

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ ПРИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ОБЛАЧНЫХ КАПЕЛЬ С УЧЕТОМ ФРАКТАЛЬНОСТИ СРЕДЫ

Т.С. Кумыков, Институт прикладной математики и автоматизации, г. Нальчик

В работе рассмотрен механизм возникновения разности потенциалов при кристаллизации облачных капель в конвективных облаках с учетом фрактальной структуры среды. Моделирование процесса проводилось на основе дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка. Показано, что возникновение разности потенциалов при кристаллизации капель в конвективных облаках существенно зависит не только от скорости роста льда и дисперсности пузырьков, но и от фрактальности среды, где протекает процесс. Приведены результаты моделирования, на основе численного решения построены графики в зависимости от различных значений управляющих параметров.

Ключевые слова: облачная капля; фрактальная размерность; математическая модель; конвективное облако.

Введение

Природные объекты с фрактальной структурой являются нерегулярными фракталами, в которых свойство самоподобности сохраняется в ограниченных пространственных масштабах, определяемых реальными размерами системы. К таким объектам с фрактальной структурой можно отнести облака, которые представляют собой взвешенные в атмосфере продукты конденсации водяного пара.

В настоящее время исследования атмосферного электричества, которые позволяют выяснить природу процессов, ведущих к масштабной электризации грозовых облаков, с учетом фрактальности среды, являются актуальными. Поэтому большой интерес представляет теоретическое исследование возникновения больших потенциалов на фронте кристаллизации облачных капель, учитывающее фрактальность среды. Развитие фрактально-динамического подхода [1] в целом в теории грозового электричества существенно позволит развить физику облаков, где генезис грозовых очагов являются предметом оживленных дискуссий [2].

Исследованием разделения зарядов при кристаллизации водных растворов занимались многие авторы. J.C. Ribeiro обнаружил явление межфазного разделения зарядов при кристаллизации диэлектриков в 1944 г., которое названо им термодиэлектрическим эффектом. Также он высказал предположение о том, что при фазовых переходах первого рода с участием кристаллической фазы вблизи межфазной границы должен выделяться избыточный заряд. E.J. Workman и S.E. Reynolds в 1950 г. зарегистрировали значительную неравновесную межфазную разность потенциалов, которая возникала при замерзании бидистиллята. В результате интенсивных экспериментальных исследований эффекта Воркмана – Рейнольдса в 50-е и 60-е годы было установлено, что он характерен для широкого класса диэлектриков и обусловлен формированием вблизи активного фронта кристаллизации двойного электрического слоя, состоящего из примесных ионов, и величина межфазной разности потенциалов зависит от произведения скорости роста кристалла исходной концентрации примеси

и разности межфазных коэффициентов распределения катионов и анионов примеси. Я.И. Френкель электрическое поле атмосферы объяснял всецело электрическими явлениями, происходящими в тропосфере, и утверждал, что ионосфера не играет существенной роли в протекании атмосферных электрических процессов. Предпринимались попытки теоретического объяснения явления формирования разности потенциалов между твердой и жидкой фазой, основанные, в конечном итоге, на диффузионном механизме разделения зарядов без учета фрактальности среды. В работе [3] М.К. Жекамуховым показано, что диффузия ионов не может привести к возникновению больших потенциалов на фронте кристаллизации, и что это явление до сих пор не получило удовлетворительного объяснения.

В данной работе рассматривается явление возникновения разности потенциалов на фронте кристаллизации применительно к облачным каплям с учетом фрактальности среды.

1. Постановка и решение задачи

Как выше сказано, облака представляют собой фрактальную среду, отличительной особенностью которой является возможность характеризовать ее фрактальной размерностью. Данный параметр является дробной величиной, по которой возможно осуществление классификации наряду с другими параметрами. Добавляя рассчитанные данные 2D фрактальной размерности разновидных облаков (по происхождению и морфологическим признакам), которые имеют фрактальную структуру [4, 5], получим:

Таблица 1

Фрактальная классификация облаков

Форма облачности	Фрактальная размерность среды
<i>Облака верхнего яруса</i>	
Перистые, нитевидные (Cirrus fibratus)	1,47
<i>Облака среднего яруса</i>	
Высоко-кучевые, просвечивающие (Alto cumulus)	1,46
<i>Облака нижнего яруса</i>	
Слоистые, разорвано-дождевые (Fractonimbus)	1,49
Слоисто-дождевые (Nimbostratus)	1,47
<i>Облака вертикального развития</i>	
Кучево-дождевые Cb (Cumulonimbus)	1,36

Так как фрактальность формы облаков не влияет на внутриоблачные процессы, при исследовании возникновения разности потенциалов на фронте кристаллизации целесообразно учитывать фрактальность самой среды. Фрактальная среда представляет собой среду, распределенную в пространстве, массовая размерность которой меньше размерности заполняемого пространства, а фрактальность формы подразумевает визуально геометрический образ с дробной размерностью.

