

**ОСОБЕННОСТИ ЗАДАНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СЕТЧАТЫХ АНИЗОГРИДНЫХ
КОНСТРУКЦИЙ**

Т.В. Бурнышева, О.А. Штейнбрехер, А.Д. Ульянов

Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного университета,
г. Новокузнецк, Российская Федерация

В работе рассматривается влияние способа задания граничных условий при численном расчете напряженно-деформированного состояния сетчатых анизотридных конструкций. Численный расчет основан на применении метода конечных элементов в вариационной постановке. В работе приведены варианты задания граничных условий на нижней и верхней кромках конструкции. Приведены схемы закрепления в виде шарнирной заделки и жесткого закрепления для нижней кромки конструкции. Рассмотрены варианты задания осевого нагружения в виде распределенной нагрузки и «жесткого» узла для верхней кромки конструкции. Приведена кинематика «жесткого» узла для конструкций с обшивкой и без обшивки. В качестве иллюстрации влияния вида закрепления на вычисления приведено сравнение численных расчетов и натурального эксперимента. Результаты работы показывают, что способ задания граничных условий оказывает значительное влияние на результаты расчета.

Ключевые слова: граничные условия; метод конечных элементов; дискретное моделирование; сетчатые оболочки.

Введение. Многие конструкции и сооружения, применяемые в строительстве и машиностроении, имеют вид многоэлементных сетчатых конструкций, образованных регулярной реберной структурой (рис. 1). В аэрокосмической отрасли, как правило, используют сетчатые оболочки, выполненные из композиционных материалов, которые являются силовыми и выступают составными элементами агрегатов космических летательных аппаратов [1, 2]. В этом случае набор структурных элементов конструкции должен обеспечивать прочность и жесткость оболочки под действующими нагрузками. В зависимости от наличия особенностей, таких как усиления и вырезы, различают анизотридные композиционные оболочки регулярной и нерегулярной структуры.

1. Дискретное моделирование. В работе [3] было показано, что для моделирования сетчатых конструкций, имеющих особенности, лучше использовать методы, основанные на дискретном моделировании, такие как метод конечных элементов (МКЭ) [4].

Одной из наиболее частых задач, связанных с данным классом конструкций, является расчет напряженно-деформированного состояния конструкции при осевом сжатии. Для этой задачи можно записать постановку в вариационном виде как минимум функционала

