

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ МЯГКУЮ ПРОСЛОЙКУ

В.Л. Дильман

NUMERICAL ANALYSIS OF CRITICAL PRESSURE IN THE THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELL CONTAINING A SOFT LAYER

V.L. Dil'man

Проводится численный анализ критического давления в тонкостенных цилиндрических оболочках при нагружении их внутренним давлением и осевой силой, с использованием авторских математических моделей напряженно-деформированного состояния таких оболочек. Предполагается, что оболочки содержат слои (прослойки) из менее прочного материала. На основе этих моделей созданы программы, позволяющие находить критическое внутреннее давление в оболочках в зависимости от механических и геометрических параметров и условий нагружения.

Ключевые слова: тонкостенная цилиндрическая оболочка, менее прочный слой, пластическое деформирование, контактное упрочнение, критическое давление, численный анализ.

The numerical analysis of critical pressure in thin-walled cylindrical shells with use of author's mathematical models of the stress-strained state of such shells is made at a loading their intrinsic pressure and an axial thrust. It is supposed, that shells contain layers from less strong material. On the basis of these models the programs are created, allowing to find a critical intrinsic pressure in shell depending on mechanical and geometrical parameters and conditions of loading.

Keywords: thin-walled cylindrical shell, less durable layer, plastic deformation, contact strengthening, critical pressure, numerical analysis.

Введение

Рассматривается напряженное состояние тонкостенной цилиндрической оболочки из упрочняемого материала, подверженной монотонному статическому нагружению внутренним давлением, а также осевой силой, в критический момент нагружения. Оболочка содержит слой (прослойку) из менее прочного материала, расположенный вдоль, поперек или под углом к образующей. Примером таких оболочек являются трубы большого диаметра, содержащие продольные, спиральные (заводские) или поперечные (монтажные) сварные соединения. Под критическим моментом нагружения понимается момент начала пластического течения вследствие потери устойчивости процесса пластического деформирования материалом слоя.

Оболочка считается *тонкостенной*, если выполняются условия: 1) напряженное состояние постоянно по толщине оболочки (в ее однородном участке); 2) в частности, напряжения, направленные по нормали к поверхности оболочки, всюду внутри оболочки считаются

равными разности внешних давлений (при их равенстве или отсутствии – равными нулю); 3) при исследовании локального участка оболочки, по площади сравнимого с ее толщиной (например, участка, содержащего менее прочную прослойку), кривизной оболочки можно пренебречь; 4) отношение толщины стенки к ее радиусу мало: $t \ll r$, что позволяет пренебрегать по сравнению с единицей слагаемыми, имеющими порядок t^2/r^2 .

В инженерных расчетах обычно оболочку принимают тонкостенной, если у нее отношение толщины стенки к ее радиусу составляет величину около 0,05 и менее.

Критериальными величинами в критический момент нагружения удобно считать интенсивность напряжений и интенсивность деформаций, на основе которых можно получать силовые и деформационные критерии несущей способности конструкций в виде явных аналитических выражений или алгоритмов и программ. Эти критерии должны зависеть от прочностных и геометрических параметров конструкций и условий нагружения. Построение и исследование математических моделей критических напряженно-деформированных состояний тонкостенных цилиндрических оболочек из изотропных упрочняемых материалов основывается на двух принципах: 1) гипотезе П. Людвига (P. Ludwik) о «единой кривой», то есть гипотезе о независимости диаграммы деформирования от вида напряженного состояния при сложном нагружении; 2) критерии Свифта потери устойчивости процесса пластического деформирования оболочки (H.W. Swift, [1]).

При использовании деформационной теории диаграмма деформирования упрочняемого материала имеет вид

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \quad (1)$$

где σ_i и ε_i – интенсивности напряжений и деформаций. В случае использования теории течения закон деформирования имеет вид $\sigma_i = f(\bar{\varepsilon}_i)$, где $\bar{\varepsilon}_i$ – параметр Одквиста. Среди большого количества известных аппроксимаций зависимости (1) выделяется простотой в использовании степенная зависимость

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n, \quad (2)$$

где A и n – константы материала. К числу наиболее серьезных недостатков аппроксимации диаграммы деформирования (2) можно отнести нелинейность в логарифмических координатах реальных зависимостей для многих материалов. В работах [2, 3, и др.] предложен ряд уточнений формулы (2), свободных от этого недостатка, например:

$$\sigma_i = A(\varepsilon_i + B)^n \exp(a(\varepsilon_i + B)), \quad \sigma_i = A(\varepsilon_i + B)^n \exp(a(\varepsilon_i + B) + b(\varepsilon_i + B)^2).$$

Здесь A , B , n , a , b – постоянные, характеризующие свойства материала.

