УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp180405

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОСКОЛКОВА ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

***А.О. Кондюков*[1], *Т.Г. Сукачева*[1,2]**
[1]Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого,
г. Великий Новгород, Российская Федерация
[2]Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
Российская Федерация

В последние десятилетия теория уравнений соболевского типа активно изучается в различных аспектах. Применение полугруппового подхода к теории уравнений соболевского типа получило плодотворное развитие в работах научного направления, которое возглавляет Г.А. Свиридюк. Данная работа примыкает к этому научному направлению. В работе исследуется первая начально-краевая задача для системы Осколкова. В нашем случае система моделирует динамику плоскопараллельного течения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта высшего порядка. Эта задача имеет преимущество, так как фазовое пространство для вышеуказанной системы может быть описано полностью при различных значениях параметра, который характеризует упругие свойства жидкости. Изложению этого факта и посвящена данная статья. Исследование проводится в русле теории полулинейных автономных уравнений соболевского типа на основе понятий квазистационарной траектории и относительно спектрально ограниченного оператора.

Ключевые слова: несжимаемая вязкоупругая жидкость Кельвина – Фойгта; системы Осколкова; уравнения соболевского типа; квазистационарные траектории; фазовое пространство.

Посвящается В.Ф. Чистякову
в связи с его семидесятилетием.

Введение

Рассмотрим систему уравнений Осколкова

$$
\begin{aligned}
&(1-\varkappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum_{m=1}^{M}\sum_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2 w_{m,s} - \nabla p + f,\\
&0 = \nabla\cdot v,\\
&\frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = v + \alpha_m w_{m,0},\ \alpha_m\in\mathbb{R}_-,\ \beta_l\in\mathbb{R}_+,\ m=\overline{1,\ M},\\
&\frac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s},\ s=\overline{1,\ n_m-1}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Эта система является моделью динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта высшего порядка $K(K = n_1 + \ldots + n_m)$ [1]. Здесь $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_k = v_k(x,t)$ – вектор скорости жидкости, $p = p(x,t)$ – функция давления, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_k = f_k(x)$ – вектор внешнего воздействия в точке $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞; $\varkappa,\ \nu\in\mathbb{R}_+$ – параметры, которые характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости соответственно.

Надо заметить, что для случая жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка ($K = 0$) задача Коши – Дирихле для системы уравнений (1) в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ изучена в различных аспектах [1,2], причем подтверждено экспериментально [3], что параметр $\varkappa$ может принимать отрицательные значения. Хорошо известно, что в случае, когда $\varkappa^{-1} \in \sigma(\nabla^2)$ такая задача, вообщем-то, не разрешима [4]. В связи с этим возникает проблема описания множества корректности для этой задачи, которое мы называем фазовое пространство [5, 6].

Для системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&(1-\varkappa\nabla^2)\nabla^2\psi_t = \nu\nabla^4\psi - \frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,y)} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2\left(\frac{\partial w_{(m,s)1}}{\partial y} - \frac{\partial w_{(m,s)2}}{\partial x}\right) + g,\\
&\frac{\partial w_{(m,0)1}}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha_l w_{(m,0)1},\\
&\frac{\partial w_{(m,0)2}}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha_l w_{(m,0)2},\\
&\frac{\partial w_{(m,s)1}}{\partial t} = s w_{(m,s-1)1} + \alpha_m w_{(m,s)1},\\
&\frac{\partial w_{(m,s)2}}{\partial t} = s w_{(m,s-1)2} + \alpha_m w_{(m,s)2},\ \alpha_m \in \mathbb{R}_-,\ m = \overline{1,\ M},\ s = \overline{1,\ n_m - 1},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши – Дирихле

$$
\begin{aligned}
&\psi(x,y,0) = \psi_0(x,y), w_{m,s}(x,y,0) = w^0_{m,s}(x,y)\ \forall (x,y) \in \Omega,\\
&\psi(x,y,t) = \nabla^2\psi(x,y,t) = 0, w_{m,s}(x,y,t) = 0\ \forall (x,y,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞.