Исходя из фрактальности облачной среды, используя производную по Капуто $\partial_{at}^\alpha u(t) = \text{sign}^n(a-t) D_{at}^{\alpha-n} \frac{\partial^n u(t)}{\partial t^n}$, $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in N$, где D_{at}^α – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, который определяется следующим образом:

$$D_{at}^\alpha u(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{u(s)ds}{|t-s|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(t), & \alpha = 0, \\ \text{sign}^n(t-a) \frac{\partial^n}{\partial t^n} D_{at}^{\alpha-n} u(t), & n-1 < \alpha \leq n, n \in N, \end{cases}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, была найдена зависимость заряда капель и пузырьков от их размеров, содержащихся в каплях, и получено обобщенное уравнение динамики электрического поля, возникающего при разделении зарядов во фрактальной облачной капле [6].

По аналогии рассмотрим процесс кристаллизации облачных капель. При соударении переохлажденных облачных капель с градинами и частицами крупы температура капель повышается до нуля градусов. В момент повышения температуры капель смесь воздуха в каплях становится пересыщенной, причем степень пересыщения зависит от температуры облачной среды (табл. 2).

Таблица 2

Значения растворимости воздуха γ в воде и пересыщения ϑ при различных температурах

$t, ^\circ C$	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	10	20
γ	0,0672	0,0575	0,0495	0,0429	0,0374	0,0327	0,0288	0,0226	0,0187
ϑ	2,33	2,0	1,72	1,42	1,30	1,135	1,0	0,785	0,650

Согласно работе [7], пузырьки в воде начинают зарождаться в зависимости от степени ее чистоты при пересыщениях 1,1 – 1,4. Следовательно, при столкновении переохлажденных капель с поверхностью градин при температурах ниже $-4^\circ C$ внутри капель всегда должны появляться пузырьки, которые зарождаются на мельчайших частичках пыли, содержащихся в облачной капле в большом количестве. В процессе намерзания капель эти пузырьки вместе с другими посторонними примесями вытесняются из зоны кристаллизации, образуя коллоидные частицы, и переходят в окружающий воздух. При этом газовые пузырьки и частицы примесей могут адсорбировать ионы или одного знака или противоположных знаков.

Исследованию процессов интенсивного выделения воздуха при замерзании переохлажденных капель посвящены работы российских ученых Л.Г. Качурина, В.И. Бекряева, В.М. Мучника, А.Х. Аджиева, М.К. Жекамухова и др., а также зарубежных ученых J.V. Iribarne, B.J. Mason, J.E. Dinger, R. Gunn и др.

Также выделение пузырьков хорошо видно на рис. 1 (рис. 1 а) заимствован из работы [8].

Известно [6], что число центров образования пузырьков, способных к дальнейшему росту, возрастает с увеличением степени пересыщения раствора. Следовательно, при прочих равных условиях, количество пузырьков, образующихся в облачных каплях, будет возрастать с увеличением переохлаждения облачных капель, т.е. процесс

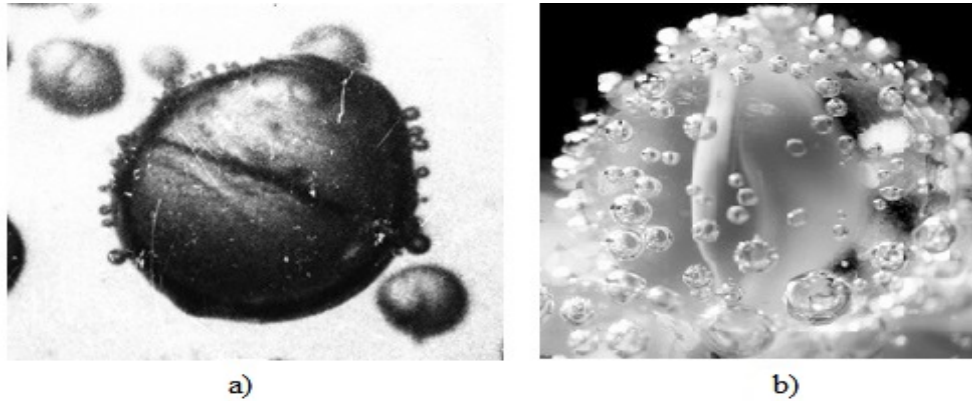


Рис. 1. Фотография капли, замерзшей на границе раздела двух сред, вокруг которой скопились пузырьки воздуха