$$\Pi = \min_{u \in U} \Pi(u) \tag{1}$$

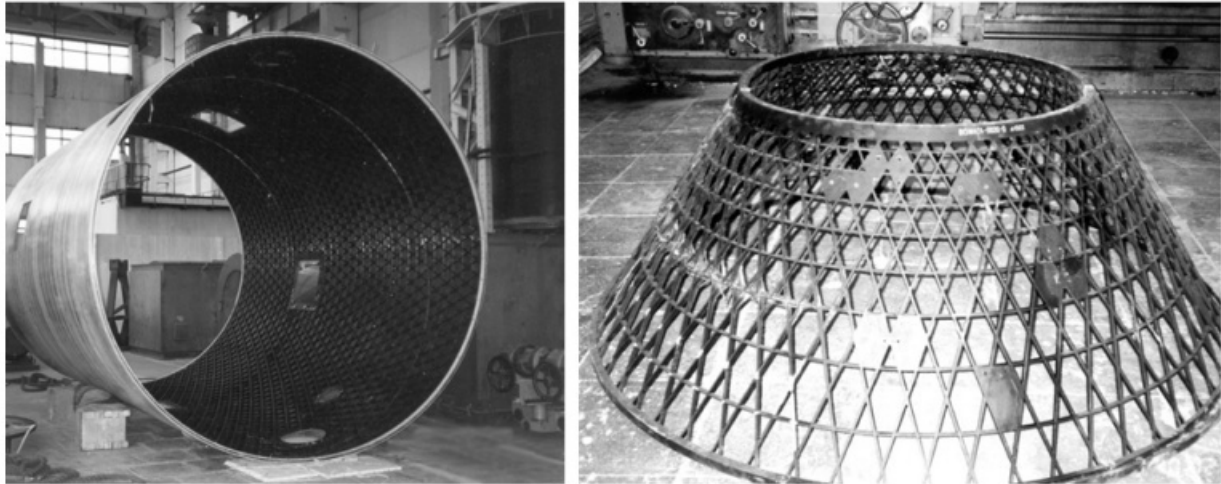


Рис. 1. Сетчатые анизотридные конструкции

при граничных условиях в перемещениях

$$U \Big|_{\Gamma_2} = 0 \quad (2)$$

и внешних нагрузках

$$P \Big|_{\Gamma_1} = p, \quad (3)$$

где $u = [u, v, w]^T$, $u \in U$ – варьируемое поле перемещений, U – пространство кинематически возможных полей перемещений, p – внешние нагрузки (внешняя сила, приложенная к верхней кромке оболочки), Γ – поверхность оболочки, Γ_1 – ее верхняя кромка, Γ_2 – ее нижняя кромка, $\Pi(u)$ – потенциальная энергия как функционал, зависящий от перемещений.

Для большей согласованности результатов численного моделирования с данными натурного эксперимента требуется адекватное задание граничных условий задачи (1) – (3). Известные САД-системы, как правило, не предоставляют конечным пользователям (инженерам и конструкторам) возможности выбора способа задания граничных условий. Кроме того, алгоритмы и модели, заложенные в САД-системе, закрыты для конечного пользователя. Возможность вариации задания граничных условий могут предоставить САД-системы с открытым кодом. Такой системой является пакет программ «Композит-НК Анизотрид» [5], разработанный на базе Новокузнецкого института (филиала) Кемеровского государственного университета. Данный пакет программ имеет открытый код, что позволяет инженерам и конструкторам вносить изменения в алгоритм расчета. Данный пакет апробирован на расчете напряженно-деформированного состояния и устойчивости сетчатых анизотридных конструкций. При этом сопоставления проводились как в сравнении с аналитическими расчетами, так и с известными САД-системами. В настоящее время пакет программ используется при моделировании и проектировании сетчатых анизотридных конструкций АО «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения» (г. Хотьково, Московская область). Дальнейшие рассуждения будут приведены в рамках алгоритмов, реализованных в пакете программ.

Как правило, САД-системы моделирования основаны на использовании МКЭ. Тогда ребра анизотридной сетчатой оболочки можно представить в виде набора балок,

а обшивка – в виде набора пластин. В качестве конечного элемента для ребер можно использовать двухузловую балку Тимошенко (рис. 2 б), а в качестве элемента для обшивки – трехузловой треугольник Зенкевича (рис. 2 а).

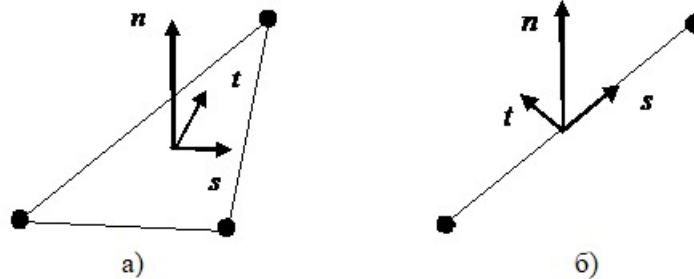


Рис. 2. Конечные элементы: для пластины (а), для балки (б), где (s, t, n) местная система координат на элементе

Узлы конечно-элементной сетки верхней и нижней кромок могут принадлежать, как только одномерным конечным элементам балок, так и одновременно элементам балок и двумерным элементам обшивки, в случае ее наличия.

2. Задание граничных условий. Для данного класса конструкций для задания граничного условия (2) на нижней кромке Γ_2 следует проводить закрепление в узлах перемещений и углов поворота либо шарнирным закреплением, либо жестким закреплением всех линейных перемещений и углов поворота узлов (заделкой). Шарнирное закрепление должно учитывать расположение точки крепления по толщине ребра (например, кольцевого) в физической модели и соотносить его с местом расположения в дискретной модели; в эту точку должен быть помещен узел конечно-элементной модели.

