

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ,  
МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

*В.К. Андреев*, Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН, г. Красноярск, Российская Федерация

Исследуется обратная начально-краевая задача, возникающая при математическом моделировании специальных термокапиллярных двумерных движений жидкости вблизи точки экстремума температуры на твердой стенке. Одна из компонент поля скоростей рассматриваемого движения линейно зависит от продольной координаты, что согласуется с квадратичной зависимостью поля температур от этой же координаты. При малых числах Марангони задача аппроксимируется линейной, решение которой находится в явном виде для стационарного течения. Приведены результаты вычисления нулевого и первого приближения решения обратной стационарной задачи. В нестационарном случае решение определяется в виде квадратур в пространстве изображений по Лапласу. Показано, что если температура на твердой стенке стабилизируется с ростом времени, то решение стремится к найденному стационарному режиму. Приведены численные результаты обращения преобразования Лапласа, подтверждающие теоретические выводы на примере моделирования процесса возникновения термокапиллярного движения из состояния покоя в слое трансформаторного масла. Показано, что, выбирая тот или иной тепловой режим на твердой стенке, можно управлять движением жидкости внутри слоя.

*Ключевые слова:* обратная задача; преобразование Лапласа; термокапиллярность.

## Введение

Двумерное течение вязкой теплопроводной жидкости описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \chi \Delta \theta, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где  $\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$  – вектор скорости,  $p(x, y, t)$  – давление,  $\theta(x, y, t)$  – температура суть искомые величины;  $\rho > 0$ ,  $\nu > 0$ ,  $\chi > 0$  – плотность, кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости, соответственно, являются заданными постоянными. Жидкость находится на твердой неподвижной стенке  $y = 0$  и контактирует с пассивным газом через свободную границу  $y = l(x, t) > 0$ . На этой границе поверхностное натяжение линейно зависит от температуры  $\sigma(\theta) = \sigma_0 - \alpha\theta$  [1] с постоянными  $\sigma_0 > 0$ ,  $\alpha > 0$ , которые достаточно надежно определяются из эксперимента [2] для конкретных жидких сред.

Сделаем следующие предположения: 1) число Вебера (или обратное ему капиллярное число)  $We = \sigma_0 h / (\rho \nu \chi) \gg 1$  ( $\ll 1$ ), тогда [1, 3] свободная граница есть линия  $y = l \equiv \text{const} > 0$ , параллельная твердой стенке  $y = 0$ ,  $h = \max l(x, 0)$  – характерная толщина слоя жидкости; 2) поле скоростей имеет специальный вид:

$\mathbf{u} = (w(y, t)x, v(y, t))$ . Такое поле скоростей впервые было предложено в работе [4] для описания натекания чисто вязкой жидкости из бесконечности на твердую стенку  $y = 0$  с условием прилипания на ней. Для стационарных течений в канале или трубке с твердыми стенками такое поле скоростей использовалось в работе [5]; 3) поле температур квадратично по  $x$ :  $\theta = a(y, t)x^2 + b(y, t)$ . Если на твердой стенке задана температура  $\theta_0(x, t) = \theta(x, y, t) = a_0(t)x^2 + b_0(t)$ , то при  $a_0(t) > 0$  она в точке  $x = 0$  имеет минимальное значение, а при  $a_0(t) < 0$  – максимальное. Поэтому в настоящей работе будут изучаться двумерные течения специального вида, возникающие вблизи точки экстремума температуры на твердой стенке.

При подстановке стационарного поля скоростей и температур в уравнения (0.1) и анализа на совместность придем к системе

$$\begin{aligned} \nu w'' &= \nu w' + w^2 - f, & v' + w &= 0, \\ \chi a'' &= \nu a' - 2wa, & \chi b'' &= \nu b' - 2\chi a, \end{aligned} \quad (0.2)$$

где штрих означает дифференцирование по  $y$ ,  $0 < y < l$ . Граничные условия для системы (0.2) таковы:

$$\begin{aligned} w(0) &= v(0) = 0, & a(0) &= a_0, & b(0) &= b_0, \\ v(l) &= 0, & w'(l) &= -2\alpha a(l), & ka'(l) + \gamma a(l) &= 0, \\ kb'(l) + \gamma b(l) &= \gamma\theta_0 + q_0, \end{aligned} \quad (0.3)$$

