УДК 517.9+519.216.2 DOI: 10.14529/mmp190105

СИНГУЛЯРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА В ТЕРМИНАХ ТЕКУЩИХ СКОРОСТЕЙ РЕШЕНИЯ

Е.Ю. Машков[1]***, Д.Н. Тютюнов***[1]
[1]Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация

Изучается система стохастических дифференциальных уравнений, в левой и правой частях которых стоят прямоугольные постоянные числовые матрицы, образующие сингулярный пучок. Система рассматривается в терминах текущих скоростей решения, являющихся прямым аналогом физической скорости детерминированных процессов. Для исследования данной системы мы применяем преобразование Кронекера – Вейерштрасса пучка матриц коэффициентов к канонической форме, что существенно упрощает исследование уравнений. В результате каноническая система уравнений распадается на независимые подсистемы четырех типов. Для подсистем, соответствующих жордановым и сингулярным клеткам Кронекера, получены явные формулы для решений и условия разрешимости, а для подсистемы, разрешенной относительно симметрической производной, с применением замены метрики подпространства и последующему сведению системы к уравнению в форме Ито, доказано существование решения. В результате для рассматриваемой системы доказана теорема существования решений при выполнении некоторых дополнительных условий на коэффициенты системы.

Ключевые слова: производная в среднем; текущая скорость; винеровский процесс; стохастическое уравнение леонтьевского типа.

Посвящается 70-летию профессора Ю.Е. Гликлиха.

Введение

Под сингулярной системой леонтьевского типа мы понимаем специальный класс дифференциально-алгебраических систем вида

$$dL\xi(t) = M\xi(t)dt + f(t)dt,\ \ 0 \leq t \leq T,$$

где $M + \lambda L$ – сингулярный пучок постоянных матриц размера $n \times m$; $\xi(t)$ – искомый процесс; $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция. Такие системы встречаются в различных технических приложениях [1,2] и в теории управления [3]. Данная система нами будет рассматриваться в терминах симметрических прозводных в среднем (текущих скоростей) [4] случайных процессов. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией производных в среднем, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов.

Стохастические уравнения леонтьевского типа в текущих скоростях решений впервые были рассмотрены в работе [5], в которой пучок матриц был регулярен и удовлетворял условию «ранг-степень», там была доказана теорема существования решений уравнения для коэффициентов диффузии различных типов. Затем эти уравнения были изучены в работе [6], в которой пучок матриц не удовлетворял условию «ранг-степень» и было доказано существование решений. Потом в работе [7] были изучены уравнения с переменными матрицами коэффициентов и было установлено существование решений при некоторых ограничениях на матрицы коэффициентов. В данной работе будут изучены системы с сингулярным пучком постоянных матриц коэффициентов. С применением преобразования Кронекера – Вейерштрасса для пучка матриц рассматриваемая в работе система будет приведена к каноническому виду, и для нее будет доказано существование решений.

1. Производные в среднем

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n, $t \in [0, l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной для всех t. Известно, что каждый такой процесс порождает семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$ «настоящее» $\mathcal{N}_t^\xi$, которое будем считать полным, т.е. пополненным всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$ относительно «настоящего» $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ через E_t^ξ. Обычное («безусловное») математическое ожидание обозначается символом E.

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону [8, 9] даем следующее определение:

Определение 1. [4] *(i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\right),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \triangle t)}{\triangle t}\right),$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают. Из свойств условного математического ожидания (см. [10]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t, x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \triangle t) - \xi(t)}{\triangle t} | \xi(t) = x\right),$$
$$Y_*^0(t, x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \triangle t)}{\triangle t} | \xi(t) = x\right),$$

на R^n, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t, \xi(t))$.

Определение 2. [4] *Производная* $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ *называется симметрической производной в среднем. Производная* $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ *называется антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) + Y^0_*(t,x))$ и $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) - Y^0_*(t,x))$.