На рис. 3 представлена схема шарнирного закрепления перемещений u_t в точке со сдвигом по толщине спирального ребра. Точка O' расположена на нижней кромке оболочки и сдвинута по толщине кольцевого ребра на величину e_n от узла O на поверхности приведения. Закрепление перемещений вдоль оси t в точке O' будет соответствовать следующему условию $u_t + e_n \cdot \theta_s = 0$, где e_n – эксцентриситет для точки O' . Если же выбрать узел в точке O , то граничное условие принимает канонический вид: $u_t = 0$. Положение сечения относительно узла корректируется заданием эксцентриситета и введением дополнительного преобразования перемещений.

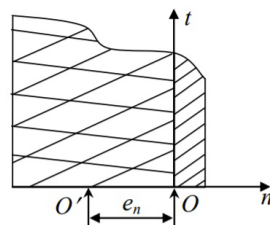


Рис. 3. Схема шарнирного закрепления в точке, отстоящей от поверхности приведения на нижней кромке оболочки: крупная штриховка – кольцевое ребро, мелкая штриховка – обшивка

При решении задач на осевое сжатие, действующая сила (3), как правило, прикладывается к верхней кромке конструкции Γ_1 . Используют два способа задания нагрузки: распределение сжимающей силы, в том числе и с учетом приложенного момента, по узлам верхней кромки и задание нагрузки через «жесткий» узел. Актуальным является исследование соответствия способа приложения нагрузки и способа ее моделирования для сетчатых анизотридных конструкций.

Рассмотрим кинематику «жесткого» узла, расположенного в центре окружности, определяющей верхнюю кромку сетчатой оболочки (рис. 3б).

«Жесткий» узел, со всеми присоединенными к нему элементами, может перемещаться только как жесткое тело, это позволяет привести нагрузку, распределенную по кромке произвольным образом, к действию сосредоточенных сил и моментов, приложенных в «жестком» узле.

«Жесткий» узел имеет шесть степеней свободы – три поступательных и три вращательных, причем эти перемещения отсчитываются в главной системе координат этого узла. Удобно выбирать оси этой системы параллельными осям общей декартовой системы координат (Y, Z, X) (рис. 4).

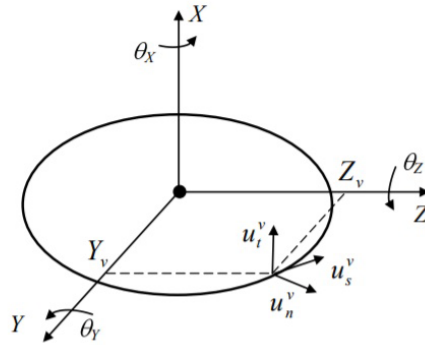


Рис. 4. Схема «жесткого» узла

Степени свободы «жесткого» узла определим как:

$$\delta = [u_Y, u_Z, u_X, \theta_Y, \theta_Z, \theta_X]^T. \quad (4)$$

Перемещения всех точек элементов, присоединенных к жесткому узлу, выражаются через перемещения жесткого узла и эксцентриситеты (координаты точек в главной системе жесткого узла) следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{s'}^{\nu} &= u_X \cdot \cos(X, s') + u_Y \cdot \cos(Y, s') + u_Z \cdot \cos(Z, s') + \theta_X [-Z_{\nu} \cdot \cos(Y, s') + \\ &\quad + Y_{\nu} \cdot \cos(Z, s')] + \theta_Y Z_{\nu} \cdot \cos(X, s') - \theta_Z Y_{\nu} \cdot \cos(X, s'), \\ u_{t'}^{\nu} &= u_X \cdot \cos(X, t') + u_Y \cdot \cos(Y, t') + u_Z \cdot \cos(Z, t') + \theta_X [-Z_{\nu} \cdot \cos(Y, t') + \\ &\quad + Y_{\nu} \cdot \cos(Z, t')] + \theta_Y Z_{\nu} \cdot \cos(X, t') - \theta_Z Y_{\nu} \cdot \cos(X, t'), \\ u_{n'}^{\nu} &= u_X \cdot \cos(X, n') + u_Y \cdot \cos(Y, n') + u_Z \cdot \cos(Z, n') + \theta_X [-Z_{\nu} \cdot \cos(Y, n') + \\ &\quad + Y_{\nu} \cdot \cos(Z, n')] + \theta_Y Z_{\nu} \cdot \cos(X, n') - \theta_Z Y_{\nu} \cdot \cos(X, n'), \end{aligned} \quad (5)$$

