УДК 532.546+519.6 DOI: 10.14529/mmp180113

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ

Х.М. Гамзаев, Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан

Рассматриваются две обратные задачи по определению коэффициентов для нелинейного уравнения диффузии-реакции типа Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова. Для решения обеих задач сначала проводятся дискретизация производной по времени. В результате обе задачи сводятся к дифференциально-разностным задачам относительно функций, зависящих от пространственной переменной. Для численного решения полученных задач предлагается безытерационный вычислительный алгоритм, основанный на сведении дифференциально-разностной задачи к двум прямым краевым задачам и линейному уравнению относительно искомого коэффициента.

Ключевые слова: уравнение диффузии-реакции; уравнение Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова; коэффициентная обратная задача; интегральное условие; явно-неявные схемы.

Введение. Одним из нелинейных уравнений типа «диффузия-реакция» является логистическое уравнение с диффузией

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + ku(x,t)(1-u(x,t)). \tag{1}$$

Это уравнение предложено Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым [1] и Фишером [2] для моделирования процесса распространения генной волны. Уравнение (1), также называемое уравнением Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова (ФКПП), находит применение во многих областях: в задачах тепло- и массообмена, теории горения, биологии и экологии, в физике плазмы и задачах теории фазовых переходов и т.д. [1–3].

Необходимо отметить, что многие характеристики физических, химических, биологических, экологических и т.д. процессов, описываемых уравнением (1), во многом зависит от коэффициентов данного уравнения. В связи с этим важными считаются задачи по определению этих коэффициентов с целью обеспечения желаемого протекания процессов.

1. Постановка задачи и метод решения. Задача А. Пусть рассматривается уравнение ФКПП

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D(t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + k(t)u(x,t)(1-u(x,t)), \quad 0 < x < l,\, 0 < t \le T, \tag{2}$$

где $D(t) > 0$, со следующими начальным и граничным условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

$$u(0,t) = p(t), \quad u(l,t) = f(t). \tag{4}$$

Предположим, что помимо функции $u(x,t)$ неизвестной является также функция $k(t)$. Требуется восстановление этой функции по следующему интегральному условию

$$\int_0^l u(x,t)dx = r(t), \tag{5}$$

где $r(t)$ – заданная функция. Предполагается, что при этом выполняется условие согласования

$$\varphi(0) = p(0), \quad \varphi(l) = f(0), \quad \int_0^l \varphi(x)dx = r(0). \tag{6}$$

Таким образом, задача заключается в определении функций $u(x,t)$ и $k(t)$, удовлетворяющих уравнению (2) и условиям (3) – (5). Данная задача относится к классу коэффициентных обратных задач [4, 5]. Отметим, что вопросы существования, единственности и разрешимости, а также некоторые подходы к численному решению коэффициентных обратных задач для параболических уравнений исследованы в [6–8].

Для решения задачи (2) – (5) сначала дискретизируем уравнение (2) по переменной t. Уравнение (2) и условия (2) – (5) запишем при t_j, $j = \overline{1,m}$. Производную $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ в уравнении (2) аппроксимируем разностью «назад» $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=t_j} \approx \dfrac{u(x,t_j) - u(x,t_{j-1})}{\Delta t}$, где $\Delta t = T/m$ – шаг по времени. Для диффузионного члена используем неявную аппроксимацию по времени, а для нелинейного младшего члена – полуявную аппроксимацию. Обозначив $u^j(x) \approx u(x,t_j)$, задачу (2) – (5) запишем в следующем виде

$$\frac{u^j(x) - u^{j-1}(x)}{\Delta t} = D^j \frac{d^2u^j(x)}{dx^2} + k^j u^{j-1}(x)(1 - u^{j-1}(x)), \quad 0 < x < l, \tag{7}$$

$$u^j(0) = p^j,\ u^j(l) = f^j, \tag{8}$$

$$\int_0^l u^j(x)dx = r^j, j = 1,2,\ldots,m, \tag{9}$$

$$u^0(x) = \varphi(x), \tag{10}$$

где $k^j \approx k(t_j), r^j = r(t_j), p^j = p(t_j), f^j = f(t_j), D^j = D(t_j)$.