где  $a_0, b_0$  – заданные постоянные,  $k > 0$  – коэффициент теплопроводности жидкости,  $\gamma$  – коэффициент межфазного взаимодействия,  $\theta_0$  – постоянная температура газа вне жидкости,  $q_0$  – заданный постоянный поток тепла. Давление в жидкости определяется по формуле

$$\frac{1}{\rho} p = \nu v' - \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} f x^2 + d_0 \quad (0.4)$$

с постоянной  $d_0$ . Таким образом, постоянная  $f$  представляет собой «градиент» давления вдоль канала, и он должен определяться вместе с решением задачи (0.2), (0.3), т.е. поставленная задача является обратной. Заметим также, что задача на функцию  $b(y)$  отделяется и основной будет краевая задача нахождения функций  $w(y)$ ,  $v(y)$ ,  $a(y)$  и постоянной  $f$ . В свою очередь, после исключения функции  $v(y)$  из второго уравнения системы (0.2)

$$v(y) = - \int_0^y w(z) dz \quad (0.5)$$

задача сводится к обратной для  $w(y)$ ,  $a(y)$  и  $f$ . Далее считаем, что  $a_0 \neq 0$  и введем безразмерные величины

$$W(\xi) = \frac{l^2}{\chi M} w(y), \quad A(\xi) = \frac{a(y)}{a_0}, \quad F = \frac{l^4}{\chi^2 M} f, \quad \xi = \frac{y}{l}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad M = \frac{\alpha a_0 l^3}{\rho \nu \chi}, \quad B = \frac{\gamma l}{k}, \quad (0.6)$$

тогда упомянутая выше обратная задача примет вид

$$\begin{aligned} W'' + \frac{M}{P} W' \int_0^\xi W(z) dz &= \frac{1}{P} (MW^2 - F), \\ A'' + MA' \int_0^\xi W(z) dz &= 2MAW, \quad 0 < \xi < 1, \end{aligned} \quad (0.7)$$

$$W(0) = 0, \quad A(0) = 1, \quad (0.8)$$

$$W'(1) = -2A(1), \quad A'(1) + \text{B}A(1) = 0, \quad (0.9)$$

$$\int_0^1 W(z) dz = 0. \quad (0.10)$$

Последнее интегральное условие есть следствие (0.5) и равенства  $v(l) = 0$ .

**Замечание 1.** Полученная краевая задача (0.7) – (0.10) является нелинейной, интегродифференциальной и представляет новую математическую модель термокапиллярного двумерного движения в слое. Как правило, в практических приложениях [1,3] число Марангони  $\text{M}$  невелико, поэтому исследование указанной задачи (и ее нестационарного аналога, см. п. 2) методом возмущений по данному параметру является актуальной задачей. При этом будут определены: необходимый для возникновения движения градиент давления вдоль слоя, поле скоростей и температур.

## 1. Ползущие течения – модель Стокса

Число Марангони  $\text{M}$  в уравнениях (0.7) – (0.10) входит сомножителем при нелинейных слагаемых и играет роль числа Рейнольдса [6]. При стремлении числа Рейнольдса к нулю система уравнений вязкой жидкости становится линейной и называется системой Стокса, или моделью Стокса. Она описывает ползущие или медленные течения. В нашем случае при  $|\text{M}| \ll 1$  решение задачи (0.7)–(0.10) ищется в виде

$$\begin{aligned} W(\xi) &= W^{(0)}(\xi) + \text{M}W^{(1)}(\xi) + \dots, & A(\xi) &= A^{(0)}(\xi) + \text{M}A^{(1)}(\xi) + \dots, \\ F &= F^{(0)} + \text{M}F^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для нулевого приближения легко находим

$$W^{(0)}(\xi) = \frac{1}{1+\text{B}} \left( \xi - \frac{3}{2} \xi^2 \right), \quad A^{(0)}(\xi) = 1 - \frac{\text{B}}{1+\text{B}} \xi, \quad F^{(0)} = \frac{3\text{P}}{1+\text{B}}. \quad (1.2)$$

