

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ИГР С ИЕРАРХИЧЕСКИМ ВЕКТОРОМ ИНТЕРЕСОВ

Т.В. Меньшиц, Воронежский государственный университет, г. Воронеж,
Российская Федерация

Многие прикладные задачи могут быть решены с использованием методов теории игр. Одним из вопросов, исследуемых в теории игр, является нахождение ситуаций равновесия, которые предполагают предварительное определение значений выигрыша игроков.

Среди различных вариантов игр выделяются игры с иерархическим вектором интересов. В таких играх предполагается, что множество игроков распределено по иерархически организованным группам. Каждый игрок входит в несколько групп и выделяет для каждой группы определенную часть своего ресурса, что позволяет получать ему определенный выигрыш. В этом случае ситуация равновесия по Нэшу – это такое распределение ресурсов всех игроков, при котором каждый игрок будет получать максимальный выигрыш в игре.

Задача нахождения равновесия по Нэшу в играх с иерархическим вектором интересов решена Гермейером и Вателем. Для использования данной теоремы необходимо определение некоторых условий и параметров, к которым, в частности, относится распределение игроков по иерархически упорядоченным группам, оценки важности групп для игроков и значения выигрыша для игроков.

В работе решены указанные задачи в предположении, что распределение игроков по группам осуществляется на основе совпадения их целей. При этом для оценки важности групп использован метод анализа иерархий, позволяющий давать количественные оценки на основе качественных сравнений целей игроков. Для построения иерархической структуры групп игроков использованы раскрашенные графы, вершины которых соответствовали игрокам, ребра отражали совпадения целей у игроков, а цвета ребер позволяли различать цели. Группы игроков в этом случае соответствовали максимальным одноцветным кликам.

Ключевые слова: игры с иерархическим вектором интересов; распределение игроков по группам; оценки важности групп; цели игроков.

Введение. В играх с иерархическим вектором интересов [1, 2] предполагается, что n игроков образуют сообщество, которое разбивается на группы. Считается, что само сообщество – группа нулевого уровня S^0 . Она разбивается на группы первого уровня, каждая из которых, в свою очередь, разбивается на группы второго уровня и т.д. S_j^k – множество номеров игроков, входящих в группу j уровня k . Последний m -й уровень, образуют группы, каждая из которых состоит только из одного игрока.

В играх этого типа принято, что выигрыши каждого i -го игрока w_i зависят от величины выигрыша w_j^k каждой группы S_j^k , в которую он входит и важности λ_i^k данной группы для него.

В свою очередь w_j^k зависит от величины ресурсов x_l , выделяемых всеми игроками, входящими в группу S_j^k . Предполагается, что w_j^k монотонно возрастает при увеличении x_l для каждого игрока l . Явный вид функции w_j^k определяется отдельно для каждой прикладной задачи [3].

Таким образом, чем большим ресурсом обладает группа, тем больше выигрыш для входящих в нее игроков.

Однако вопросы о разбиении множества игроков на иерархически организованные группы и оценка важности групп для игроков ранее не рассматривались. Решение этих задач является целью данной работы.

Графовая модель. Очевидно, что объединение игроков в группу может быть вызвано только наличием у них общей цели. Таким образом, каждый игрок может иметь несколько целей, а цели отдельных игроков могут как совпадать, так и различаться [4]. Данная ситуация может быть описана на языке теории графов.

Обозначим через Z_k – множество целей игрока k ; $Z = \cup_{k=1}^n Z_k$ – множество целей всех игроков. Построим неориентированный раскрашенный граф $G = (I, E, \mu)$, где I – множество вершин, которые соответствуют игрокам ($|I| = n$); E – множество ребер, соединяющих те вершины, которые имеют общие цели; $\mu : E \rightarrow Z$ – функция такой раскраски ребер, что каждой цели соответствует свой цвет ребра.

В отличие от классического определения клики [5] введем аналогичное определение для раскрашенного графа. Будем называть одноцветной кликой множество попарно смежных вершин, причем смежность определяется ребрами одного цвета. Одноцветная клика называется максимальной, если она не содержится в другой клике с большим количеством вершин.

Попадание игроков в одну группу определяется наличием у них общей цели. Следовательно, указанные игроки соответствуют вершинам графа, объединенным в клики, которые образуют ребра, имеющие цвет, соответствующий данной цели. Весом клики будем называть выигрыш соответствующей группы.

Выигрыш каждого игрока тем больше, чем больше выигрыш групп, в которые он входит. Естественно предположить, что чем больше важность цели для игрока, тем больше ресурс, который он готов выделить для группы, определяемой этой целью, и, следовательно, выигрыш самого игрока.

Обратимся к разработке метода оценки важностей целей и весов клик, определяемых ими.

Оценки важности целей и весов клик. Понятие «важность» является качественным понятием. Для получения количественных оценок качественных показателей может использоваться метод анализа иерархии, предложенный Томасом Саати [6].