где $Y_{\nu}, Z_{\nu}, X_{\nu}$ – эксцентриситеты узла элемента относительно «жесткого» узла ν , $\{s', t', n'\}$ – главная система координат. Степени свободы узла ν , расположенного на верхней кромке оболочки Γ_2 и входящего в одномерный балочный элемент спирального или кольцевого ребра, будут иметь вид:

$$[u_{s'}, u_{t'}, u_{n'}, \theta_{s'}, \theta_{t'}, \theta_{n'}]^T = \hat{L}_{\nu} [u_Y, u_Z, u_X, \theta_Y, \theta_Z, \theta_X]^T, \quad (6)$$

где \hat{L}_ν – матрица перехода от главной системы «жесткого» узла (Y, Z, X) к главной системе $\{s', t', n'\}$ узла. Степени свободы узла, расположенного на верхней кромке оболочки и входящего в треугольный конечный элемент обшивки, будут иметь вид:

$$[u_{s'}, u_{t'}, u_{n'}, \tilde{\theta}_{s'}, \tilde{\theta}_{t'}]^T = \tilde{L}_\nu [u_Y, u_Z, u_X, \theta_Y, \theta_Z, \theta_X]^T, \quad (7)$$

где матрица \tilde{L}_ν – матрица перехода от главной системы «жесткого» узла (Y, Z, X) к главной системе $\{s', t', n'\}$ узла. Распределенная нагрузка задается или как равномерное распределение, или как доля осевой нагрузки с учетом приложенного момента. Таким образом, элементы верхней кромки моделируются отдельно.

3. Результаты моделирования сетчатой анизотридной конструкции. Моделирование приложенной нагрузки через «жесткий» узел было использовано при численном расчете составной силовой конструкции (рис. 5), включающей стрингерную алюминиевую часть и сетчатую композитную часть с вырезами и усилениями [6, 7].