Определение 3. [4] $v^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ *называется текущей скоростью процесса* $\xi(t)$*;* $u^\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ *называется осмотической скоростью процесса* $\xi(t)$*.*

Физический смысл текущей и осмотической скоростей состоит в следующем. Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детерминированных процессов. Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает «случайность» процесса.

Введем, следуя Ю.Е. Гликлиху [4], дифференциальный оператор D_2, который действует на L_1-случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [0,l]$ по правилу

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E^\xi_t \left(\frac{(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^*}{\Delta t} \right),$$

где $(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))$ рассматривается как вектор-столбец (вектор в R^n), а $(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^*$ – это вектор-строка (сопряженный или транспонированный вектор), а предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Отметим, что матричное произведение столбца слева и строки справа – это матрица, так что $D_2\xi(t)$ есть симметрическая неотрицательно-определенная матричная функция на $[0,l] \times R^n$.

Определение 4. [4] D_2 *называется квадратичной производной в среднем.*

Замечание 1. Из свойств условного математического ожидания [10] следует, что существует измеримое по Борелю отображение (регрессия) $\alpha(t,x)\colon R \times R^n \to \bar{S}_+$, такое, что $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$, где $\bar{S}_+$ – множество неотрицательно-определенных симметрических $n \times n$ матриц.

Рассмотрим диффузионный процесс, являющийся сильным решением следующего стохастического дифференциального уравнения в форме Ито [11]

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \int_0^t A(s,\xi(s))dw(s), \tag{1}$$

где $a(t,x)$ и $A(t,x)$ – гладкие по совокупности переменных отображения из $[0,l] \times R^n$ в R^n и в $L(R^n, R^n)$, соответствено. Тогда имеют место

Теорема 1. [4] *Пусть* $\xi(t)$ *– диффузионный процесс* (1)*. Тогда производная в среднем справа* $D\xi(t)$ *существует и имеет вид* $D\xi(t) = a(t,\xi(t))$*.*

Теорема 2. [4] *Для диффузионного процесса* (1) *квадратичная производная* $D_2\xi(t)$ *существует и имеет вид* $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$*,* $\alpha(t,x) = A(t,x)A^*(t,x)$ *– коэффициент диффузии.*

2. Каноническая форма сингулярного пучка постоянных матриц

Приведем необходимые сведения из теории постоянных матриц, подробное изложение которых имеется в книге [12].

Определение 5. *Если A и B – матрицы размера $n \times m$, то матрица $\lambda A + B$ называется матричным пучком, или просто пучком. Здесь λ является параметром, а не конкретным числом.*

Определение 6. *Если A и B – квадратные матрицы и $det(\lambda A + B)$ не равен нулю тождественно, то пучок $\lambda A + B$ называют регулярным. В противном случае, пучок называется сингулярным.*

Теорема 3. *Для сингулярного пучка матриц $\lambda A + B$ размера $n \times m$, у которого строки и столбцы не связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами, имеется преобразование Кронекера – Вейерштрасса (описывается парой невырожденных матриц (операторов) P_L и P_R размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно), при котором матрица $P_L B P_R + \lambda P_L A P_R$ имеет квазидиагональный вид*

$$\begin{pmatrix} \lambda A_0 + B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{\varepsilon_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & L_{\varepsilon_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L^T_{\nu_1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L^T_{\nu_q} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$(0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_2 \le \ldots \le \varepsilon_p,\ \ 0 < \nu_1 \le \nu_2 \le \ldots \le \nu_q),$$

где

$$L_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

каноническая сингулярная клетка Кронекера размера $\varepsilon \times (\varepsilon + 1)$, L^T_ν – матрица, транспонированная к L_ν и $\lambda A_0 + B_0$ – регулярный $\delta \times \delta$ – пучок матриц, который имеет каноническую форму Вейерштрасса, т.е.

$$\lambda A_0 + B_0 = \lambda \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{\delta - d} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где N – квазидиагональная матрица, у которой вдоль главной диагонали стоят жордановы клетки с нулями по диагонали и единицами над ней, J – квадратная матрица, I – единичная матрица.