Суть метода состоит в следующем. На основе попарного сравнения экспертных оценок важности целей игрока строится матрица по следующему правилу.

Шаг 1. Составить матрицу $A = (a_{ij})$ следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если цели } i \text{ и } j \text{ одинаково важны;} \\ 3, & \text{если цель } i \text{ несколько важнее цели } j; \\ 5, & \text{если цель } i \text{ существенно важнее цели } j; \\ 7, & \text{если цель } i \text{ значительно важнее цели } j; \\ 9, & \text{если цель } i \text{ абсолютно важнее цели } j; \end{cases}$$

$$a_{ij} = a_{ji}^{-1}.$$

Шаг 2. Найти собственный вектор x матрицы $A = (a_{ij})$, соответствующий ее максимальному собственному значению.

Шаг 3. Нормировать вектор $x = (x_0, \dots, x_m)$ (то есть получить $\sum_{i=0}^m x_i = 1$).

Координаты вектора x можно рассматривать в качестве коэффициентов важности целей для данного игрока.

Таким образом, описан метод, позволяющий количественно оценить важности целей для каждого игрока.

В соответствии с ранее сделанным предположением каждый игрок i выделит для группы S_j^k ресурс $\lambda_i^k \cdot x_i$, где x_i – общий ресурс игрока i . Следовательно вес одноцветной клики, соответствующей группе S_j^k может быть определен, как $w_j^k(\lambda_i^k \cdot x_i, i \in S_j^k)$.

Построение иерархически организованных групп. Группы игроков, соответствующих максимальным кликам, имеющим наибольший вес, составляют первый уровень иерархии.

Опишем процедуру формирования иерархической структуры групп игроков. Найдем максимальную одноцветную клику с наибольшим числом вершин, которая будет соответствовать первой группе первого уровня S_1^1 . Эту процедуру будем применять к оставшимся вершинам до их исчерпания. Таким образом, будут найдены группы первого уровня иерархии.

Из каждой клики, соответствующей группам первого уровня, исключим определяющие их ребра. К каждой из них в отдельности применим описанную выше процедуру. Тем самым будут определены группы второго уровня иерархии. Процесс продолжается до тех пор, пока все клики не станут одновершинными, что соответствует последнему уровню m .

Численный пример. Пусть множество игроков и их цели описаны графом, приведенном на рис. 1 (различие целей (цветов ребер) показано различием типов линий).

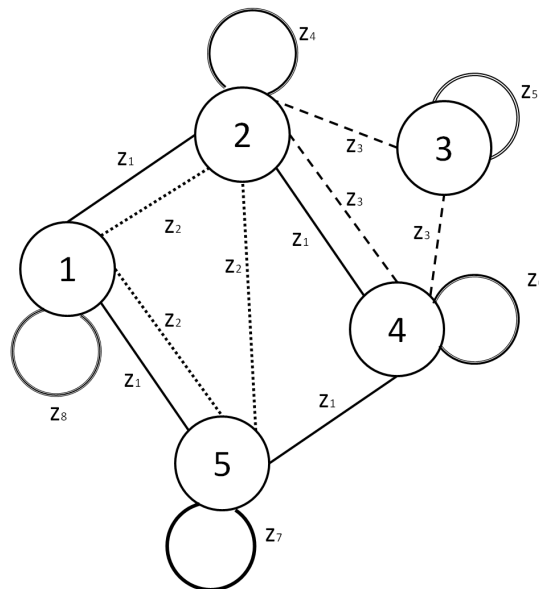


Рис. 1. Неориентированный граф с цветными ребрами, описывающий множество игроков

В результате использования метода получено следующее разбиение сообщества игроков на иерархически упорядоченные группы (рис. 2):