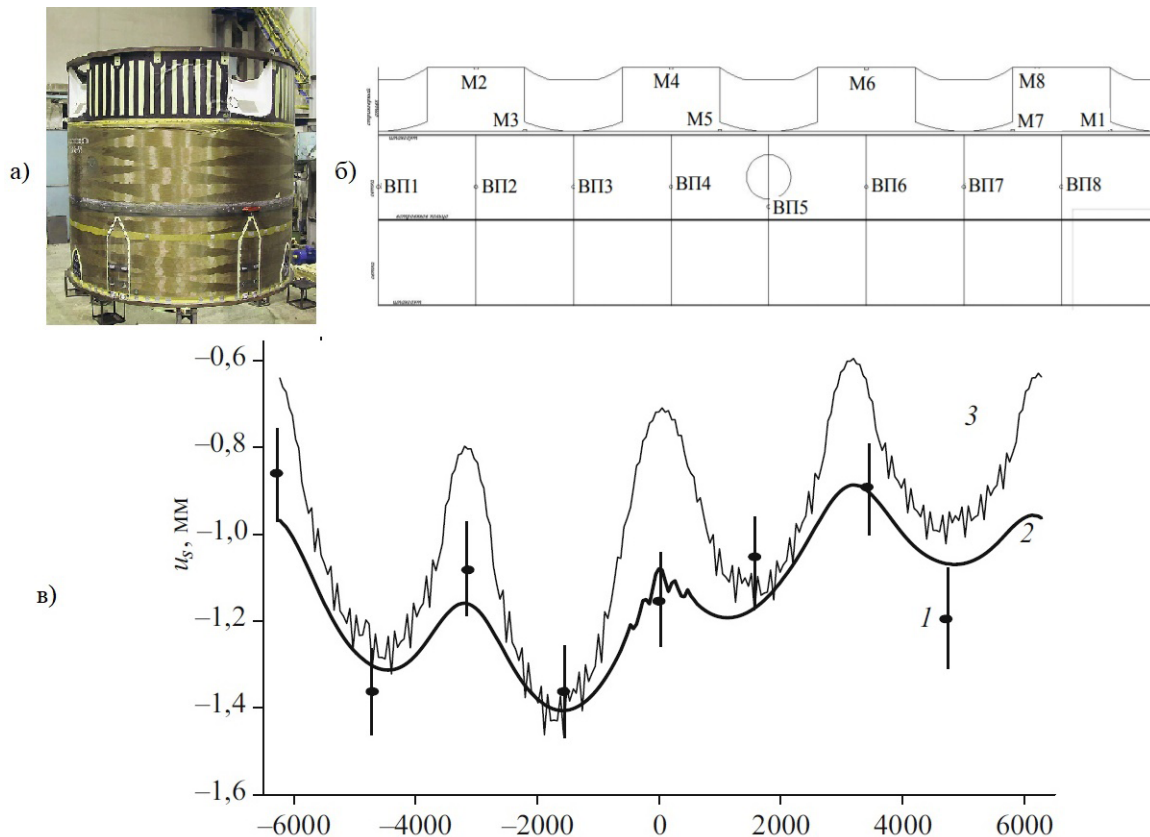


Рис. 5. Составная цилиндрическая оболочка: общий вид (а), схема расположения датчиков (б) и распределение осевых перемещений в композиционной части конструкции (в): 1 – данные натурального эксперимента, 2 и 3 – результаты численного расчета при задании нагрузки с использованием «жесткого» узла и задании распределенной нагрузки

Моделирование и численные расчеты проводились в пакете программ «Композит-НК Анизотрид». Натурный эксперимент на осевое сжатие проводился в АО «Центральный Научно-исследовательский институт специального машиностроения» пу-

тем нагружения сетчатой анизотридной оболочки через жесткую плиту. Результаты натурального эксперимента и численного расчета представлены в таблице.

Таблица

Результаты натурального эксперимента и численного расчета

Датчик	Измеренные перемещения, мм	Рассчитанные перемещения, мм	
		Нагружение через «жесткий» узел	Распределенное нагружение
ВП1	0,86	0,963	0,6382
ВП2	1,363	1,3038	1,3091
ВП3	1,083	1,161	0,8045
ВП4	1,363	1,4071	1,4631
ВП5	1,155	0,8905	0,719
ВП6	1,053	1,1713	1,1756
ВП7	0,829	0,8884	0,6021
ВП8	1,195	1,0687	1,0225

Разница между расчетами с заданием нагрузки распределено и через «жесткий» узел в точках крепления датчиков составила 2 – 32%. Сравнение результата численных расчетов с натурным экспериментом (рис. 5 в) показало, что при задании нагрузки через «жесткий» узел погрешность расчета составила 3 – 12%, а при распределенной нагрузке – 4 – 37%.

Таким образом, моделирование через «жесткий» узел в случае с нерегулярной сеткой, нагруженной через плиту, имеет большую согласованность с натурным экспериментом, в отличие от распределенного задания нагрузки.

Вывод. Схемы задания граничных условий при численном моделировании напряженно-деформированного состояния силовых анизотридных конструкций оказывают значительное влияние на результаты расчетов. Результаты моделирования позволяют предположить, что задание нагрузки через «жесткий» узел хорошо согласуется с данными натуральных экспериментов, в которых нагружение осуществляется посредством плиты. Тем не менее для каждой конструкции требуется проведение дополнительных исследований о корректности применения схем задания граничных условий.

Литература

1. Васильев, В.В. Композитные сетчатые балочные элементы для авиационных конструкций / В.В. Васильев, А.Ф. Разин // Вопросы оборонной техники. – 2006. – № 1/2. – С. 3–6.
2. Васильев, В.В. Анизотридные композитные сетчатые конструкции – разработка и приложение к космической технике / В.В. Васильев, В.А. Барынин, А.Ф. Разин, С.А. Петровский, В.И. Халиманович // Композиты и наноструктуры. – 2009. – № 3. – С. 38–50.
3. Бурнышева, Т.В. Сравнение дискретного и континуального подхода к расчету напряженного состояния сетчатых оболочечных конструкций при статическом нагружении / Т.В. Бурнышева, В.О. Каледин // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 4. – С. 113–116.