3. Основной результат

Рассматривается сингулярный пучок постоянных матриц $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$ размера $n\times m$, причем в случае с квадратными матрицами $\tilde{L}$ вырождена, также предполагается, что строки и столбцы рассматриваемого пучка не связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами. Пусть P_L и P_R матрицы размеров $n\times n$ и $m\times m$ соответственно, приводящие рассматриваемый пучок к канонической форме Кронекера – Вейерштрасса. Рассмотрим некоторую симметрическую неотрицательно-определенную матрицу Θ в R^m и введем в R^m матрицу $\bar{\Theta}=P_R\Theta P_R^*$. Для C^∞-гладкой n-мерной вектор-функции $\tilde{f}(t)$ рассмотрим систему в R^m

$$\begin{cases}\tilde{L}D_S\xi(t)=\tilde{M}\xi(t)+\tilde{f}(t),\\ D_2\xi(t)=\bar{\Theta},\end{cases}\tag{4}$$

которую следуя работам [5–7], будем называть сингулярным стохастическим уравнением леонтьевского типа в текущих скоростях. Адекватные начальные условия для решений уравнения (4) мы опишем ниже. Заметим, что и матрица Θ, и матрица $\bar{\Theta}$ по построению симметричны и неотрицательно-определены. Поэтому вторая строка в (4) корректна.

Выполняя описанное выше преобразование Кронекера – Вейерштрасса над пучком матриц $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$, получаем следующие квазидиагональные матрицы $L=P_L\tilde{L}P_R$ и $M=P_L\tilde{M}P_R$. Обозначим $\eta(t)=P_R^{-1}\xi(t)$, $f(t)=P_L\tilde{f}(t)$. Тогда первое равенство из (4) преобразуется к такому виду $LD_S\eta(t)=M\eta(t)+f(t)$. С учетом равенства $\eta(t)=P_R^{-1}\xi(t)$ и определения D_2 получаем, что второе равенство для $\eta(t)$ из (4) принимает вид $D_2\eta(t)=\Theta$. Стало быть, уравнение (4) преобразуется в уравнение для $\eta(t)$ и принимает следующий канонический вид:

$$\begin{cases}LD_S\eta(t)=M\eta(t)+f(t),\\ D_2\eta(t)=\Theta.\end{cases}\tag{5}$$

Будем считать, что вектора базисов в R^n и в R^m пронумерованы таким образом, что жордановы и сингулярные клетки Кронекера располагаются в L и M так, как описано выше. Пусть регулярный блок пучка $\lambda L+M$ имеет размер $\delta\times\delta$, а размер единичной матрицы в левом верхнем углу L равен $d\times d$. Таким образом, принимая во внимание квазидиагональную структуру матриц L и M, система (5) распадается на независимые подсистемы четырех типов в подпространствах R^d, $R^{\delta-d}$ и подпространствах, соответствующих сингулярным блокам в L и M, т.е. пространство R^m распадается в прямую сумму подпространств, соответствующих диагональным блокам в L и M. Обозначим через $\chi(t)$, $\varsigma(t)$, $\zeta(t)$, $\theta(t)$ компоненты вектора $\eta(t)$, соответствующие всем типам блоков, а через $z(t), v(t), g(t), u(t)$ обозначим соответствующие компоненты вектора $P_Lf(t)$. Через F и K, G и H обозначим блоки, содержащие все сингулярные клетки типа L_ε, L_ν^T соответственно. Заметим, что (5) разрешимо только в том случае, когда матрица Θ принимает вид $\Theta=\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0&0\\0&\alpha_2&0&0\\0&0&\alpha_3&0\\0&0&0&\alpha_4\end{pmatrix}$, где $\alpha_1=(\alpha_1)^{ij}$, $\alpha_2=(\alpha_2)^{ij}$, $\alpha_3=(\alpha_3)^{ij}$, $\alpha_4=(\alpha_4)^{ij}$ – симметрические неотрицательно-определенные матрицы, соответствующие решениям всем видам рассматриваемых подсистем. Исследуем каждый тип уравнений.

