Т. 21, вып. 5. – С. 588–597.
13. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1963.
14. Митропольский, Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский. – Киев: Наукова думка, 1971.

Геннадий Владимирович Демиденко, доктор физико-математических наук, профессор, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, кафедра дифференциальных уравнений, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), demidenk@math.nsc.ru.

Ксения Михайловна Дулина, студент, кафедра дифференциальных уравнений, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), sun-ksi@mail.ru.

Инесса Изотовна Матвеева, кандидат физико-математических наук, доцент, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, кафедра дифференциальных уравнений, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), matveeva@math.nsc.ru.

Asymptotic Stability of Solutions to One Class of Nonlinear Second-Order Differential Equations with Parameters

G.V. Demidenko, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russian Federation),

K.M. Dulina, Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russian Federation),

I.I. Matveeva, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russian Federation)

We consider a class of nonlinear second-order ordinary differential equations with parameters. Differential equations of such type arise when studying oscillations of an «inversed pendulum» in which the pivot point vibrates periodically. We establish conditions under which the zero solution is asymptotically stable. We obtain estimates for the attraction domain of the zero solution and establish estimates for the decay rate of solutions at infinity. Obtaining the results, we use a criterion for asymptotic stability of the zero solution to systems of linear ordinary differential equations with periodic coefficients. The criterion is formulated in terms of solvability of a special boundary value problem for the Lyapunov differential equation on the interval. The estimates of the attraction domain of the zero solution and estimates for the decay rate of the solutions at infinity are established by the use of the norm of the solution to the boundary value problem.

Keywords: second-order differential equations, periodic coefficients, asymptotic stability, Lyapunov differential equation.

References

1. Demidenko G.V., Matveeva I.I. On Stability of Solutions to Linear Systems with Periodic Coefficients. *Siberian Math. J.*, 2001, vol. 42, no. 2, pp. 282–296.
2. Demidenko G.V., Matveeva I.I. On Asymptotic Stability of Solutions to Nonlinear Systems of Differential Equations with Periodic Coefficients. *Selcuk J. Appl. Math.*, 2002, vol. 3, no. 2, pp. 37–48.
3. Demidenko G.V., Matveeva I.I. On Stability of Solutions to Quasilinear Periodic Systems of Differential Equations. *Siberian Math. J.*, 2004, vol. 45, no. 6, pp. 1041–1052.
4. Demidenko G.V., Matveeva I.I. On Numerical Study of Asymptotic Stability of Solutions to Linear Periodic Differential Equations with a Parameter *J. Comput. Math. Optim.*, 2009, vol. 5, no. 3, pp. 163–173.
5. Malkin I.G. *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* [Theory of Stability of Motion]. Moscow, Nauka, 1966.
6. Daletskiy Yu.L., Kreyn M.G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space]. Moscow, Nauka, 1970.
7. Yakubovich V.A., Starzhinskiy V.M. *Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications]. Moscow, Nauka, 1972.
8. Andreev Yu.N. *Upravlenie konechnomernymi lineynymi ob"ektami* [Control of Finite Dimensional Linear Objects]. Moscow, Nauka, 1976.

9. Rozenvasser E.N. *Pokazateli Lyapunova v teorii lineynykh sistem upravleniya* [Lyapunov Exponents in the Theory of Linear Control Systems]. Moscow, Nauka, 1977.
10. Bodunov N.A., Kotchenko F.F. On the Dependence of Stability of Linear Periodic Systems on the Period [O zavisimosti ustoychivosti lineynykh periodicheskikh sistem ot perioda]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1988, vol. 24, no. 2, pp. 338–341.
11. Bogolyubov N.N. The Theory of Perturbations in Nonlinear Mechanics [Teoriya vozmushcheniy v nelineynoy mekhanike]. *Sbornik trudov Instituta stroitel'noy mekhaniki AN USSR* [Proc. Inst. Struct. Mech.], 1950, no. 14, pp. 9–34.
12. Kapitsa P.L. Dynamic Stability of a Pendulum with a Vibrating Point of Suspension [Dinamicheskaya ustoychivost' mayatnika pri koleblyushcheysya tochke podvesa]. *ZhETF* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1951, vol. 21, no. 5, pp. 588–597.
13. Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations]. Moscow, Fizmatgiz, 1963.
14. Mitropol'skiy Yu.A. *Metod usredneniya v nelineynoy mekhanike* [The Method of Averaging in Nonlinear Mechanics]. Kiev, Naukova Dumka, 1971.

Поступила в редакцию 17 июля 2012 г.