Заметим, что система (2) образуется из системы (1) при $n = 3$, если положить $v_3 \equiv 0$ и формулами $v_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_2 = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ ввести функцию тока $\psi = \psi(x,y,t)$, которая определена с точностью до аддитивной постоянной.

Из этого следует, что система (2) является моделью динамики плоскопараллельного течения вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина – Фойгта высшего порядка.

Задача (2), (3) имеет преимущество по сравнению с задачей Коши – Дирихле для уравнения (1), которое заключается в том, что фазовое пространство уравнения (2) может быть полностью описано при различных значениях параметра $\varkappa \in \mathbb{R}$. Изложению этого факта и посвящена данная работа. Статья состоит из трех параграфов: в п. 1 задача (2), (3) редуцируется к задаче Коши для полулинейного уравнения соболевского типа, и устанавливается однозначная локальная разрешимость этой задачи в случае $\varkappa^{-1} \notin \sigma(\nabla^2)$; в п. 2 приводятся необходимые сведения из теории (L, p)– ограниченных операторов [7,8]; в п. 3 устанавливается существование квазистационарных траекторий [9] в случае $\varkappa^{-1} \in \sigma(\nabla^2)$ и содержится описание структуры фазового пространства (или его морфологии [10]).

Все рассмотрения осуществляются в вещественных банаховых пространствах, но изучая «спектральные» вопросы, вводится их естественная комплексификация, символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначаются соответственно «единичный» и «нулевой» операторы, области определения которых понятны из контекста.

Отметим, что результаты данной работы обобщают результаты [11, 12] на случай модели Кельвина – Фойгта высшего порядка.

1. Редукция к абстрактной задаче Коши в случае $\varkappa^{-1} \notin \sigma(\nabla^2)$

Положим $\mathcal{U}=\mathcal{U}_\psi \times \mathcal{U}_w$, где $\mathcal{U}_\psi=\{\psi \in W_2^4(\Omega) : \psi(x)=\nabla^2\psi(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$, $\mathcal{U}_w=\Pi_{l=1}^K \left\{w_{(m,s)l} \in W_2^2(\Omega) : w_{(m,s)l}(x) = 0, x \in \partial\Omega, l = 1,\ 2\right\}$. Элемент $u=\big(\psi, w_{(1,0)1}, w_{(1,0)2}, w_{(1,1)1}, w_{(1,1)2}, \dots, w_{(M,n_m-1)1}, w_{(M,n_m-1)2}\big)$, а элемент $f = (g, \underbrace{0, \dots, 0}_{2K})$, где $g \in L^2(\Omega)$.

Через $\sigma(\nabla^2)$ обозначим спектр однородной задачи Дирихле для оператора Лапласса ∇^2 в области Ω. Определим оператор L формулой

$$L = \begin{pmatrix} \widetilde{L} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\widetilde{L}= (1 - \varkappa\nabla^2))$, $\mathbb{I}$ – единичный оператор (матрица порядка $2K$), $\mathbb{O}$ – нулевой оператор.

$$M : u \mapsto \begin{pmatrix} \widetilde{M} + M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\widetilde{M}= \nu\nabla^4\psi - \partial(\psi, \nabla^2\psi)/\partial(x, y) + g,$$
$$M_1 = \sum_{m=1}^{M}\sum_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2\left(\frac{\partial w_{m,s1}}{\partial y} - \frac{\partial w_{m,s2}}{\partial x}\right),$$
$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial y} + \alpha_l w_{(m,0)1} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha_l w_{(m,0)2} \\ s w_{(m,s-1)1} + \alpha_m w_{(m,s)1} \\ s w_{(m,s-1)2} + \alpha_m w_{(m,s)2} \end{pmatrix}, \quad m = \overline{1,\ M},\ s = \overline{1,\ n_m - 1}.$$