В подпространстве R^d, соответствующем единичной матрице в L, получаем систему

$$\begin{cases} D_S\chi(t) = J\chi(t) + z(t), \\ D_2\chi(t) = \alpha_1. \end{cases} \tag{6}$$

Отметим, что если решение (6) существует, то оно должно представляться в виде (1).

Для изучения (6) введем в R^d новое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$, которое для произвольных векторов X и Y из R^d принимает вид $\langle X, Y\rangle = (\alpha_1^{-1}X, Y)$. Зададим начальное вероятностное распределение ρ_0 в R^d такое, что оно нигде не равно нулю, через χ_0 обозначим случайную величину в R^d с плотностью ρ_0. Рассмотрим векторное поле $v(t,x) = Jx + z(t)$ и обозначим через g_t его поток. Тогда, используя Теорему 8.50 из [4], мы получаем, что плотность $\rho(t)$ решения (6) с начальной плотностью ρ_0 имеет вид $\rho(t) = e^{p(t)}$, где $p(t,x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int\limits_0^t (Div\ \ v)(s, g_s(g_{-t}(x))ds$, $p_0 = \ln\rho_0$ и Div обозначает дивергенцию в R^d со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Отсюда следует, что для заданной матрицы α_1 и начальной плотности ρ_0 построенная плотность $\rho(t)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с гладким векторным полем $v(t,x)$. Следовательно, после нахождения плотности $\rho(t)$ для решения уравнения (6) мы можем вычислить также осмотическую скорость $u(t,x)$ по формуле $u = \frac{1}{2}\mathrm{Grad}\, p$, где Grad – градиент относительно нового скалярного произведения [4]. Отметим, что u однозначно определяется плотностью ρ и матрицей α_1 и, стало быть, производная в среднем справа для решения также однозначно вычисляется по формуле $a(t,x) = v(t,x) + \frac{1}{2}\mathrm{Grad}\, p$. Поскольку матрица α_1 невырождена, то по теореме 2 существует матрица C, такая, что $\alpha_1 = CC^*$. Следовательно, согласно теории уравнений с производными в среднем справа (см. Теоремы (1) и (2), а также монографию [4]) $\chi(t)$, должно удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению $\chi(t) = \chi_0 + \int_0^t a(s,\chi(s))ds + Cw(t)$, которое имеет сильное и сильно единственное решение $\chi(t)$ с начальной плотностью ρ_0, корректно определенное для $t \in [0,T]$ (см. [11]). А это и есть решение уравнения (6) в виде (1), которое нам и нужно.

Теперь перейдем к подсистеме, соответствующей жордановым клеткам в L

$$\begin{cases} ND_S\varsigma(t) = \varsigma(t) + v(t), \\ D_2\varsigma = \alpha_2 \end{cases} \tag{7}$$

в подпространстве $R^{\delta-d}$. Рассмотрим это уравнение на примере $(p+1)\times(p+1)$ жордановой клетки в верхнем левом углу N. В координатах первое уравнение системы (7) в этом блоке имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} D_S \begin{pmatrix} \varsigma^1(t) \\ \varsigma^2(t) \\ \vdots \\ \varsigma^p(t) \\ \varsigma^{p+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varsigma^1(t) + v^1(t) \\ \varsigma^2(s) + v^2(t) \\ \vdots \\ \varsigma^p(t) + v^p(t) \\ \varsigma^{p+1}(t) + v^{p+1}(t) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для неслучайных процессов D_S совпадает с $\frac{d}{dt}$. Из последнего уравнения получаем $0 = \varsigma^{p+1} + \upsilon^{p+1}(t)$ или $\varsigma^{p+1} = -\upsilon^{p+1}(t)$ является неслучайным процессом. Аналогично для уравнения с номером i получаем $\frac{d}{dt}\varsigma^{i+1} = \varsigma^i + \upsilon^i$, отсюда $\varsigma^i = \frac{d}{dt}\varsigma^{i+1} - \upsilon^i$ и тогда $\varsigma^i = \sum\limits_{k=i}^{p+1} -\frac{d^{k-i}}{dt^{k-i}}\upsilon^k(t)$ тоже является неслучайным процессом. Отметим, что уравнение (7) расщепляется на независимые уравнения, соответствующие клеткам Жордана в N, и для всех этих уравнений справедливы приведенные выше рассуждения. Стало быть, процесс $\varsigma(t)$ не является случайным. Но для любого неслучайного процесса его квадратичная производная равна нулю. Итак, (7) разрешимо, только если $\alpha_2 = 0$.