Краевая задача для первого приближения будет уже неоднородной и с учетом (1.2) примет вид

$$\begin{aligned} W^{(1)''} &= -\frac{F^{(1)}}{\text{P}} + \frac{1}{2\text{P}(1+\text{B})^2} \left( \frac{3}{2} \xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2 \right), \\ A^{(1)''} &= \frac{1}{1+\text{B}} \left[ -3\xi^2 + 2\xi + \frac{\text{B}}{1+\text{B}} (5\xi^3 - 3\xi^2) \right], \quad 0 < \xi < 1, \\ W^{(1)}(0) &= 0, \quad A^{(1)}(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$W^{(1)'}(1) = -2A^{(1)}(1), \quad A^{(1)'}(1) + \text{B}A^{(1)}(1) = 0, \quad \int_0^1 W^{(1)}(z) dz = 0, \quad (1.4)$$

т.е. изменилось лишь условие для функции  $A^{(1)}(\xi)$  при  $\xi = 0$ . Интегрируя уравнение (1.3) и удовлетворяя граничным условиям (1.4), после некоторых вычислений получим представления для первого приближения

$$\begin{aligned}
 W^{(1)}(\xi) &= -\frac{F^{(1)}}{2P} \xi^2 + \frac{1}{120P(1+B)^2} (3\xi^6 - 6\xi^5 + 5\xi^4) + a\xi, \\
 A^{(1)}(\xi) &= \frac{1}{12(1+B)} \left[ -3\xi^4 + 4\xi^2 + \frac{3B}{1+B} (\xi^5 - \xi^4) \right] - \frac{B(4+B)}{12(1+B)^3} \xi, \\
 a &= \frac{1}{12(1+B)^2} \left( \frac{1-2B}{1+B} + \frac{19}{70P} \right), \quad \frac{F^{(1)}}{P} = \frac{1}{4(1+B)^2} \left( \frac{1-2B}{1+B} + \frac{5}{14P} \right).
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

## 2. Нестационарная модель медленных движений и ее анализ

В этом случае все функции зависят от времени  $t$  и вместо краевой задачи (0.7) – (0.10) возникает начально-краевая задача ( $\tau = \chi l^{-2}t$  – безразмерное время)

$$W_\tau + M \left( W^2 - W_\xi \int_0^\xi W(z, \tau) dz \right) = PW_{\xi\xi} + F(\tau),
 \tag{2.1}$$

$$A_\tau + M \left( 2AW - A_\xi \int_0^\xi W(z, \tau) dz \right) = A_{\xi\xi}, \quad 0 < \xi < 1,$$

$$W(0, \tau) = 0, \quad A(0, \tau) = A_1(\tau),
 \tag{2.2}$$

$$W_\xi(1, \tau) = -2A(1, \tau), \quad A_\xi(1, \tau) + BA(1, \tau) = 0,
 \tag{2.3}$$

$$\int_0^1 W(z, \tau) dz = 0,
 \tag{2.4}$$

$$W(\xi, 0) = W_0(\xi), \quad A(\xi, 0) = A_0(\xi).
 \tag{2.5}$$

Равенства (2.5) представляют собой начальные условия, для гладких решений должны быть выполнены условия согласования

$$\begin{aligned}
 W_0(0) = 0, \quad A_1(0) = A_0(0), \quad W_{0\xi}(1) = -2A_0(1), \\
 A_{0\xi}(1) + BA_0(1) = 0, \quad \int_0^1 W_0(z) dz = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

В уравнениях (2.1) число Марангони  $M$  определяется равенством (0.6), где  $a_0 = \sup_{\tau \geq 0} |A_1(\tau)|$  для ограниченной по физическому смыслу функции  $A_1(\tau)$ , так что здесь  $M > 0$ .