выделения пузырьков с поверхности растущего ледяного отложения будет протекать более интенсивно по мере понижения температуры облачной среды. Однако при этом налагаются определенные ограничения на размер переохлажденных облачных капель.

При медленной кристаллизации капли газ, вытесняющийся из объема растущего льда, отводится от фронта кристаллизации, и практически перед фронтом кристаллизации не зарождаются пузырьки, и поэтому сосредоточим внимание на электрокинетических явлениях, связанных с возникновением значительного количества пузырьков газа перед фронтом кристаллизации.

При движении фронта кристаллизации вместе со смесью воздуха переносятся в лед их заряды, а компенсирующий заряд остается в жидкой части. Тогда поток электричества, обусловленный движением пузырьков, относительно фронта кристаллизации будет

$$j(t) = vn\xi a(t), \quad (1)$$

где ξ – электрокинетический потенциал, v – скорость роста льда.

Размер и величина заряда воздушных пузырьков в облачных каплях с учетом фрактальности среды получены в работе [9] следующим образом

$$a(t) = a_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha), \quad q_r(t) = nq_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha), \quad (2)$$

где a_0 – размер пузырька в начальный момент времени, n – количество пузырьков, q_0 – заряд пузырька в начальный момент времени, $E_{\alpha,1}(kt^\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i t^{\alpha i}}{\Gamma(1+\alpha i)}$ – функции типа Миттаг – Леффлера, $k = 2, 4\vartheta \frac{p^2}{\lambda p_0 \sigma}$, ϑ – пересыщение, p – давление внутри пузырька, p_0 – атмосферное давление, σ – поверхностное натяжение воды, $\lambda = \frac{1}{\tau} = \text{const} > 0$, τ – характерное время процесса замерзания, свойство фрактальности учитывается через феноменологический параметр α [10].

Закон изменения заряда льда можно записать в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = j(t) - \delta E(t), \quad (3)$$

где δ – проводимость льда, $E(t)$ – электрическое поле, возникающее при разделении зарядов.

По аналогии с [10, 11] получим изменение заряда частицы во фрактальной среде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \xi D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial a(t)}{\partial t} = \xi \partial_{0t}^{\alpha} a(t), 0 < \alpha < 1. \quad (4)$$

Выразим электрическое поле из (3), учитывая формулы (4) и (1) в виде

$$E(t) = \frac{1}{\delta} [j(t) - \xi \partial_{0t}^{\alpha} a(t)]. \quad (5)$$

Перепишем (5) с учетом фрактальности среды для потока электричества, обусловленного движением пузырьков относительно фронта кристаллизации $j(t) = vn\xi a_0 E_{\alpha,1}(kt^{\alpha})$, и размера воздушных пузырьков в облачных каплях, определяемого формулой (2):

$$E(t) = \frac{\xi a_0 E_{\alpha,1}(kt^{\alpha})}{\delta} [vn - k]. \quad (6)$$

Разность потенциалов, которая возникает на электродах в системе твердая-жидкая фаза, определяется следующим образом

$$\Delta\varphi = E(t) d, \quad (7)$$

а с учетом фрактальности среды

$$\Delta\varphi = \frac{\xi da_0 E_{\alpha,1}(kt^{\alpha})}{\delta} [vn - k], \quad (8)$$

где $d = vt$ – толщина образующегося льда. Из формулы (8) следует, что $\Delta\varphi$ существенно зависит от скорости роста льда, фрактальности среды и дисперсности пузырьков.