Лемма 1.
i) Формулой (4) *задается линейный, непрерывный, фредгольмов оператор* $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ *при любом* $\varkappa \in \mathbb{R}$, *причем, если* $\varkappa^{-1} \notin \sigma(\nabla^2)$, *тогда существует оператор* $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$.
ii) Формулой (5) *задается оператор* $M \in C^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

Доказательство. i) Непрерывность оператора L очевидна, фредгольмовость вытекает из самосопряженности оператора $\widetilde{L}$ и из того, что если $\varkappa^{-1} \notin \sigma(\nabla^2)$, тогда

$$\widetilde{L}^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle\cdot, \varphi_k\rangle}{\varkappa_k(1 - \varkappa\varkappa_k)}\varphi_k, \tag{6}$$

где $\{\varphi_k\}$ является ортонормированным в $L^2(\Omega)$ семейством собственных векторов задачи Дирихле для оператора Лапласа, которое занумеровано по возрастанию собственных значений $\{\varkappa_k\}$ с учетом их кратности.

ii) Очевидным является и тот факт, что первая и вторая производные Фреше оператора $M : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{F}$ в любой точке $u \in \mathcal{U}$ являются непрерывными. Остальные производные Фреше – тождественный нуль. Следовательно, лемма доказана. □

Надо заметить, что при доказательстве леммы 1 использовались результаты [11] для операторов $\widetilde{L}$ и $\widetilde{M}$.

На основании леммы 1 задачу (3),(2) редуцируем к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{7}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = M(u). \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть операторы L, M определены формулами (4) и (5) соответственно и $\lambda^{-1} \notin \sigma(\nabla^2)$. Тогда при любом $u_0 \in \mathcal{U}$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-t_0, t_0);\ \mathcal{U})$ задачи (7), (8), где $t_0 = t_0(u_0) > 0$.*

Доказательство. В силу леммы 1 уравнение (8) будет иметь вид

$$\dot{u} = T(u). \tag{9}$$

Здесь оператор $T = L^{-1}M \in C^\infty(\mathcal{U})$. Разрешимость задачи (7), (9) является классической задачей Коши [13]. Таким образом, теорема доказана. □

2. Относительно спектрально ограниченные операторы

Пусть пространства $\mathcal{U}, \mathcal{F}$ являются банаховыми, операторы $L, M {\in} \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. Введем, следуя [7, 8], в рассмотрение L–резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}$ и L–спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \backslash \rho^L(M)$ оператора M.

Определение 1. *Оператор M называется спектрально ограниченным относительно оператора L (короче (L, σ)-ограниченным), если*

$$\exists a > 0\ \forall \mu \in \mathbb{C}\ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Теорема 2. *Положим оператор M является (L, σ)-ограниченным. Тогда существуют расщепления пространств $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, $\mathcal{U}^0 \supset \ker L$, $\mathcal{F}^1 \supset \operatorname{im} L$, и расщепление действий операторов $L,\ M : \mathcal{U}^k \mapsto \mathcal{F}^k, k = 0, 1$.*

Доказательство. Проекторы $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$, которые определяют искомые расширения, задаются интегралами типа Данфорда – Тейлора

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma (\mu L - M)^{-1} L d\mu,\ Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma L(\mu L - M)^{-1} d\mu,$$

где контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Теорема доказана. □

Через $L_k(M_k)$ обозначим сужение оператора $L(M)$ на подпространство $\mathcal{U}^k,\ k = 0, 1$.

Теорема 3. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$.*

Доказательство. Оператор M_0^{-1} равен сужению оператора $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\mu L - M)^{-1}d\mu$ на $\mathcal{F}^0$, а оператор L_1^{-1} – сужению оператора $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\mu L - M)^{-1}d\mu$ на $\mathcal{F}^1$. Здесь Γ – это контур, который определяется так же, как при доказательстве теоремы 2. Теорема доказана. □

Положим $H = M_0^{-1}L_0, S = L_1^{-1}M_1$; очевидно, что операторы $H \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0), S \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$.