Предположим, что решение полученной дифференциально-разностной задачи (7) – (10) на каждом временном слое $j = 1,2,\ldots,m$ можно представить в виде

$$u^j(x) = w^j(x) + k^j \phi^j(x), \tag{11}$$

где $w^j(x), \phi^j(x)$, $j = \overline{1,m}$ – неизвестные функции. Подставив соотношение (11) в (7), (8) и учитывая произвольности функций $w^j(x), \phi^j(x)$, получим

$$\frac{w^j(x) - u^{j-1}(x)}{\Delta t} - D^j \frac{d^2w^j(x)}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < l, \tag{12}$$

$$w^j(0) = p^j,\ w^j(l) = f^j, \tag{13}$$

$$\frac{\phi^j(x)}{\Delta t} - D^j \frac{d^2\phi^j(x)}{dx^2} - u^{j-1}(x)(1 - u^{j-1}(x)) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{14}$$

$$\phi^j(0) = 0, \quad \phi^j(l) = 0, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{15}$$

Таким образом, решение обратной задачи (7) – (10) $u^j(x)$, k^j, $j = \overline{1,m}$ определяется по следующей схеме: для каждого фиксированного значения $j = 1, 2, \ldots, m$ определяются решения прямых задач (12), (13) и (14), (15); полученные решения подставляются в дополнительное соотношение (9) и из полученного уравнения определяется приближенное значение искомой функции $k(t)$ при $t = t_j$, т.е.

$$k^j = \left(r^j - \int\limits_0^l w^j(x)dx \right) / \int\limits_0^l \phi^j(x)dx$$

по формуле (11) определяется приближение к искомой функции $u(x,t)$ при $t = t_j$.

Для численного решения задач (12), (13) и (14), (15) можно использовать метод конечных разностей [6].

Задача B. Предположим, что снова рассматривается уравнение ФКПП

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + k(t)u(x,t)(1 - u(x,t)), \, 0 < x < l, \, 0 < t \le T, \tag{16}$$

со следующими начальным и граничным условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{17}$$

$$u(0,t) = p(t), \, u(l,t) = f(t). \tag{18}$$

Помимо функции $u(x,t)$ неизвестной является также функция $D(t)$. Требуется восстановление этой функции по следующему интегральному условию

$$\int\limits_0^l u(x,t)dx = r(t). \tag{19}$$

Предполагается, что выполняются условия согласования (6).

Предположим, что коэффициент диффузии представляется в виде $D(t) = D_0 + d(t) > 0$, где $D_0 = \mathrm{const} > 0$ заданное число, а $d(t)$ – неизвестная функция.

Снова дискретизируем производную $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ разностью «назад» в уравнении (16) при t_j, $j = \overline{1,m}$ и используем явно-неявную аппроксимацию по времени для диффузионного члена, а полуявную аппроксимацию для нелинейного младшего члена. Тогда задача (16) – (19) с учетом представления коэффициента диффузии запишется в следующем виде

$$\frac{u^j(x) - u^{j-1}(x)}{\Delta t} = D_0 \frac{d^2u^j(x)}{dx^2} + d^j \frac{d^2u^{j-1}(x)}{dx^2} + k^j u^{j-1}(x)(1 - u^{j-1}(x)), 0 < x < l, \tag{20}$$

$$u^j(0) = p^j, \, u^j(l) = f^j, \tag{21}$$

$$\int\limits_0^l u^j(x)dx = r^j, j = 1, 2, \dots, m, \tag{22}$$

$$u^0\left(x\right) = \varphi(x), \tag{23}$$

где $d^j \approx d(t_j)$.