Суть критерия Свифта заключается в следующем [4]. Изменение размеров (во всех направлениях) участка стенки конструкции при возрастании внешних нагрузок приводит к приращению напряжений на этом участке, которые компенсируются за счет упрочнения материала стенки, и в этом случае пластическое деформирование протекает устойчиво. Однако упрочнение происходит по закону, который на стадии развитых пластических деформаций можно аппроксимировать функцией вида (1), где график f – монотонно возрастающая выпуклая вверх гладкая кривая, а рост напряжений за счет изменения геометрии конструкции в зависимости от деформаций происходит по экспоненте, скорость роста которой выше скорости роста выпуклой вверх функции. Поэтому в какой-то момент роста упрочнения материала оказывается недостаточно для нейтрализации роста напряжений, связанного с изменением формы. В этот момент, определяемый равенством дифференциалов двух указанных зависимостей, начинается деформирование материала с неконтролируемой скоростью при постоянных или уменьшающихся внешних нагрузках, т. е. происходит потеря устойчивости процесса пластического деформирования данного участка оболочки.

Существует нескольких видов критического состояния слоя при растягивающей внешней нагрузке.

1. Достижение критического состояния слоя (прослойки), при условии, что максимальные нормальные напряжения в слое, действующие в его поперечном направлении, не достигают значений максимальных напряжений в БП ОМ, причем приконтактные БП участки соединения не вовлекаются в пластическое деформирование.

2. То же, но с вовлечением в какой-то момент в пластическое деформирование приконтактных участков БП части соединения.

3. Достижение критического состояния слоя (прослойки), при условии, что максимальные нормальные напряжения в слое, действующие в его поперечном направлении, достигают значений максимальных напряжений в БП ОМ, причем приконтактные БП участки соединения не вовлекаются в пластическое деформирование.

4. То же, но с вовлечением в какой-то момент в пластическое деформирование приконтактных участков БП части соединения.

Это, а также недоопределенность возникающих при исследовании напряженного состояния менее прочного слоя краевых задач, объясняет сложность и вариативность математических моделей, описывающих критические состояния изучаемых объектов. Цель работы – создать программы, которые на основе общей схемы построения математической модели напряженно-деформированного состояния в критический момент нагружения менее прочного слоя тонкостенной цилиндрической оболочки позволяют дать сравнительный анализ прочности продольных, спиральных и кольцевых «мягких» слоев таких оболочек, несущей способности прямошовных и спиральношовных труб.

1. Моделирование напряженно-деформированного состояния менее прочных слоев в тонкостенной цилиндрической оболочке

Общая схема построения математической модели напряженно-деформированного состояния в критический момент нагружения менее прочного слоя тонкостенной цилиндрической оболочки состоит из следующих этапов.

1. Определение критических значений напряжений и деформаций в менее прочном слое оболочки на основе критерия Свифта. Представление этих величин в явной аналитической форме при использовании теории малых деформаций и в виде итерационной зависимости при использовании теории течения [5, 6, 7, 8, и др.].

2. Построение математической модели напряженного состояния менее прочного слоя в листовом образце при двухосном нагружении, когда нагрузка действует параллельно и ортогонально направлению слоя. Вычисление в этом случае коэффициента контактного упрочнения материала слоя в явной аналитической форме [9, 10, и др.].

3. Сведение математической модели напряженного состояния менее прочного слоя в листовом образце при двухосном нагружении, когда нагрузка действует под углами, не равными нулю и $\pi/2$ к направлению слоя, к моделям предыдущего этапа. Вычисление в этом случае коэффициента контактного упрочнения материала слоя в форме итерационной зависимости [5, 6, 7, 8, и др.].

4. Получение на основе полученных результатов итерационных (в некоторых случаях явных) аналитических зависимостей для критического давления в тонкостенной цилиндрической оболочке в зависимости от имеющихся параметров [5, 6, и др.]. К упомянутым параметрам относятся:

1) механические свойства материала слоя и основного материала, характеризующиеся пределами прочности $\sigma_B^{МП}$, $\sigma_B^{БП}$ и показателем упрочнения $n = n^{МП}$, а также коэффициент

механической неоднородности соединения $K = \sigma_B^{\text{БП}} / \sigma_B^{\text{МП}}$;

2) размеры оболочки: R_0 – внутренний радиус оболочки в начальный момент нагружения, t_0 – толщина стенки оболочки в начальный момент нагружения;

3) относительная толщина слоя $\varkappa = h/t$, где h – толщина слоя;

4) угол наклона слоя к оси оболочки ν ;

5) коэффициент двухосности нагружения стенки трубы $m = \sigma_1 / \sigma_2$, где σ_1 и σ_2 – осевое кольцевое (соответственно) напряжения в стенке оболочки.