Ограничимся нулевым по числу Марангони решением задачи (2.1) – (2.6). При этом функции  $\bar{W}(\xi, \tau)$ ,  $\bar{A}(\xi, \tau)$ ,  $\bar{F}(\tau)$  есть решение линейной системы

$$\bar{W}_\tau = P\bar{W}_{\xi\xi} + \bar{F}(\tau), \quad \bar{A}_\tau = \bar{A}_{\xi\xi}, \quad 0 < \xi < 1,
 \tag{2.7}$$

с условиями (2.2) – (2.6). Указанная обратная начально-краевая задача может быть решена методом разделения переменных: классическим для  $\bar{A}(\xi, \tau)$  и специальным, как это было предложено в работах [7, 8] для  $\bar{W}(\xi, \tau)$ ,  $\bar{F}(\tau)$ . Получающиеся ряды имеют довольно громоздкий вид и медленно сходятся для имеющих разрывы первого

рода функций  $W_0(\xi)$ ,  $A_0(\xi)$ . Кроме того, функция  $A_1(\tau)$ , с помощью которой можно управлять движением жидкости, также может иметь разрывы первого рода. Поэтому будем решать задачу методом преобразования Лапласа (условия его применения см., например, в [9]).

Пусть

$$\hat{W}(\xi, \zeta) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta\tau} \bar{W}(\xi, \tau) d\tau, \quad \hat{A}(\xi, \zeta) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta\tau} \bar{A}(\xi, \tau) d\tau, \quad \hat{F}(\zeta) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta\tau} \bar{F}(\tau) d\tau$$

есть преобразования Лапласа  $\bar{W}(\xi, \tau)$ ,  $\bar{A}(\xi, \tau)$ ,  $\bar{F}(\tau)$ . Функции  $\hat{W}(\xi, \zeta)$ ,  $\hat{A}(\xi, \zeta)$ ,  $\hat{F}(\zeta)$  суть решения краевой задачи для ОДУ:

$$\hat{W}_{\xi\xi} - \frac{\zeta}{P} \hat{W} = -\frac{1}{P} [\hat{F}(\zeta) + W_0(\xi)], \quad (2.8)$$

$$\hat{A}_{\xi\xi} - \zeta \hat{A} = -A_0(\xi), \quad 0 < \xi < 1;$$

$$\hat{W}(0, \zeta) = 0, \quad \hat{A}(0, \zeta) = A_1(\zeta);$$

$$\hat{W}_{\xi}(1, \zeta) = -2\hat{A}(1, \zeta), \quad \hat{A}_{\xi}(1, \zeta) + B\hat{A}(1, \zeta) = 0; \quad (2.9)$$

$$\int_0^1 \hat{W}(\xi, \zeta) d\xi = 0.$$

Задача для функции  $\hat{A}(\xi, \zeta)$  отделяется и

$$\hat{A}(\xi, \zeta) = C_1(\zeta) \operatorname{sh} \sqrt{\zeta} \xi + \hat{A}_1(\zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \xi - \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^{\xi} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta} (\xi - z) A_0(z) dz, \quad (2.10)$$

$$C_1(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta} \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} + B \operatorname{sh} \sqrt{\zeta}} \left\{ \int_0^1 \left[ \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} (1 - z) + \frac{B}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta} (1 - z) \right] A_0(z) dz - \left( \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta} + B \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \right) \hat{A}_1(\zeta) \right\}.$$

Функции  $\hat{F}(\zeta)$ ,  $\hat{W}(\xi, \zeta)$  найдутся из первого уравнения (2.8) и трех условий (2.9) для  $\hat{W}(\xi, \zeta)$ :

$$\begin{aligned} \hat{F}(\zeta) &= \frac{1}{1 - \sqrt{P\zeta^{-1}} \operatorname{th} \sqrt{\zeta P^{-1}}} \left\{ \sqrt{\zeta P^{-1}} \int_0^1 \int_0^{\xi} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta P^{-1}} (\xi - z) W_0(z) dz d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}}}{\operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}}} \left[ \int_0^1 \operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}} (1 - z) W_0(z) dz - 2P \hat{A}(1, \zeta) \right] \right\}, \\ \hat{W}(\xi, \zeta) &= C_2(\zeta) \operatorname{sh} \sqrt{\zeta P^{-1}} \xi + \left( 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}} \xi \right) \frac{\hat{F}(\zeta)}{\zeta} - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{P\zeta}} \int_0^{\xi} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta P^{-1}} (\xi - z) W_0(z) dz, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$C_2(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \operatorname{th} \sqrt{\zeta P^{-1}} \hat{F}(\zeta) - \frac{2}{\operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}}} \sqrt{P \zeta^{-1}} \hat{A}(1, \zeta) + \\ + \frac{1}{\sqrt{P \zeta} \operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}}} \int_0^1 \operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}} (1-z) W_0(z) dz.$$