Следствие 1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда при любом $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = r > a$ имеет место разложение относительной резольвенты в ряд Лорана*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k H^k M_0^{-1}(I-Q) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}S^{k-1}L_1^{-1}Q.$$

Определение 2. *Пусть оператор M является (L,σ)-ограниченным. Для L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M точка ∞ называется*
(i) устранимой особой точкой, если оператор $H \equiv 0$;
(ii)полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq 0$, а $H^{p+1} \equiv 0$;
(iii) существенно особой точкой, если $H^q \neq \mathbb{O}$ при любом $q \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. Будем считать для удобства устранимую особую точку полюсом порядка нуль. Тогда выражение «оператор M (L,σ)-ограничен, причем его $L-$резольвента имеет в точке ∞ полюс порядка $p \in \mathbb{N}_0$» эквивалентно выражению «оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$».

Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ векторов из $\mathcal{U}$ называется цепочкой M-присоединенных векторов вектора $\varphi_0 \in \ker L\backslash\{0\}$, если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$, $q = 0,1,\ldots,$ и $\varphi_q \notin \ker L\backslash\{0\}$, $q = 1,2,\ldots$. Цепочка может быть бесконечной (в частности, она может быть закончена нулями, если $\varphi_0 \in \ker L\bigcap \ker \mathrm{M}\backslash\{0\}$), но она обязательно конечна, если в ней найдется вектор φ_p такой, что $M\varphi_p \notin \mathrm{im}\, L$. В частности, вектор $\varphi_0 \in \ker L\backslash\{0\}$ не имеет M-присоединенных векторов, если $M\varphi_0 \notin \mathrm{im}\, L$.

Теорема 4. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен. Тогда любой вектор $\varphi \in \ker \mathrm{L}\backslash\{0\}$ не имеет M-присоединенных векторов, причем $\ker L = \mathcal{U}^0, \mathrm{im}\, L = \mathcal{F}^1$.*

Введем в рассмотрение условия, которые в дальнейшем нам понадобятся.

A1) Оператор L является бирасщепляющим, притом любой вектор $\varphi \in \ker L$ не имеет M-присоединенных векторов.

Положим $\mathcal{F}^0 = H(\ker L)$, $\mathcal{F}^1 = \mathrm{im}\, L$.

A2) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$.

Теорема 5. *Пусть условия A1), A2) выполнены. Тогда оператор M является $(L,0)$-ограниченным.*

Замечание 2. Бирасщепляющими называются линейные операторы с дополняемыми ядром и образом [14]. Теорема 5 является частным случаем более общего результата из [9], устанавливающего необходимые и достаточные условия (L,p)-ограниченности оператора M. Простейшим случаем бирасщепляющего оператора L является фредгольмов оператор ($\mathrm{ind}\, \mathrm{L} = 0$).

Следствие 2. *Пусть оператор* L *является фредгольмовым, притом любой вектор* $\varphi \in \ker L \backslash \{0\}$ *не имеет* M*-присоединенных векторов. Тогда:*

i) справедливо утверждение теоремы 5;

ii) $\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : (\mathbb{I}- \widetilde{Q})M(u) = 0\}$, *где* $\widetilde{Q}\colon \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^1$ *– некоторый произвольный проектор.*

3. Квазистационарные траектории и фазовое пространство

Исследуем разрешимость задачи (7), (8), где операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M \in C^\infty(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Пусть пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$, являющиеся банаховыми, расщепляются в прямые суммы $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, $\ker \mathrm{L} \subset \mathcal{U}^0$, причем действие оператора L тоже расщепляется, то есть $L : \mathcal{U}^k \mapsto \mathcal{F}^k,\ k = 0, 1$. Уравнение (8) редуцируем к системе

$$L\dot{u}^0 = (I - Q)M(u),\ L\dot{u}^1 = QM(u), \tag{10}$$

где $u = u^0 + u^1,\ u^k \in \mathcal{U}^k,\ Q : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^1$ – проектор вдоль $\mathcal{F}^0$.