5. Написание программ, позволяющих находить и выводить на экран зависимости внутреннего давления от указанных параметров.

Введем обозначения:

$$B = \cos^2 \nu + m \sin^2 \nu, \quad C = (1 - m) \sin 2\nu, \quad m = \sigma_1 / \sigma_2.$$

Пусть g – коэффициент контактного упрочнения (звездочка указывает на значение величины в критический момент нагружения). Критическое давление p^* и условное расчетное кольцевое напряжение $\sigma_\varphi^{\text{усл}}$ определяются зависимостями [8, и др.]:

$$p^* = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \frac{\sigma_B t_0}{R_0} S, \quad \sigma_\varphi^{\text{усл}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} S \sigma_B, \quad S = \frac{g^* \left(\sqrt{B^2 + C^2 (g^*)^2} \right)^{n-1}}{B^n}. \quad (3)$$

Заметим, что коэффициент g зависит от коэффициента механической неоднородности K и может быть вычислен по следующим формулам [7, 8, 10].

$$g^* = 1 + \sigma_{\text{упр}} / 2,$$

причем при условии $\varkappa_0 \leq \varkappa \leq \varkappa_1 = (K + 1) / 4$, где $\varkappa_0 = (K + 1) / ((K + 1)^2 + 4)$,

$$\sigma_{\text{упр}} = \frac{(K - 1)(3 - K)}{2} + \frac{(K - 1)(K + 1 - 4\varkappa)(K + 1 - 4\varkappa)}{3\varkappa(K + 1)^2}, \quad (4)$$

а при условии $0 < \varkappa \leq \varkappa_0$,

$$\sigma_{\text{упр}} = (K - 1)(2 - 2\varkappa - (1/6)\sqrt{\varkappa(K + 1)}\sqrt{K + 1 - 4\varkappa}). \quad (5)$$

С другой стороны, этот коэффициент $K = K^{\text{нак}}$ для наклонного слоя в соответствии с формулой

$$K_{\text{нак}} = K \sqrt{1 + \frac{K^2 - 1}{K^2} \frac{(g^*)^2 C^2}{B^2}} \quad (6)$$

сам зависит от g^* . Поэтому для применения формулы (3) следует сначала найти g^* как предел итеративной последовательности (с заданной точностью), взяв в качестве стартового значения для $K = K_{\text{нак}}$ отношение временных сопротивлений (пределов прочности) основного материала и материала менее прочного слоя, т. е. коэффициент $K = \sigma_B^{\text{БП}} / \sigma_B^{\text{МП}}$. Затем, используя формулы (4) или (5), можно найти первое приближение для g^* , подстановкой которого в формулу (6) находится первое приближение для $K = K_{\text{нак}}$. Это значение подставляется в формулы (4) или (5) для вычисления второго приближения g^* , и т. д.

2. Численные эксперименты

На основе теоретических результатов, в частности, зависимостей (3), (4), (5) и (6) в системе компьютерной математики MATLAB 7.5 разработана программа, которая позволяет:

1. По заданным параметрам находить $K_{\text{нак}}$.

2. По заданным параметрам находить критическое давление p^* и условное расчетное кольцевое напряжение $\sigma_{\varphi}^{\text{усл}}$.

3. Получать графическое изображение критического давления p^* как функцию от угла наклона менее прочного слоя.

4. Получать графическое изображение критического давления p^* как функцию от коэффициента двухосности нагружения.

Для реализации вычислительных алгоритмов программы использовались встроенные функции и стандартные операторы языка программирования MATLAB 7.5. Для получения графического изображения подключен пакет plots.

На рис. 1 – 3 показаны результаты некоторых численных экспериментов.