4. Бате, К.-Ю. Методы конечных элементов / К.-Ю. Бате. – М.: Физматлит, 2010.
5. Каледин, В.О. Программная система для алгоритмизации численного решения задач механики сплошных сред / В.О. Каледин, Я.С. Крюкова, Н.В. Нагайцева, Е.В. Равковская // Известия Алтайского государственного университета. – 2014. – № 1-1 (81). – С. 161–164.
6. Бурнышева, Т.В. Оценка взаимного влияния составных частей оболочечной конструкции при осевом сжатии / Т.В. Бурнышева, А.Ф. Разин, О.А. Штейнбрехер // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. – № 2. – С. 127–131.
7. Каледин, В.О. Интерпретация данных натуральных испытаний оболочечной композитной конструкции при статическом осевом сжатии / В.О. Каледин, А.Ф. Разин, Т.В. Бурнышева, О.А. Штейнбрехер // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2015. – Т. 81, № 3. – С. 53–58.

Татьяна Витальевна Бурнышева, доктор технических наук, доцент, декан, факультет «Информационные технологии», Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного университета (г. Новокузнецк, Российская Федерация), tburn@mail.ru.

Ольга Александровна Штейнбрехер, старший преподаватель, кафедры «Информатика и вычислительная техника им. В.К. Буторина», Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного университета (г. Новокузнецк, Российская Федерация), olga_sht@mail.ru.

Артем Дмитриевич Ульянов, аспирант, кафедры «Математика и математическое моделирование», Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного университета (г. Новокузнецк, Российская Федерация), zbrg@mail.ru.

Поступила в редакцию 18 сентября 2017 г.

MSC 74S05

DOI: 10.14529/mmp180112

FEATURES OF THE BOUNDARY CONDITIONS IN THE MODELLING MESH DESIGNS ANIZOGRIDNYH

T. V. Burnysheva, O. A. Shteinbreher, A. D. Ulyanov

Novokuznetsk Branch Institute of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russian Federation

E-mail: tburn@mail.ru, olga_sht@mail.ru, zbrg@mail.ru

The influence of boundary conditions in the numerical calculation of the stress-strain construction of anisogrid structures is considered in the paper. The numerical calculation is based on the application of the finite element method in the variational formulation. The paper presents variants of the fulfillment of boundary conditions on the lower and upper edges of the construction. The schemes of fastening in the form of hinged closing and rigid fastening for the bottom edge of designs. The variants of specifying axial loading in the form of a distributed load and a "hard" node for the upper edge of the structures are considered. The article presents the kinematics of a "hard" node for lattice construction. As an example of the effect of fixing on calculations, a comparison of the number calculations and field experiment. The results show that the way to set the boundary conditions has a significant effect on the calculation results.

Keywords: boundary conditions; finite element method; discrete modelling; lattice shells.

References

1. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruktsey iz kompozitnykh materialov* [Mechanics of Constructions from Composite Materials]. Moscow, Mechanical engineering, 1988. (in Russian)
2. Vasil'ev V.V., Barynin B.A., Razin A.F., Petrakovskiy S.A., Khalimanovich V.I. [Anizogrid Composite Mesh Design – Development and Application of Space Technology]. *Composites and Nanostructures*, 2009, no. 3, pp. 38–50. (in Russian)
3. Burnysheva T.V., Kaledin V.O. [Comparison of Discrete and Continual Approach to Calculation of a Stressed State of Network Capsulate Designs at a Static Loading]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ya*, 2011, no. 4, pp. 113–115. (in Russian)
4. Bathe K.-Yu. *Finite Elements Procedures*. New Jersey, Prentice Hall, Pearson Education, 2010.
5. Kaledin V.O., Kryukova Ya.S., Nagaytseva N.V., Ravkovskaya E.V. [Software System for Algorithmization Numerical Solution of Problems of Continuum Mechanics]. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2014, no. 1-1 (81), pp. 161–164. (in Russian)
6. Burnysheva T.V., Razin A.F., Shteynbrekher O.A. [Evaluation of the Mutual Influence of the Parts Shell Structures under Axial Compression]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ya*, 2012, no. 2, pp. 127–131. (in Russian)
7. Kaledin V.O., Razin A.F., Burnysheva T.V., Shteynbrekher O.A. [Interpretation of These Field Tests of a Capsulate Composite Design at a Static Axial Compression]. *Factory Laboratory. Diagnostics of Materials*, 2015, vol. 81, no. 3, pp. 53–58. (in Russian)

Received September 18, 2017