Определение 3. [9] *Решение* $u \in C^\infty((-t_0, t_0);\mathcal{U})$ *задачи (7), (8) называется квазистационарной траекторией уравнения (8), если* $L\dot{u}^0 \equiv 0\ \forall t \in (-t_0, t_0)$.

Через M' обозначим производную Фреше оператора M в точке u_0.

Теорема 6. *Пусть оператор* L *является фредгольмовым, и любой вектор* $\varphi \in \ker \mathrm{L} \backslash \{0\}$ *не имеет* M'*-присоединенных векторов. Положим, точка* $u_0 \in \mathfrak{M} = \{u \in \mathcal{U} : (\mathbb{I}- \widetilde{Q})M(u) = 0\}$. *Тогда существует единственное решение* $u \in C^\infty((-t_0, t_0);\mathcal{U})$ *задачи (7), (8), являющееся квазистационарной траекторией.*

(Здесь, как и выше $\widetilde{Q}\colon \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^1 = \mathrm{im}\ L$ – некоторый проектор.)

Доказательство. В силу следствия 2 i) оператор M' (L, σ)-ограничен. Через M'_0 обозначим сужение оператора $(\mathbb{I}- \widetilde{Q}))M'$ на $\ker L$. В силу теоремы 3 и фредгольмовости оператора L оператор $M'_0 : \ker L \mapsto \ker \widetilde{Q}$ – топлинейный изоморфизм.

В нашем случае система (10) приобретет вид

$$0 = (\mathbb{I}- \widetilde{Q})M(u),\ L_1\dot{u}^1 = \widetilde{Q}\ M(u), \tag{11}$$

причем второе уравнение (11), в силу теоремы 3, имеет вид

$$\dot{u}^1 = L_1^{-1}\ \widetilde{Q}\ M(u^0 + u^1). \tag{12}$$

В силу вышесказанного, теоремы о неявной функции, которая применена к отображению $(\mathbb{I}- \widetilde{Q})M : \mathcal{U} \mapsto \ker\ \widetilde{\mathrm{Q}}$, и условий теоремы, существует окрестность $\mathcal{O}^1 \subset \mathcal{U}$ точки $u_0^1 \in \mathcal{U}$ и C^∞-отображение $\delta : \mathcal{O}^1 \mapsto \mathcal{U}^0$ такое, что $(\mathbb{I}- \widetilde{Q})M(\delta(u^1)+u^1) = 0\ \forall u^1 \in \mathcal{O}^1$. Поэтому (12) редуцируется к виду

$$\dot{u}^1 = L_1^{-1}\ \widetilde{Q}\ M(\delta + \mathbb{I})(u^1) \equiv T(u^1), \tag{13}$$

где оператор $T \in C^\infty(\mathcal{O}^1;\mathcal{U}^1)$ по построению.

Поэтому, в силу теоремы Коши [13], решение $u^1 \in C^\infty((-t_0, t_0); \mathcal{O}^1)$ задачи Коши $u^1(0) = u_0^1$ для уравнения (13) существует и единственно. В силу же (11) вектор-функция $u(t) = \delta(u^1(t)) + u^1(t), t \in (-t_0, t_0)$, будет являться решением задачи (7), (8), а также квазистационарной траекторией уравнения (8). Теорема доказана. □

Далее рассмотрим задачу (7), (8) в том случае, когда операторы L и M определены формулами леммы 1, причем $\lambda^{-1} \in \sigma(\nabla^2)$.

Положим $\ker L = \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, где $\{\varphi_k\}$ является ортонормированным (в смысле $\mathcal{F}$) набором собственных функций. В силу того, что оператор $\widetilde{L}$ самосопряжен и фредгольмов, то его образ $\operatorname{im} \widetilde{L} = \{f \in \mathcal{F} : \langle f, \varphi_k \rangle = 0, \ k = \overline{1, n}\}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Тогда $\ker L = \ker \widetilde{L} \oplus \mathcal{U}_w$, $\operatorname{im} L = \operatorname{im} \widetilde{L} \oplus O$.