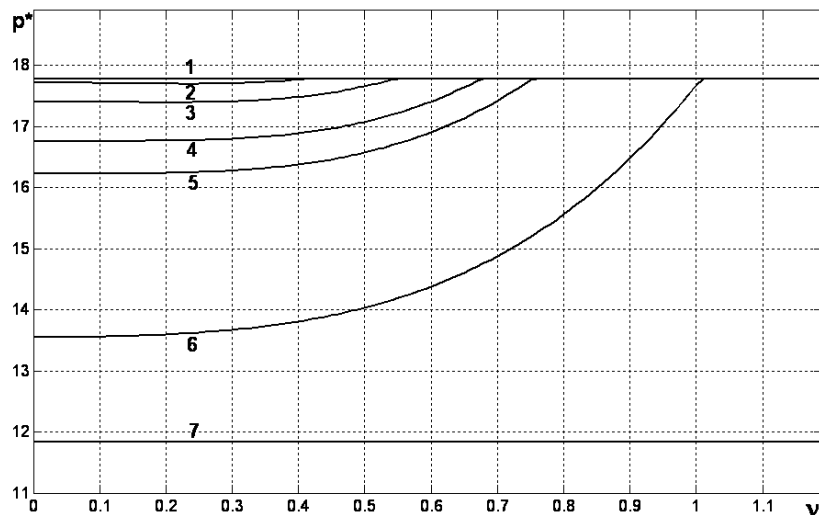


Рис. 1. Зависимость критического давления p^* от угла ν при $\kappa = 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 1$ (линии 2 – 6 соответственно), а также критическое давление в однородной ТЦО, изготовленной из ОМ (линия 1) и материала МП слоя (линия 7); $m = 0,5$, $K = 1,5$, $n = 0,15$, $\sigma_B^{\text{МП}} = 400$ МПа, $R_0 = 610$ мм, $t = 17$ мм

Анализ полученных численных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. Даже при отсутствии осевых нагрузок наклонное расположение менее прочной прослойки не дает никакого преимущества, если угол наклона не превышает $0,5$ ($25^0 \dots 30^0$). При отсутствии осевых нагрузок спиральный шов дает заметное преимущество, когда угол наклона шва равен $0,94$ ($54^0 \dots 55^0$) – параметр, используемый при производстве спиральношовных труб. Более того, как видно из рис. 1, спиральношовные трубы оказываются равнопрочными бесшовным, если угол наклона шва превышает некоторую величину, зависящую от относительной толщины слоя.

2. Прямошовные трубы получают преимущество при существенных осевых нагрузках (рис. 2).

3. Формула для вычисления критического внутреннего давления в трубе, изготовленной из материала слоя, при отсутствии осевых нагрузок, имеет вид:

$$p^* = \frac{2}{\sqrt{3}^{n+1}} \frac{\sigma_B t_0}{R_0}.$$

Для прямошовной трубы, при отсутствии контактного упрочнения в менее прочном слое,

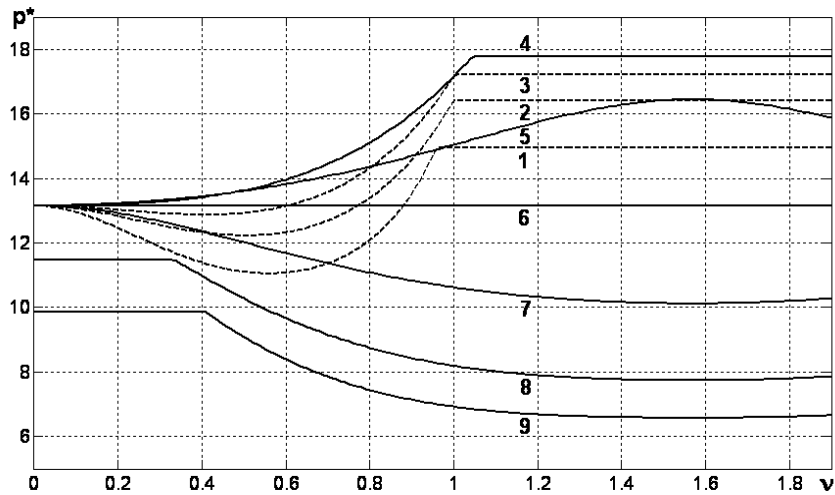


Рис. 2. Зависимость критического давления p^* от угла ν при $m = -0,3; 0; 0,2$ (пунктир 1 – 3 соответственно) и при $m = 0,5; 0,8; 1; 1,3; 1,7; 2$ (сплошные 4 – 9 соответственно), $\varkappa = 1, K = 1,5, n = 0,15, \sigma_B^{МП} = 400$ мПа, $R_0 = 610$ мм, $t = 17$ мм