Предположим, что решение дифференциально-разностной задачи (20)–(23) на каждом временном слое $j = 1, 2, \dots, m$, можно представить в виде

$$u^j\left(x\right) = w^j(x) + d^j \phi^j\left(x\right), \tag{24}$$

где $w^j(x), \phi^j\left(x\right)$, $j = \overline{1, m}$ – неизвестные функции. Подставив соотношение (24) в (20), (21) получим следующие краевые задачи относительно функций $w^j(x)$, $\phi^j\left(x\right)$

$$\frac{w^j\left(x\right) - u^{j-1}\left(x\right)}{\Delta t} - D_0 \frac{d^2 w^j(x)}{dx^2} - k^j u^{j-1}(x)(1 - u^{j-1}(x)) = 0,\ 0 < x < l, \tag{25}$$

$$w^j(0) = p^j, \quad w^j(l) = f^j. \tag{26}$$

$$\frac{\phi^j(x)}{\Delta t} - D_0 \frac{d^2 \phi^j(x)}{dx^2} - \frac{d^2 u^{j-1}(x)}{dx^2} = 0,\ 0 < x < l\,, \tag{27}$$

$$\phi^j\left(0\right) = 0, \quad \phi^j\left(l\right) = 0, j = 1, 2, \dots, m. \tag{28}$$

Подставив (24) в интегральное условие (22), получим

$$d^j = \left(r^j - \int\limits_0^l w^j(x)dx \right) \Big/ \int\limits_0^l \phi^j(x)dx. \tag{29}$$

Таким образом, решение обратной задачи (20) – (23) $u^j\left(x\right)$, d^j, $j = \overline{1, m}$ определяется по следующей схеме: для каждого фиксированного значения $j = 1, 2, \dots, m$, определяются решения прямых задач (25), (26) и (27), (28); по формуле (29) определяется приближенное значение искомой функции $d(t)$ при $t = t_j$; и, по формуле (24) определяется приближение к искомой функции $u(x, t)$ при $t = t_j$. Для численного решения задач (25), (26) и (27), (28) также можно использовать метод конечных разностей.

2. Результаты численных расчетов. На основе предложенных вычислительных алгоритмов были проведены численные эксперименты для модельных задач. Ниже приводятся результаты численного эксперимента для двух модельных задач. Схема численного эксперимента заключается в следующем: задаются функции $k(t)$ (в задаче A) и $D(t)$ (в задаче B) и определяются решения прямых задач (2) – (5) и (16) – (19). Далее по формуле $r(t) = \int\limits_0^l u(x, t)dx$ определяется функция $r(t)$, и найденная зависимость принимается за точные данные для восстановления функции $k(t)$ и $D(t)$, соответственно.

Результаты численного эксперимента, проведенного для случая $l = 1$, $T = 1$, $k(t) = 3 + 2\cos 1000t$, $D_0 = 0,5$, $d(t) = 0,3 + 0,2\sin 100t$, $p(t) = 1$, $f(t) = 0$, $\varphi(x) = 1 - x$ представлены в таблицах 1, 2.

Таблица 1

Численные результаты по задаче A

t_j	Значение функции $k(t)$	
	Точное	Вычисленное при $\Delta t = 10^{-4}$, $\Delta x = 4 \cdot 10^{-2}$
0,1	4,725	4,725
0,2	3,974	3,974
0,3	2,956	2,956
0,4	1,949	1,949
0,5	1,232	1,232
0,6	1,002	1,002
0,7	1,322	1,322
0,8	2,104	2,104
0,9	3,132	3,132
1,0	4,125	4,125

Таблица 2

Численные результаты по задаче B

t_j	Значение функции $d(t)$	
	Точное	Вычисленное при $\Delta t = 10^{-4}$, $\Delta x = 4 \cdot 10^{-2}$
0,1	0,191	0,192
0,2	0,483	0,483
0,3	0,102	0,102
0,4	0,449	0,449
0,5	0,248	0,247
0,6	0,239	0,239
0,7	0,445	0,445
0,8	0,101	0,101
0,9	0,479	0,479
1,0	0,199	0,199

Результаты численных экспериментов показывают, что искомые функции $k(t)$ и $D(t)$ восстанавливаются с высокой точностью при всех расчетных сетках по времени.

Анализ результатов численного экспериментов свидетельствует, что для повышения точности решений необходимо использовать мелкие шаги разностной сетки.