Лемма 2. *При любом $u \in \mathcal{U}$ любой вектор $\varphi \in \ker L$ не имеет M'_u-присоединенных векторов.*

Доказательство. Для того чтобы доказать лемму необходимо и достаточно установить невырожденность матрицы $\widetilde{M}'_0 = \|\langle \widetilde{M}'_k \varphi_k, \varphi_l \rangle\|$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, n}$. А невырожденность этой матрицы есть прямое следствие неравенства $(\widetilde{M}'_0 a, a) \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, где $(\cdot, \cdot)$ – стандартное (евклидово) скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ [11]. Лемма доказана. □

Итак, в силу лемм 1 и 2 и теоремы 6 справедливо

Следствие 3. *Положим операторы L и M определены формулами леммы 1 и $\varkappa^{-1} \in \sigma(\nabla^2)$. Тогда при любом $u_0 \in \mathfrak{M} = \{u \in \mathcal{U} : \langle M(u), \varphi_k \rangle = 0, k = \overline{1, n}\}$ утверждение теоремы 6 является справедливым.*

Замечание 3. Любое решение $u \in C^\infty((-t_0, t_0); \mathcal{U})$ уравнения (8) в силу (11) лежит в $\mathfrak{M}$, т.е. $u(t) \in \mathfrak{M} \ \forall t \in (-t_0, t_0)$.

Определение 4. *Множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ называется фазовым пространством уравнения (8), если*
i) любое решение $u \in C^\infty((-t_0, t_0); \mathcal{U})$ уравнения (8) лежит в $\mathcal{P}$, т. е. $u(t) \in \mathcal{P} \ \forall t \in (-t_0, t_0)$;
ii) единственное решение задачи (7), (8) существует при любом $u_0 \in \mathcal{P}$.

Заметим, что если операторы L, M определяются формулами леммы 1 и $\varkappa^{-1} \notin \sigma(\nabla^2)$, то согласно теореме 1, $\mathcal{P} = \mathcal{U}$. В случае же если $\varkappa^{-1} \in \sigma(\nabla^2)$, то в силу следствия 3 $\mathcal{P} = \mathfrak{M}$.

Далее займемся исследованием морфологии [10] фазового пространства $\mathfrak{M}$. Вначале установим его непустоту. Для этого положим $\mathcal{U}^0 = \ker L$, $\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : (u, \varphi_k) = 0, k = \overline{1, n}\}$. Очевидно, $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$. И на основании [11] справедлива

Лемма 3. *Пусть формулами леммы 1 определяются операторы L и M, а также $\varkappa^{-1} \in \sigma(\nabla^2)$. Тогда для любого $u^1 \in \mathcal{U}^1$ существует единственный $u^0 \in \mathcal{U}$ такой, что $u = u^0 + u^1 \in \mathfrak{M}$.*

Теорема 7. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда множество $\mathfrak{M}$ – простое банахово C^∞-многообразие, которое моделируется подпространством $\mathcal{U}^1$.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{M}, u = u^0 + u^1$. Соответственно лемме 2, отображение $m : \mathcal{U}^0 \mapsto \mathcal{U}^0$, используемое при доказательстве леммы 3 [11], C^∞-дифференцируемо, причем, его первая производная не вырождена. Согласно теореме о неявной функции, существует окрестность $\mathcal{O} \subset \mathfrak{M}$ точки u, которая диффеоморфно проектируется вдоль $\mathcal{U}^0$ в $\mathcal{U}^1$. Из леммы 3 вытекает простота C^∞-многообразия. В силу этой леммы проектирующий C^∞-диффеоморфизм равен сужению проектора $P = \mathbb{I} - \sum_{k=1}^{n} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k$ на $\mathfrak{M}$. Теорема доказана. □

Замечание 4. В последние десятилетия теория уравнений соболевского типа получила мощный стимул в своем развитии, о чем свидетельствует появившиеся монографии [8, 15–18]. Данная работа примыкает к научному направлению, развиваемому профессором Г.А. Свиридюком и его учениками [19–22].