Так как оценить концентрацию n можно лишь приближенно, предполагая, что часть газа, вытесняющегося из зоны кристаллизации, превращается в пузырьки со средним радиусом a_0 , и учитывая зависимость давления газа внутри пузырька от его радиуса и фрактальность среды, получим

$$n = \frac{R^3}{a_0^3 (E_{\alpha,1}(kt^{\alpha}))^3} \frac{\gamma(\vartheta - 1)}{\left[1 + \frac{2\sigma}{pa_0 E_{\alpha,1}(kt^{\alpha})}\right]} \frac{p}{p_0},$$

где R – радиус капли, γ – растворимость воздуха.

В работе [12] приводятся значения n , рассчитанные при $R = 50$ мкм и различных радиусах пузырьков a_0 без учета фрактальности среды (табл. 3).

Таблица 3

Значения n при $R = 50$ мкм и различных a_0

a_0 , мкм	0,1	0,5	1,0	2,0
n	$2,6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^2$	39

Подставляя значение концентрации n в (8), получим

$$\Delta\varphi = \frac{\xi da_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha)}{\delta} \left[\frac{R^3}{a_0^3 (E_{\alpha,1}(kt^\alpha))^3} \frac{\gamma(\vartheta - 1)v}{\left[1 + \frac{2\sigma}{pa_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha)}\right]} \frac{p}{p_0} - k \right]. \quad (9)$$

Подставляя характерные значения параметров, получаем, что величина $\Delta\varphi$ больше, чем больше дисперсность пузырьков в облачной капле. Если учитывать то обстоятельство, что при замерзании воды из зоны кристаллизации вытесняется весь растворенный в ней газ, то в формуле (9) следует заменить разность $\vartheta - 1$ на ϑ . При этом значения n , которые приводятся в таблице 3 с учетом фрактальности среды, должны быть увеличены примерно в четыре раза.

2. Анализ полученных результатов

На рис. 2, 3 представлены расчетные кривые, определяющие разность потенциала в зависимости от различных значений параметров t и α согласно формуле (9) с учетом того, что $0 < \alpha < 1$ на интервалах времени от 0 до 0,5 с и от 0 до 0,1 с. Расчеты проводились для пузырьков с радиусами $a_0 \leq 0,5$ мкм.

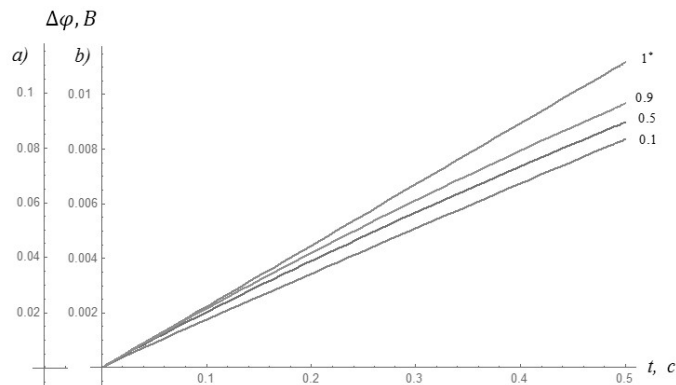


Рис. 2. Зависимость разности потенциала от параметра α для различных размеров пузырьков при $0 < t < 0,5$ (1^* – кривая рассчитана по формуле, полученной в [3])

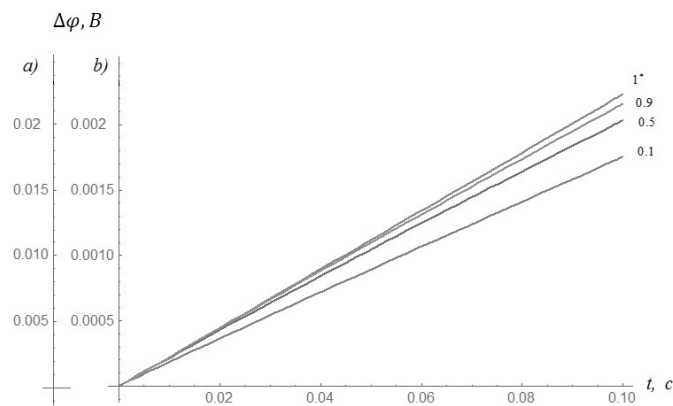


Рис. 3. Зависимость разности потенциала от параметра α для различных размеров пузырьков при $0 < t < 0,1$ (1^* – кривая рассчитана по формуле, полученной в [3])