В формулах (2.11)  $\hat{A}(1, \zeta)$  есть значение правой части (2.10) при  $\xi = 1$ .

Предположим, что существует предел  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A_1(\tau) = 1$  и  $A_1(\tau)$ ,  $A_1'(\tau)$  являются оригиналами, тогда [9]  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \hat{A}_1(\zeta) = 1$ . Используя асимптотические разложения гиперболических функций при малых значениях аргумента, из полученных формул (2.10), (2.11) можно вывести равенства

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \hat{A}(\xi, \zeta) = A^0(\xi), \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \hat{F}(\zeta) = F^0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \hat{W}(\xi, \zeta) = W^0(\xi), \quad (2.12)$$

т.е. при  $t \rightarrow \infty$  решение задачи (2.7), (2.2) – (2.5) стремится к стационарному решению (1.2). Конечно, формулы (2.10), (2.11) дают решение в квадратурах для изображений по Лапласу и в случае, когда функция  $A_1(\tau)$  имеет конечное число разрывов первого рода и не имеет предела при  $\tau \rightarrow \infty$ . Пример численного обращения преобразования Лапласа приведен в следующем пункте.

### 3. Термокапиллярное движение первоначально покоящейся жидкости

Считаем, что в начальный момент времени жидкость находилась в покое ( $W_0(\xi) = 0$ ,  $\xi \in [0, 1]$ ), и функция  $A_0(\xi) = 0$ ,  $\xi \in [0, 1]$ . При  $\tau > 0$  ( $t > 0$ )  $A_1(\tau) > 0$  и возникает термокапиллярное движение. Для выполнения условий согласования (2.6) можно считать, что  $A_1(0) = 0$ , хотя это и не обязательно. В этом случае вид решения в образах по Лапласу (2.10), (2.11) существенно упрощается,

$$\hat{A}(\xi, \zeta) = \frac{[\sqrt{\zeta} \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} (1 - \xi) + B \operatorname{sh} \sqrt{\zeta} (1 - \xi)] \hat{A}_1(\zeta)}{\sqrt{\zeta} \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} + B \operatorname{sh} \sqrt{\zeta}},$$

$$\hat{F}(\zeta) = \frac{2P \sqrt{\zeta} (\operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}} - 1) \hat{A}_1(\zeta)}{(\sqrt{\zeta} \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} + B \operatorname{sh} \sqrt{\zeta})(\operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}} - \sqrt{P \zeta^{-1}} \operatorname{sh} \sqrt{\zeta P^{-1}})}, \quad (3.1)$$

$$\hat{W}(\xi, \zeta) = \left[ \frac{1}{\zeta} \operatorname{th} \sqrt{\zeta P^{-1}} \hat{F}(\zeta) - \frac{2\sqrt{P} \hat{A}_1(\zeta)}{\operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}} (\sqrt{\zeta} \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} + B \operatorname{sh} \sqrt{\zeta})} \right] \operatorname{sh} \sqrt{\zeta P^{-1}} \xi + \\ + \left( 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\zeta P^{-1}} \xi \right) \frac{\hat{F}(\zeta)}{\zeta}.$$

Численное обращение преобразования Лапласа

$$g(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} G(\xi, \zeta) e^{\zeta \tau} d\zeta, \quad (3.2)$$

где  $G(\xi, \zeta)$  последовательно есть правые части (3.1), а  $g = A(\xi, \tau)$ ,  $g = F(\tau)$ ,  $g = W(\xi, \tau)$ , выполнялось при помощи квадратурной формулы наивысшей точности, построенной для интеграла Римана – Меллина (3.2).