Авторы выражают благодарность профессору Г.А. Свиридюку за внимание и конструктивную критику.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (акт 211, контракт № 02.A03.21.0011).

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта и Олдройта / А.П. Осколков // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.
2. Свиридюк, Г.А. Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Известия вузов. Математика. – 1988. – № 1. – С. 74–79.
3. Осколков, А.П. Об одной квазилинейной параболической системе с малым параметром, аппроксимирующей систему Навье – Стокса / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1980. – Т. 96. – С. 233–236.
4. Свиридюк, Г.А. О многообразии решений одной задачи несжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 10. – С. 1846–1848.
5. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.
6. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.
7. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.
8. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston, Köln: VSP, 2003.
9. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Известия РАН. Серия: Математика. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–207.
10. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.

11. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1538–1543.
12. Кондюков, А.О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова ненулевого порядка / А.О. Кондюков, Т.Г. Сукачева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 5. – С. 823–829.
13. Ленг, С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – М.: Мир, 1967.
14. Борисович, Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере – Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи математических наук. – 1977. – Т. 32, № 4. – С. 3–54.
15. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012.
16. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012.
17. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высшего порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012.
18. Загребина, С.А. Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016.
19. Zagrebina, S.A. A Multipoint Initial-Final Value Problem for a Linear Model of Plane-Parallel Thermal Convection in Viscoelastic Incompressible Fluid / S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 5–22.
20. Zamyshlyaeva, A.A. The Cauchy Problem for the Sobolev Type Equation of Higher Order / A.A. Zamyshlyaeva, E.V. Bychkov // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 1. – С. 5–14.
21. Keller, A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff Type / A.V. Keller // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 2. – P. 39–59.
22. Sviridyuk, G.A. The Barenblatt–Zheltov–Kochina Model with Additive White Noise in Quasi-Sobolev Spaces / G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – V. 3, № 1. – P. 61–67.

Алексей Олегович Кондюков, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра «Алгебра и геометрия», Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (г. Великий Новгород, Российская Федерация), k.a.o_leksey999@mail.ru.

Тамара Геннадьевна Сукачева, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Алгебра и геометрия», Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (г. Великий Новгород, Российская Федерация); научно-исследовательская лаборатория «Неклассические уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), tamara.sukacheva@novsu.ru.

Поступила в редакцию 10 июня 2018 г.

MSC 35A01 DOI: 10.14529/mmp180405

PHASE SPACE OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE OSKOLKOV SYSTEM OF HIGHEST ORDER

A.O. Kondyukov[1]***, T.G. Sukacheva***[1,2]
[1]Novgorod State University, Velikiy Novgorod, Russian Federation
[1]South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mails: k.a.o_leksey999@mail.ru, tamara.sukacheva@novsu.ru

In recent decades, the theory of Sobolev type equations is actively studied in various aspects. The application of the semigroup approach to the theory of singular Sobolev type equations has received a deep and wide development in the works of the scientific direction headed by G.A. Sviridyuk. This work is adjacent to this scientific direction. The first initial-boundary value problem for the Oskolkov system is investigated. In our case, the system simulates a plane-parallel incompressible Kelvin–Voigt fluid of the higher order. This problem has an advantage, since the phase space for the above system can be described completely at any values of the parameter that characterizes the elastic properties of the liquid. This article is devoted to presenting of this fact. The study is carried out within the framework of the theory of semi-linear autonomous Sobolev type equations on the basis of the concepts of a relatively spectrally bounded operator and a quasi-stationary trajectory.