Процесс образования и роста пузырьков в облачных каплях идет весьма интенсивно и завершается раньше, чем капля успевает замерзнуть, и роль фрактальности среды усиливается на меньших интервалах времени. Из рисунков видно, что с уменьшением показателя α происходит замедление процесса, который влечет к снижению величины потенциала при кристаллизации облачных капель. Экспериментальная линия, полученная в работе [3], сравнивается с расчетными кривыми, полученными по формуле (9). Можно заметить, что показатель α отвечает за интенсивность процесса. Если среда фрактальная, то процесс протекает медленнее, чем в аналогичной сплошной среде, о чем свидетельствуют расчетные кривые на рис. 2, 3. Также заметно влияние размера пузырьков, выходящих при кристаллизации капли, на величину потенциала: чем больше дисперсность пузырьков, тем больше потенциал (на рисунках 2, 3: а) – размер пузырька, соответствующий $a_0 = 10^{-7}$; б) – соответствует размеру $a_0 = 10^{-6}$).

Заключение

В заключении можно отметить, что за счет рассмотренного выше механизма возникновения разности потенциалов при кристаллизации облачных капель в конвективных облаках, в котором фрактальность облачной среды играет существенную роль, скачок потенциала на фронте кристаллизации может достигать больших значений. Показано влияние скорости роста льда, дисперсности пузырьков и порядка дробной производной по времени в законе изменения заряда льда, связанное с фрактальной размерностью среды, на возникновение разности потенциалов при кристаллизации капель. Чем выше показатели скорости роста льда, дисперсности пузырьков и фрактальности облачной среды, тем существеннее их влияние на разность потенциалов. Можно также отметить, что электрические процессы в грозо-градовых облаках не обусловлены фрактальностью формы облаков и тесно связаны с фрактальной структурой облачной среды, которая выражается, как среда, распределенная в пространстве, массовая размерность которого меньше размерности пространства.

Литература

1. Iudin, D.I. Fractal Dynamics of Electric Discharges in a Thundercloud / D.I. Iudin, V.Y. Trakhtengerts, M. Hayakawa // *Physics Review E*. – 2003. – V. 68. – P. 016601.
2. Мареев, Е.Л. Современные проблемы исследования грозового электричества / Е.Л. Мареев, В.Ю. Трахтенгерц, Д.И. Иудин // *Проектирование и технология электронных средств*. – 2004. – С. 7–16.
3. Жекамухов, М.К. Об одном возможном механизме больших потенциалов при кристаллизации водных растворов / М.К. Жекамухов, М.М. Камбиев // *Журнал физической химии*. – 1985. – Т. 10, № 11. – С. 2884–2886.
4. Андреев, А.О. Облака: происхождение, классификация, распознавание / А.О. Андреев. – СПб.: Российский государственный гидрометеорологический университет, 2007.
5. Рис, Ф. Анализ фрактальной размерности облаков с мощными конвективными токами / Ф. Рис, А. Вальдфогель // *Фракталы в физике: тр. VI международного симпозиума по фракталам в физике*. – Триест, 1985. – С. 644–649.

6. Кумыков, Т.С. Математическое моделирование закона изменения заряда облачных капель во фрактальной среде / Т.С. Кумыков, Р.И. Паровик // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2015. – Т. 10, № 1. – С. 12–17.
7. Brownscombe, J.L. Experimental and Field Studies of Precipitation Particles Formed by the Freezing of Supercooled Water / J.L. Brownscombe, J. Hallett // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. – 1967. – V. 93, № 398. – P. 455–473.
8. Аджиев, А.Х. Атмосферные электрические явления на Северном Кавказе / А.Х. Аджиев, Г.В. Куповых. – Таганрог: Таганрог, 2008.
9. Кумыков, Т.С. Моделирование динамики заряда пузырьков во фрактальных облачных каплях / Т.С. Кумыков // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2015. – Т. 1, № 6. – С. 23–27.
10. Рехвиашвили, С.Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования / С.Ш. Рехвиашвили // Нелинейный мир. – 2007. – Т. 5, № 4. – С. 194–198.
11. Рехвиашвили, С.Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики / С.Ш. Рехвиашвили // Письма в журнал технической физики. – 2004. – Т. 30, № 2. – С. 33–37.
12. Жекамухов, М.К. Электризация и пространственное разделение зарядов при выделении пузырьков воздуха в процессе коагуляционного роста градин в облаке. Часть I. Кинетика процесса выделения пузырьков при повышении температуры переохлажденных облачных капель / М.К. Жекамухов, Б.Г. Каров, Т.С. Кумыков // Метеорология и гидрология. – 2008. – № 11. – С. 44–52.