Моделировался процесс возникновения термокапиллярного движения в слое трансформаторного масла толщиной  $l = 10^{-7}$  м и физическими параметрами  $\rho = 0,86 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu = 18,49 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\chi = 1,21 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с;  $k = 0,63519 \cdot 10^{-4}$  кг · м/с<sup>3</sup>;  $\alpha = 0,0022$  Н/м · К. При характерном перепаде температур вдоль свободной границы  $\Delta\theta_* = a_0 l = 10$  К получим для числа Марангони  $M = 1,143 \cdot 10^{-2} < 1$ , а число Прандтля  $P = 1,53$ . Расчеты проводились по формулам (3.1), (3.2) для числа Био  $B = 2$ . На рис. 1 – 5 приведены графики только функций  $F(\tau)$ ,  $W(\xi, \tau)$ ,  $V(\xi, \tau)$ . Для вычисления последней использовалась формула (0.5) в безразмерном виде. Функция  $A_1(\tau)$  выбиралась в виде  $A_1(\tau) = 1 - \sin(0,1\tau) \exp(-0,01\tau)$  и  $A_1(\tau) = 2 \sin(0,1\tau)$ . В первом случае есть сходимость к стационарному режиму (сплошная линия), а во втором такой сходимости нет, что согласуется с теоретическими выводами. Таким образом, выбирая тот или иной тепловой режим на твердой стенке, можно управлять движением жидкости внутри слоя.

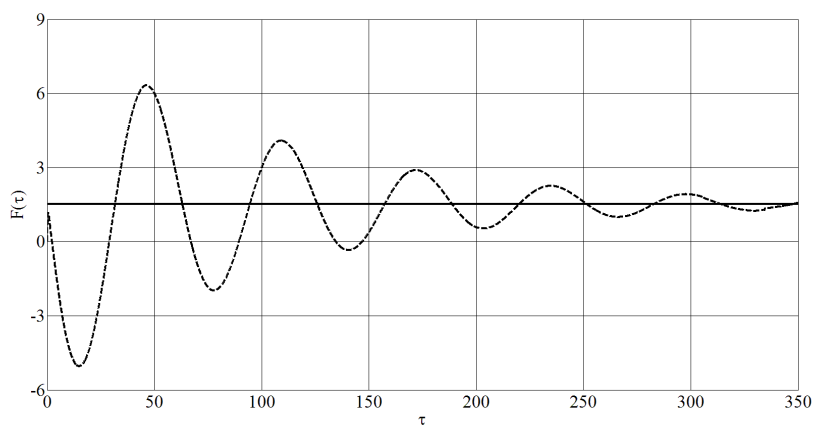


Рис. 1. Поведение функции  $F(\tau)$  при  $A_1(\tau) = 1 - \sin(0,1\tau) \exp(-0,01\tau)$

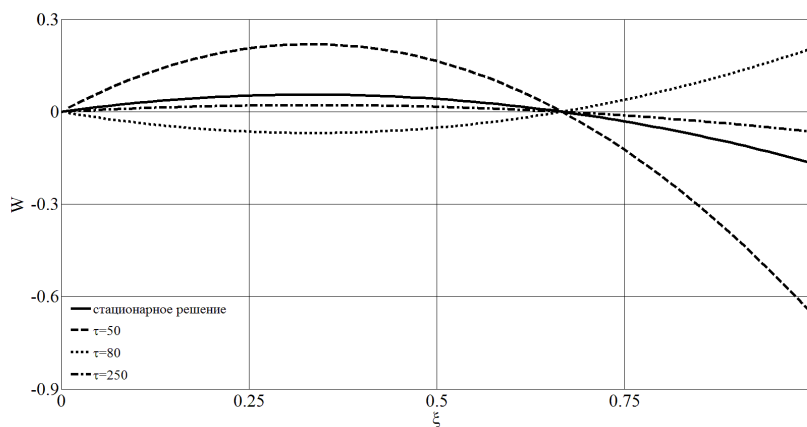


Рис. 2. Поведение функции  $W(\xi, \tau)$  при  $A_1(\tau) = 1 - \sin(0,1\tau) \exp(-0,01\tau)$