Keywords: Sobolev type equations; phase space; quasi-stationary trajectories; Oskolkov systems; incompressible viscoelastic Kelvin–Voigt fluid.

References

1. Oskolkov A.P. Initial-Boundary Value Problems for the Equations of the Motion of the Kelvin–Voight and Oldroyd Fluids. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova)*, 1988, no. 179, pp. 126–164. (in Russian)
2. Sviridyuk G.A. On a Model of the Dynamics of an Incompressible Viscoelastic Fluid. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1994, vol. 38, no. 1, pp. 59–68. (in Russian)
3. Oskolkov A.P. On a Quasilinear Parabolic System with a Small Parameter Approximating the Navier–Stokes System. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, 1980, vol. 96, pp. 233–236. (in Russian)
4. Sviridyuk G.A. On the Variety of Solutions of a Certain Problem of an Incompressible Viscoelastic Fluid. *Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 10, pp. 1846–1848.
5. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Phase Spaces of a Class of Operator Equations. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 250–258.
6. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. The Cauchy Problem for a Class of Semilinear Equations of Sobolev Type. *Siberian Mathematical Journal*, 1990, vol. 31, no. 5, pp. 109–119. (in Russian)
7. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Semigroups of Operators. *Russian Mathematical Surveys (Uspekhi Matematicheskikh Nauk)*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 47–74. (in Russian)
8. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, VSP, 2003. DOI: 10.1515/9783110915501
9. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1993, vol. 57, no. 3, pp. 192–207. (in Russian)
10. Sviridyuk G.A. Phase Spaces of Semilinear Equations of Sobolev Type with Relatively Strongly Sectorial Operators. *Algebra and Analysis*, 1994, vol. 6, no. 5, pp. 216–237. (in Russian)

11. Sviridyuk G.A., Yakupov M.M. The Phase Space of the Initial-Boundary Value Problem for the Oskolkov System. *Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 11, pp. 1538–1543.
12. Kondyukov A.O., Sukacheva T.G. Phase Space of the Initial-Boundary Value Problem for the Oskolkov System of Nonzero Order. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 5, pp. 823–829. DOI: 10.7868/S0044466915050130
13. Leng S. *Introduction to Differentiable Manifolds*. N.Y., Springer, 2002.
14. Borisovich Yu.G., Zvyagin V.G., Sapronov Y.I. Nonlinear Fredholm Mappings and Leray-Schauder Theory. *Russian Mathematical Surveys*, 1977, vol. 32, no. 4, pp. 3–54. (in Russian)
15. Manakova N.A. *Zadachi optimal'nogo upravleniya dlya uravnenij sobolevskogo tipa* [Optimal Control Problems for Sobolev Type Equations]. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. (in Russian)
16. Sagadeeva M.A. *Dihotomii reshenij linejnyh uravnenij sobolevskogo tipa* [Dichotomies of Solutions of Linear Sobolev Type Equations]. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. (in Russian)
17. Zamyshlyaeva A.A. *Linejnye uravneniya sobolevskogo tipa vysshego poryadka* [Linear Sobolev Type Equations of Higher Order]. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2012. (in Russian)
18. Zagrebina S.A. *Ustojchivye i neustojchivye mnogoobraziya reshenij polulinejnyh uravnenij sobolevskogo tipa* [Stable and Unstable Manifolds of Solutions of Semilinear Sobolev Type Equations]. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2016. (in Russian)
19. Zagrebina S.A. A Multipoint Initial-Final Value Problem for a Linear Model of Plane-Parallel Thermal Convection in Viscoelastic Incompressible Fluid. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 5–22. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp140301
20. Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V. The Cauchy Problem for the Sobolev Type Equetion of Higher Order. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 5–14. DOI: 10.14529/mmp180101
21. Keller A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff Type. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 39–59. DOI: 10.14529/jcem150205
22. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Barenblatt–Zheltov–Kochina Model with Additive White Noise in Quasi-Sobolev Spaces. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 61–67. DOI: 10.14529/jcem160107

Received June 10, 2018