Тембулат Сарабиевич Кумыков, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, отдел «Математическое моделирование геофизических процессов», Институт прикладной математики и автоматизации (г. Нальчик, Российская Федерация), macist20@mail.ru.

Поступила в редакцию 6 февраля 2017 г.

MSC 86A10

DOI: 10.14529/mmp170302

**MATHEMATICAL MODELLING OF THE FORMATION
OF A DIFFERENCE IN THE POTENTIALS DURING
CRYSTALLIZATION OF CLOUD DROPLETS IN VIEW
OF FRACTAL MEDIA**

T.S. Kumykov, Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik,
Russian Federation, macist20@mail.ru

In this paper, we consider the mechanism of a potential difference occurrence while cloud drops are crystallizing in the convective clouds. Differential equations of fractional order have been applied. We have shown the occurrence of the potential difference at droplets crystallization in the convective clouds essentially depends not only on the rate of the ice growth and dispersion of the bubbles, but also on the fractal environment. Simulation results based on the numerical solution of the graphs depending on different values of the governing parameters.

Keywords: cloud drop; fractal dimension; mathematical model; convective cloud.

References

1. Iudin D.I., Trakhtengerts V.Y., Hayakawa M. Fractal Dynamics of Electric Discharges in a Thundercloud. *Physics Review E*, 2003, vol. 68, p. 016601. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.016601
2. Mareev E.L., Iudin D.I., Trakhtengerts V.Y. [Modern Problems of Research of Lightning Electricity]. *Design and Technology of Electronic Means*, 2004, pp. 7–16. (in Russian)
3. Zhekamuhov M.K., Kambiev M.M. [On One Possible Mechanism of Large Potentials in the Crystallization of Aqueous Solutions]. *Russian Journal of Physical Chemistry A*, 1985, vol. 10, no. 11, pp. 2884–2886. (in Russian)
4. Andreev A.O. *Oblaka: proiskhozhdenie, klassifikatsiya, raspoznavanie* [Clouds: Origin, Classification, Recognition]. St. Petersburg, Russian State Hydrometeorological University, 2007.
5. Rys F., Val'dfogel' A. [Analysis of the Fractal Dimension of Clouds with Powerful Convective Currents]. *Fractals in Physics: Proceedings of the VI International Symposium on Fractals in Physics*, Trieste, 1985, pp. 644–649. (in Russian)
6. Kумыков Т.С., Паровик Р.И. Mathematical Modeling of Changes in the Charge Cloud Droplets in a Fractal Environment. *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2015, vol. 10, no. 1, pp. 12–17. (in Russian) DOI:10.18454/2079-6641-2015-10-1-12-17
7. Brownscombe J.L., Hallett J. Experimental and Field Studies of Precipitation Particles Formed by the Freezing of Supercooled Water. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 1967, vol. 93, no. 398, pp. 455–473. DOI: 10.1002/qj.49709339805
8. Adzhiev A.H., Kupovyh G.V. *Atmosfernye ehlektricheskie yavleniya na Severnom Kavkaze* [Atmospheric Electrical Phenomena in the North Caucasus]. Taganrog, Taganrog, 2008.
9. Kумыков Т.С. Modeling the Dynamics of Bubbles' Charge in the Fractal Cloud Droplets. *News of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2015, vol. 1, no. 6, pp. 23–27. (in Russian)
10. Rekhviashvili S.Sh. [Fractional Derivative Physical Interpretation]. *Nonlinear World*, 2007, vol. 5, no. 4, pp. 194–198. (in Russian)
11. Rekhviashvili S.Sh. The Lagrange Formalism with Fractional Derivatives in Problems of Mechanics. *Technical Physics Letters*, 2004, vol. 30, no. 1, pp. 55–57. DOI: 10.1134/1.1646715
12. Zhekamuhov M.K., Karov B.G., Kумыков Т.С. [Electrization and Spatial Charge Separation at the Air Bubbles Exhalation that Occurs During the Coagulation Growth of Hail Particles in a Cloud. Part 1. Kinetics of the Bubbles Exhalation Process Caused by Increasing Temperature of Overcooled Cloud Drops]. *Meteorologiya i Gidrologiya*, 2008, no. 11, pp. 44–52. (in Russian)

Received February 6, 2017