Далее изучим подсистему, соответствующую всем сингулярным клеткам типа L_ε

$$\begin{cases} FD_S\zeta(t) = K\eta(t) + g(t), \\ D_2\zeta = \alpha_3. \end{cases} \tag{8}$$

Как и выше, рассмотрим эту систему на примере одного уравнения, соответствующего одной сингулярной клетке размера $l \times (l+1)$, находящейся в левом верхнем углу $\lambda F + K$. Тогда в координатной форме первое уравнение системы (8) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} D_S \begin{pmatrix} \zeta^1(t) \\ \zeta^2(t) \\ \vdots \\ \zeta^l(t) \\ \zeta^{l+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^1(t) \\ \zeta^2(t) \\ \vdots \\ \zeta^l(t) \\ \zeta^{l+1}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g^1(t) \\ g^2(t) \\ \vdots \\ g^{l-1}(t) \\ g^l(t) \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\zeta^2(t) = \zeta^1(t) + g^1(t), \\ \dfrac{d}{dt}\zeta^3(t) = \zeta^2(t) + g^2(t), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{d}{dt}\zeta^{l+1}(t) = \zeta^l(t) + g^l(t), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \zeta^2(t) = \zeta^2(0) + \displaystyle\int_0^t (\zeta^1(s) + g^1(s))ds, \\ \zeta^3(t) = \zeta^3(0) + \displaystyle\int_0^t (\zeta^2(s) + g^2(s))ds, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \zeta^{l+1}(t) = \zeta^{l+1}(0) + \displaystyle\int_0^t (\zeta^l(s) + g^l(s))ds. \end{cases}$$

Это означает, что можно взять в качестве ζ^{l+1} произвольный детерминированный процесс, для которого можно найти производную порядка l, а потом рекуррентно получить все остальные компоненты процесса ζ. Дело обстоит таким образом потому, что в системе число неизвестных на единицу больше, чем число уравнений, т. е. система недоопределена. Как и выше, система (8) распадается на независимые подсистемы, соответствующие сингулярным клеткам Кронекера различных размеров и для которых выполняются приведенные выше рассуждения. Следовательно, процесс $\zeta(t)$ неслучайный и (8) разрешима в том случае, когда $\alpha_3 = 0$.

И, наконец, рассмотрим подсистему, соответствующую сингулярным клеткам Кронекера типа L_ν^T

$$\begin{cases} G\theta(t) = H\theta(t) + z(t), \\ D_2\theta = \alpha_4. \end{cases} \tag{9}$$

Эту систему тоже изучим на примере одного уравнения, соответствующего одной сингулярной клетке размера $(k+1)\times k$, расположенной в левом верхнем углу $\lambda G+H$. В координатной форме первое уравнение (9) имеет такой вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} D_S \begin{pmatrix} \theta^1(t) \\ \theta^2(t) \\ \vdots \\ \theta^{k-1}(t) \\ \theta^k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1(t) \\ \theta^2(t) \\ \vdots \\ \theta^{k-1}(t) \\ \theta^k(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^1(t) \\ u^2(t) \\ \vdots \\ u^k(t) \\ u^{k+1}(t) \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} 0 = \theta^1(t) + u^1(t), \\ \dfrac{d}{dt}\theta^1(t) = \theta^2(t) + u^2(t), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{d}{dt}\theta^{k-1}(t) = \theta^k(t) + u^k(t), \\ \dfrac{d}{dt}\theta^k(t) = u^{k+1}(t). \end{cases}$$