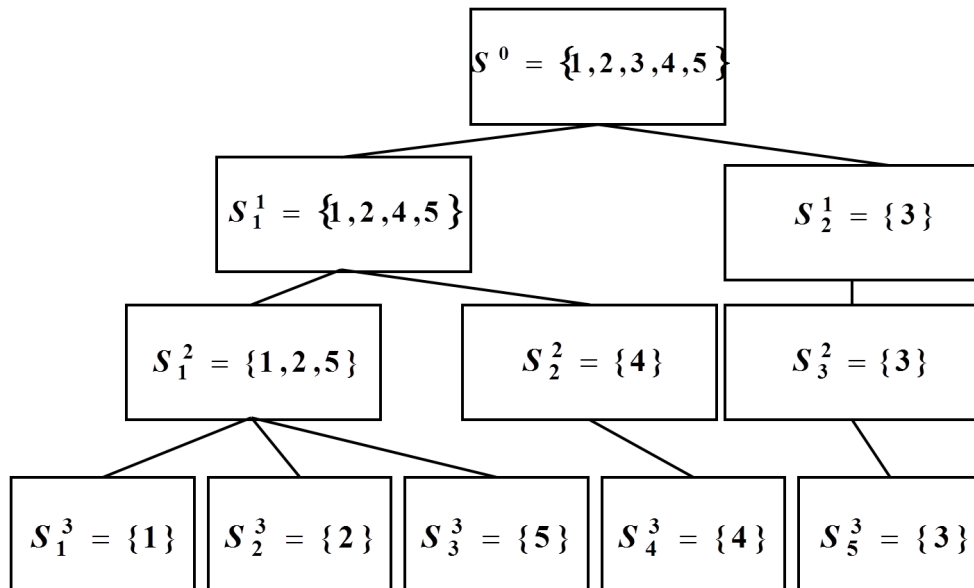


Рис. 2. Иерархическое представление групп субъектов

Заключение. Описанные методы позволяют находить иерархическую структуру групп игроков, позволяющую максимизировать их выигрыши. Кроме того, найденные параметры позволяют использовать теорему Гермейера и Вателя, сформулированную и доказанную в [1], для нахождения равновесия по Нэшу.

Литература

1. Гермейер, Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами / Ю.Б. Гермейер. – М.: Наука, 1976.
2. Гермейер, Ю.Б. Игры с иерархическим вектором интересов / Ю.Б. Гермейер, И.А. Ватель // Техническая комбинаторика. – 1974. – № 3. – С. 54–69.
3. Меньших, Т.В. Использование игр с иерархическим вектором интересов для решения задач обеспечения информационной безопасности / Т.В. Меньших // Охрана, безопасность, связь. – 2017. – № 1–3. – С. 82–86.
4. Месарович, М. Теория иерархических многоуровневых систем / М. Месарович, Д. Мако, И. Такаха. – М.: Мир, 1973.
5. Емеличев, В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич – М.: Наука, 1990.
6. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М.: Радио и связь, 1993.

Татьяна Валерьевна Меньших, магистрант, Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), tasay94@gambler.ru.

Поступила в редакцию 7 июля 2018 г.

**ESTIMATION OF PARAMETERS OF GAMES
WITH A HIERARCHICAL VECTOR OF INTERESTS**

T. V. Menshikh, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation,
tasay94@rambler.ru

Many applied problems can be solved using the methods of the game theory. One of the issues studied in the game theory is finding of equilibrium situations, which presuppose a preliminary determination of the values of players' winnings.

Among the various games there are games with a hierarchical interest vector. In such games it is assumed that a lot of players are distributed in hierarchically organized groups. Each player enters into several groups and allocates for each group a certain part of his resource, which allows him to receive a certain prize. In this case, the Nash equilibrium situation is a distribution of the resources of all players, in which each player will receive the maximum winnings in the game.

The problem of finding the Nash equilibrium in games with a hierarchical vector of interests was solved by Germeyer and Vatel. To use this theorem, it is necessary to define certain conditions and parameters, which include, in particular, distribution of players in hierarchically ordered groups, the evaluation of the importance of groups for players, and the value of gains for players.

In the work these problems are solved under the assumption that the distribution of players into groups is carried out on the basis of the coincidence of their goals. At the same time, to assess the importance of groups, the hierarchy analysis method was used, which makes it possible to give quantitative estimates based on qualitative comparisons of the players' goals. For the construction of the hierarchical structure of groups of players, coloured graphs were used, the vertices of which corresponded to the players, the edges reflected the coincidence of the goals of the players, and the colours of the ribs made it possible to distinguish goals. The groups of players in this case corresponded to the maximum single-colour clicks.

Keywords: games with a hierarchical interest vector; distribution of players into groups; assessing the importance of groups; goals of players.

References

1. Germeyer Yu.B. *Igry s neprotivopolozhnyimi interesami* [Games with Non-Opposing Interests]. Moscow, Nauka, 1976. (in Russian)
2. Germeyer Yu.B., Vatel I.A. Games with a Hierarchical Interest Vector. *Tekhnicheskaya Kombinatorika*, 1974, no. 3, pp. 54–69. (in Russian)
3. Menshikh T.V. The Use of Games with a Hierarchical Vector of Interests for Solving Problems of Information Security. *Oohrana, bezopasnost, svyaz*, 2017, no. 1–3, pp. 82–86. (in Russian)
4. Mesarovic M.D., Macko D., Takahara Y. *Theory of Hierarchical Multilevel Systems*. N.Y., London, Academic Press, 1970.
5. Emelichev V.A., Melnikov O.I., Sarvanov V.I., Tyshkevich R.I. *Lekcii po teorii grafov* [Lectures on Graph Theory]. Moscow, Nauka, 1990. (in Russian)
6. Saaty T.L. *Decision Making for Leaders: The Analytical Hierarchy Process for Decisions in a Complex World*. Wadsworth, 1988.

Received July 7, 2018