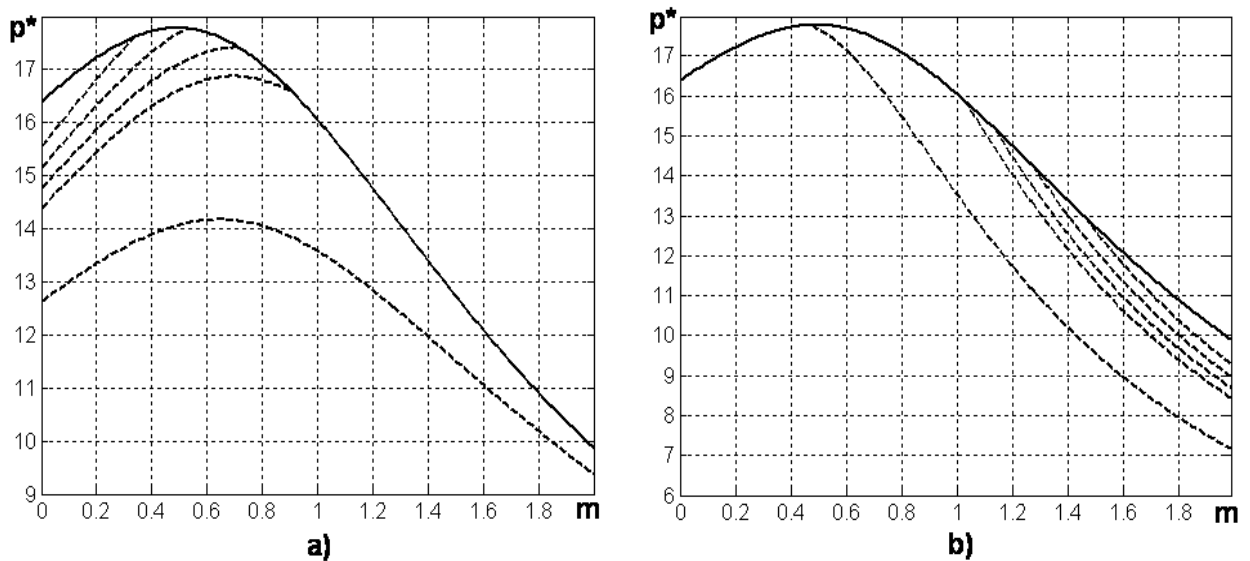


Рис. 3. Зависимость критического давления p^* от коэффициента двухосности нагружения m при $\nu = 0,5$ (а) и $\nu = 1$ (б), в однородной ТЦО (сплошная) и ТЦО, содержащей МП слой с $\varkappa = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1$ (сверху вниз, пунктир). $K = 1,5, n = 0,15, \sigma_B^{МП} = 400$ мПа, $R_0 = 610$ мм, $t = 17$ мм

формулу (3) можно записать в виде:

$$p^* = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \frac{\sigma_B t_0}{R_0}.$$

Поэтому, если контактное упрочнение в слое отсутствует (например, толщина слоя сравнима с толщиной оболочки), то критическое давление в такой оболочке выше, чем в оболочке, изготовленной целиком из менее прочного материала: имеет место упрочнение, отличное

от контактного, названное в работах [7, 8, и др.] конструкционным упрочнением (см. также рис. 1).

4. Осевые нагрузки снижают величину критического давления (рис. 3).

Литература

1. Swift, H. Plastic instability under plane stress / H. Swift // J. Mech. and Phys. Solids. – 1952. – № 1. – P. 1 – 18.
2. Дильман, В.Л. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность труб магистральных газонефтепроводов / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 179 – 185.
3. Дильман, В.Л. Пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 165 – 175.
4. Ковальчук, Г.И. К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек / Г.И. Ковальчук // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 11 – 16.
5. Дильман, В.Л. Несущая способность спиральношовных труб большого диаметра / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 2002. – № 6. – С. 11 – 15.
6. Дильман, В.Л. Анализ пластической устойчивости осевых и спиральных мягких прослоек в цилиндрической тонкостенной оболочке / В.Л. Дильман // Обзорение приклад. и пром. математики. – 2007. – Т. 14, вып. 4. – С. 704 – 705.
7. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.
8. Дильман, В.Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Вест. ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 3, №17(150). – С. 36 – 58.
9. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв.РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 6. – С. 115 – 124.
10. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 4. – С. 38 – 48.

Дильман Валерий Лейзерович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет, dilman49@mail.ru.

Поступила в редакцию 15 февраля 2011 г.