Начиная с первого уравнения, последовательно получаем

$$\theta^1(t) = -u^1(t),$$
$$\theta^2(t) = u^2(t) - \frac{d}{dt}u^1(t),$$
$$\vdots$$
$$\theta^k(t) = -u^k(t) - \frac{d}{dt}u^{k-1}(t) - \ldots - \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}u^1(t),$$

а также условие согласования

$$u^{k+1}(t) = -\frac{d}{dt}u^k(t) - \ldots - \frac{d^k}{dt^k}u^1(t). \tag{10}$$

Если компоненты $u^i(t)$ не удовлетворяют этому условию, то уравнение не имеет решений. Здесь число уравнений на единицу больше, чем число неизвестных, т. е. данная подсистема переопределена. Аналогично предыдущим случаям, система (9) разрешима тогда, когда $\alpha_4 = 0$ и для каждой ее подсистемы выполняются условия согласования (10) Заметим дополнительно, что поскольку $\varsigma(t)$, $\zeta(t)$, $\theta(t)$ неслучайны, то σ-алгебры «настоящее» для $\eta(t)$ и $\chi(t)$ совпадают. Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 4. *Пусть $\lambda\tilde{L}+\tilde{M}$ – сингулярный пучок матриц размера $n \times m$; P_L и P_R матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, приводящие рассматриваемый пучок к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса, $L = P_L\tilde{L}P_R$ и $M = P_L\tilde{M}P_R$; пусть в левом верхнем углу регулярной компоненты пучка, соответствующей матрице L, располагается единичная матрица I_d; α_1 – симметрическая положительно-определенная $d \times d$-матрица, $\Theta = diag\{\alpha_1, 0\}$, $\bar{\Theta} = P_R\Theta P_R^*$. Тогда для C^∞-гладкой n-мерной вектор-функции $\tilde{f}(t)$ уравнение $\begin{cases}\tilde{L}D_S\xi(t) = \tilde{M}\xi(t)+\tilde{f}(t),\\ D_2\xi(t)=\bar{\Theta},\end{cases}$ трансформируемое к $\begin{cases}LD_S\eta(t) = M\eta(t)+f(t),\\ D_2\eta(t)=\Theta\end{cases}$ с начальными условиями $\varsigma(0)=\varsigma_0$, $\zeta(0)=\zeta_0$, $\theta(0)=\theta_0$ в подпространствах, соответствующих жордановым и сингулярным клеткам Кронекера, а также случайной величиной $\chi(0)=\chi_0$ с плотностью ρ_0 нигде не равной нулю в R^d, при выполнении условий согласования* (10) *имеет решение.*

Работа проводилась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00048.

Литература

1. Замышляева, А.А. Стохастическая модель оптимальных динамических измерений / А.А. Замышляева, А.В. Келлер, М.Б. Сыропятов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 2. – С. 147–153.
2. Шестаков, А.Л. Математическое моделирование состава строительных смесей / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, М.Д. Бутакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 1. – С. 100–110.
3. Белов, А.А. Дескрипторные системы и задачи управления / А.А. Белов, А.П. Курдюков. – М.: АНО Физматлит, 2015.
4. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London: Springer, 2011.
5. Gliklikh, Yu.E. Stochastic Leontieff Type Equations in Terms of Current Velocities of the Solution / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – V. 1, № 2. – P. 45–51.
6. Гликлих, Ю.Е. Стохастические уравнения леонтьевского типа в терминах текущих скоростей решения / Ю.Е. Гликлих, Е.Ю. Машков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 31–40.
7. Машков, Е.Ю. О стохастических уравнениях леонтьевского типа с переменными матрицами, заданными в терминах текущих скоростей решения / Е.Ю. Машков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 26–32.
8. Nelson, E. Dynamical Theory of Brownian Motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967.
9. Nelson, E. Quantum Fluctuations / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1985.
10. Партасарати, К.Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К.Р. Партасарати. – М.: Мир, 1988.
11. Гихман, И.И. Теория случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1975.
12. Деммель, Дж. Вычислительная линейная алгебра / Дж. Деммель. – М.: Мир, 2001.