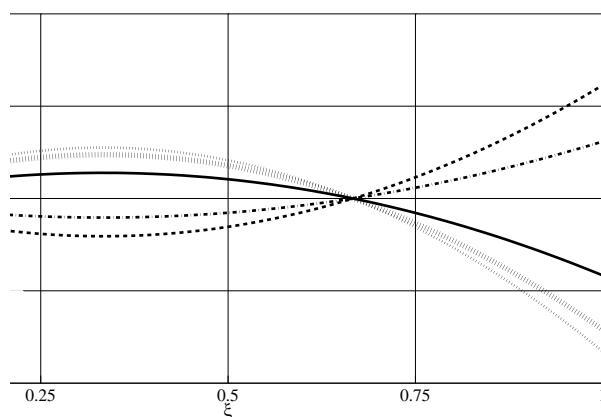


Рис. 3. Поведение функции  $W(\xi, \tau)$  при  $A_1(\tau) = 2 \sin(0, 1\tau)$

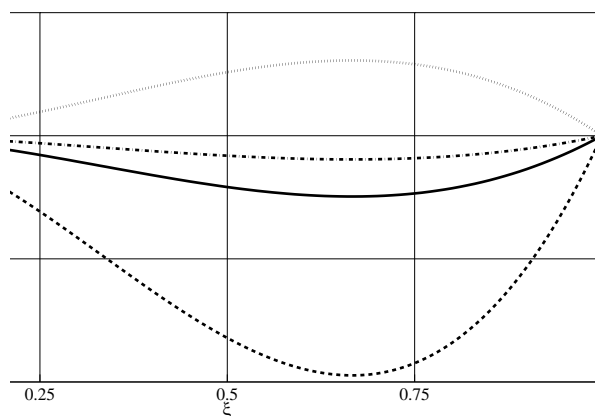


Рис. 4. Поведение функции  $V(\xi, \tau)$  при  $A_1(\tau) = 1 - \sin(0, 1\tau) \exp(-0, 01\tau)$

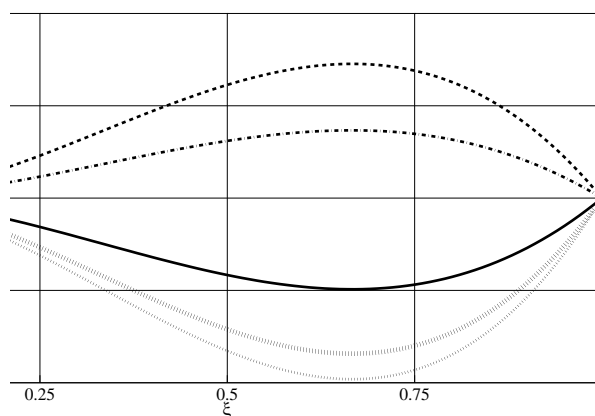


Рис. 5. Поведение функции  $V(\xi, \tau)$  при  $A_1(\tau) = 2 \sin(0, 1\tau)$

**Замечание 2.** Поле давлений может быть найдено из формулы (0.4), где для нестационарного случая в правую часть необходимо добавить  $-v_t$ . Функция  $b(y)$  вычисляется по известной  $a(y)$  из решения краевой задачи (0.2), (0.3), где надо вычеркнуть нелинейное слагаемое  $vb'$ . Тем самым и поле температур будет полностью восстановлено для стационарного течения. Для нестационарного движения уравнение для



$b(y, t)$  имеет вид  $b_t = \chi b_{yy} + 2\chi a$ , соответствующая начально-краевая задача также решается методом преобразования Лапласа.

## Заключение

Методом возмущений по малому параметру (числу Марангони) найдено решение краевой (и начально-краевой) задачи, возникающей при математическом моделировании термокапиллярного движения жидкости вблизи точки экстремума температуры на стенке. Получено аналитическое решение для стационарного течения. Для нестационарного движения решение найдено в виде квадратур в пространстве изображений по Лапласу. Даны достаточные условия выхода решения на стационарный режим с ростом времени. Методом численного обращения преобразования Лапласа решена задача о возникновении термокапиллярного движения при различных способах задания температуры на стенке в слое трансформаторного масла.