Заключение. В предложенном вычислительном алгоритме эффект регуляризации обеспечивается за счет выбора разностной сетки по времени.

Литература

1. Fisher, R.A. The Wave of Advance of Advantageous Genes / R.A. Fisher // Annals of Eugenics. – 1937. – № 7. – P. 355–369.

2. Колмогоров, А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, И.С. Пискунов // Бюллетень МГУ. Секция А. – 1937. – Т. 1, № 6. – P. 1–25.

3. Маслов, В.П. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. – М.: Наука, 1987.
4. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009.
5. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
6. Камынин, В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения / В.Л. Камынин // Математические заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – P. 207–217.
7. Кожанов, А.И. Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 6. – С. 961–972.
8. Kerimov, N.B. An Inverse Coefficient Problem for the Heat Equation in the Case of Nonlocal Boundary Conditions / N.B. Kerimov, M.I. Ismailov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – V. 396, № 2. – P. 546–554.

Ханлар Мехвали оглу Гамзаев, доктор технических наук, профессор, кафедра «Общая и прикладная математика», Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности (г. Баку, Азербайджан), xan.h@rambler.ru.

Поступила в редакцию 12 сентября 2017 г.

MSC 65N21, 80A23 **DOI: 10.14529/mmp180113**

A NUMERICAL METHOD OF SOLVING THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR THE NONLINEAR EQUATION OF DIFFUSION-REACTION

Kh.M. Gamzaev, Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan, xan.h@rambler.ru

We consider two inverse problems for determining the coefficients for a one-dimensional nonlinear diffusion-reaction equation of the Fisher–Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov type. The first problem consists in determining the kinetic coefficient for a nonlinear lower term, depending only on the time variable, according to a given integral condition. And the second problem consists in determining the time-dependent diffusion coefficient, again according to a given integral condition.

To solve both problems, the time derivative of the derivative is first sampled. In the first problem, the diffusion term is approximated in time according to the implicit scheme, and the nonlinear minor term in the semi-explicit scheme. And in the second problem, the diffusion term is approximated in time in an explicitly implicit scheme, and the nonlinear minor term is again in a semi-explicit scheme. As a result, both problems reduce to differential-difference problems with respect to functions depending on the spatial variable. For numerical solution of the problems obtained, a non-iterative computational algorithm is proposed, based on reduction of the differential-difference problem to two direct boundary-value problems and a linear equation with respect to the unknown coefficient. On the basis of the proposed numerical method, numerical experiments were performed for model problems.

Keywords: diffusion-reaction equation; Fisher–Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation; coefficient inverse problem; integral condition; differential-difference problem; explicitly implicit schemes.

References

1. Fisher R.A. The Wave of Advance of Advantageous Genes. *Annals of Eugenics*, 1937, no 7, pp. 355–369. DOI: 10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x
2. Kolmogorov A.N., Petrovsky I.G., Piskunov I.S. [A Study of the Diffusion Equation with Increase in the Amount of Substance, and Its Application to a Biological Problem]. *Bulletin of the Moscow State University, Section A*, 1937, vol. 1, no. 6, pp. 1–25.
3. Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov K.A. *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes*, Dordrecht, Kluwer, 1995. DOI: 10.1007/978-94-011-0409-8
4. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Walter de Gruyter, 2007. DOI: https:10.1515/9783110205794
5. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications*. De Gruyter, Germany, 2011. DOI: 10.1515/9783110224016
6. Kamynin V.L. The Inverse Problem of Determining the Lower-Order Coefficient in Parabolic Equations with Integral Observation. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 2, pp. 205–213. DOI: 10.1134/S0001434613070201
7. Kozhanov A.I. Parabolic Equations with Unknown Time-Dependent Coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 6, pp. 956–966. DOI: 10.1134/S0965542517060082
8. Kerimov N.B., Ismailov M.I. An Inverse Coefficient Problem for the Heat Equation in the Case of Nonlocal Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, vol. 396, no. 2, pp. 546–554. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.06.046

Received September 12, 2017