Евгений Юрьевич Машков, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра «Высшая математика», Юго-Западный государственный университет (г. Курск, Российская Федерация), mashkovevgen@yandex.ru.

Дмитрий Николаевич Тютюнов, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Высшая математика», Юго-Западный государственный университет (г. Курск, Российская Федерация), tjutjunov@mail.ru.

Поступила в редакцию 12 ноября 2018 г.

MSC 60H30, 60H10 **DOI: 10.14529/mmp190105**

SINGULAR STOCHASTIC LEONTIEFF TYPE EQUATION IN CURRENT VELOCITIES OF SOLUTIONS

***E.Yu. Mashkov*[1], *D.N. Tyutyunov*[1]**
[1]Southwest State University, Kursk, Russian Federation,
E-mails: mashkovevgen@yandex.ru, tjutjunov@mail.ru

We investigate the system of stochastic differential equations, such that in the left-hand and right-hand sides there are rectangular constant matrices forming degenerate pencil. The system is considered in terms of current velocities of solution that are a direct analogue of physical velocity of deterministic processes. For investigation of this system we apply the Kronecker–Weierstrass transformation of the pencil of matrices coefficients to the canonical form that efficiently simplifies the investigation. As a result, the canonical system splits into independent sub-systems of four types. For the sub-systems corresponding to the Jordan singular Kronecker's cells, we obtain the explicit formulae of solutions and conditions for solvability. For the sub-system resolved with respect to symmetric derivatives, we apply the replacement of the metric in the subspace, then bring the system to a stochastic equation in the Ito form and prove the existence of its solution. As a result for the system under consideration we prove the existence of the solution theorem under some additional conditions on the coefficients.

Keywords: mean derivative; current velocity; Wiener process; stochastic Leontieff type equation.

References

1. Zamyshlyaeva A.A., Keller A.V., Syropiatov M.B. Stochastic Model of Optimal Dynamic Measurements. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 147–156. DOI: 10.14529/mmp180212
2. Shestakov A.L., Sviridyk G.A., Butakova M.D. The Mathematical Modelling of the Production of Construction Mixtures with Prescribed Properties. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 100-110. DOI: 10.14529/mmp150108
3. Belov A.A., Kurdyukov A.P. *Deskriptornye sistemy i zadachi upravleniya* [Descriptor Systems and Control Problems]. Moscow, Fizmatlit, 2015. (in Russian)
4. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*, London, Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9

5. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff Type Equations in Terms of Current Velocities of the Solution. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, vol. 1, no. 2, pp. 45–51.
6. Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu. Stochastic Leontieff Type Equations in Terms of Current Velocities of the Solution II. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 31–40. DOI: 10.14529/mmp160303
7. Mashkov E.Yu. On the Stochastic Leontief Type Equations with Variable Matrices Given in Terms of Current Velocities of the Solution. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2016, vol. 8, no. 4, pp. 26–32. DOI: 10.14529/mmph160403
8. Nelson E. *Dynamical Theory of Brownian Motion.* Princeton, Princeton University Press, 1967.
9. Nelson E. *Quantum Fluctuations.* Princeton, Princeton University Press, 1985.
10. Parthasaraty K.R. *Introduction to Probability and Measure.* N.Y., Springer, 1978.
11. Gihman I.I. *Theory of Stochastic Processes.* N.Y., Springer, 1979. DOI: 10.1007/978-1-4615-8065-2
12. Demmel J. *Applied Numerical Linear Algebra.* Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. DOI: 10.1137/1.9781611971446

Received November 12, 2018