## Литература

1. Andreev, V.K. Mathematical Models of Convection / V.K. Andreev et al. – Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH & CO KG, 2012.
2. Таблицы физических величин: справочник / под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976.
3. Зейтунян, Р.Х. Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара – Марангони / Р.Х. Зейтунян // Успехи физических наук. – 1998. – Т. 168, № 3. – С. 259–286.
4. Hiemenz, K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder / K. Hiemenz // Digitalisierung des Polytechnischen Journals. – 1911. – V. 3326. – P. 321–324.
5. Brady, J.F. Steady Flow in a Channel or Tube with an Accelerating Surface Velocity / J.F. Brady, A. Acrivos // Journal of Fluid Mechanics. – 1981. – V. 112. – P. 127–150.
6. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970.
7. Andreev, V.K. Unsteady 2D Motions a Viscous Fluid Described by Partially Invariant Solutions to the Navier – Stokes Equations / V.K. Andreev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2015. – V. 8, № 2. – P. 140–147.
8. Андреев, В.К. О решении одной обратной задачи, моделирующей двумерное движение вязкой жидкости / В.К. Андреев // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 5–16.
9. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973.

Виктор Константинович Андреев, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом «Дифференциальные уравнения механики», Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН (г. Красноярск, Российская Федерация), andr@icm.krasn.ru.

*Поступила в редакцию 4 июня 2018 г.*

**ON THE SOLUTION PROPERTIES OF BOUNDARY PROBLEM  
SIMULATING THERMOCAPILLARY FLOW**

**V.K. Andreev**, Institute Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk,  
Russian Federation, andr@icm.krasn.ru

An inverse initial boundary value problem that arises as a result of mathematical modelling of specific thermocapillary 2D motion near an extreme point on solid wall is investigated. One of the velocity field components considered motion linearly depends on the longitudinal coordinate. This is a good agreement with the quadratic dependence of temperature field on the same coordinate. For stationary flow in the case of small Marangoni numbers the solution can be found by exact formulae. Nonstationary solution is found in quadratures in Laplace transformation space. The calculation results of zero and first solution approximations of this inverse stationary problem are given. If temperature on the solid wall is stabilized with time, then the nonstationary solution will converge to steady regime. The calculations are performed for different values of the Prandtl number and Bio number. Numerical results well support the theoretical conclusions on the example of modelling process arising the thermocapillary motion from a state of rest in the transformer oil layer. It is shown that choosing a specific thermal regime on a solid wall it is possible to control the fluid motion inside a layer.

*Keywords: inverse problem; Laplace transform; thermocapillarity.*

**References**

1. Andreev V.K. et al *Mathematical Models of Convection*. Berlin, Boston, Walter de Gruyter GmbH & CO KG, 2012.
2. *Tablitsy fizicheskikh velichin* [Tables of Physical Values]. Moscow, Atomizdat, 1976. (in Russian)
3. Zeytounian R.Kh. The Benard–Marangoni Thermocapillary-Instability Problem. *Physics–Uspekhi*, 1998, vol. 41, no. 3, pp. 241–267. DOI: 10.3367/UFNr.0168.199803b.0259
4. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder. *Digitalisierung des Polytechnischen Journals*, 1911, vol. 3326, pp. 321–324. (in German)
5. Brady J.F., Acrivos A. Steady Flow in a Channel or Tube with an Accelerating Surface Velocity. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, vol. 112, pp. 127–150.
6. Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskiye voprosy dinamiki vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti* [Mathematical Problems of the Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid]. Moscow, Nauka, 1970. (in Russian)
7. Andreev V.K. Unsteady 2D Motions a Viscous Fluid Described by Partially Invariant Solutions to the Navier–Stokes Equations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 140–147.
8. Andreev V.K. On the Solution of an Inverse Problem Simulating Two-Dimensional Motion of a Viscous Fluid. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 5–16. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp160401
9. Lavrentyev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable]. Moscow, Nauka, 1973. (in Russian)

*Received June 4, 2018*