

РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В.П. Шапеев^{1,2}, Л.С. Брындин^{1,2}, В.А. Беляев¹

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

² Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация

В данной работе рассматривается новый вариант метода коллокации и наименьших квадратов (КНК) для численного решения краевых задач для эллиптических уравнений в полигональных областях, в том числе в многосвязных. Возможности этого варианта и численные эксперименты рассмотрены на примерах решения уравнения Пуассона и неоднородного бигармонического уравнения. В качестве приложения решение неоднородного бигармонического уравнения использовано для моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) изотропной упругой тонкой пластинки полигональной формы, находящейся под действием поперечной нагрузки. Новый вариант метода КНК основан на триангуляции исходной области, чем принципиально отличается от предложенных ранее более сложных вариантов метода КНК решения краевых задач для уравнений с частными производными (УЧП) в нерегулярных областях. Установлено, что приближенные решения рассмотренных задач на последовательности измельчающихся сеток сходятся с повышением порядка и с высокой точностью совпадают с тестовыми решениями.

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших квадратов; полигональная многосвязная область; уравнение Пуассона; неоднородное бигармоническое уравнение; напряженно-деформированное состояние.

Введение

Важным направлением вычислительной математики и прикладного математического моделирования является разработка новых численных методов решения краевых задач для УЧП в нерегулярных областях. Актуальность данного направления очевидна, поскольку многие явления в реальном мире происходят в областях со сложной геометрической формой. Поэтому востребована возможность моделирования таких явлений в областях с формой, соответствующей действительности, чтобы на практике в расчетах моделируемых явлений и физических процессов получались достоверные результаты.

Бигармонические уравнения имеют много приложений в разных областях науки и техники [1, 2]. В данной работе в качестве приложения решение неоднородного бигармонического уравнения используется для моделирования НДС изотропной упругой тонкой пластинки полигональной формы в рамках теории тонких пластин [3]. На данный момент существует много разных численных методов решения бигармонического уравнения, сведения о которых можно найти в [1, 2]. Однако, многие из них применимы только в канонических областях. Здесь также следует отметить, что популярна

идея решения краевых задач для УЧП в нерегулярных областях путем отображения их в каноническую область, для которой проще применить численный метод. О недостатках такого подхода указано в работе [4].

Также известно, что численное решение бигармонического уравнения, несмотря на его линейный характер, вызывает трудности из-за наличия производных четвертого порядка в дифференциальном уравнении. В этом случае имеет место плохая обусловленность исходной задачи и соответственно приближенной задачи, полученной тем или иным способом ее аппроксимации. Тем не менее, в случае шарнирного опирания пластинки многоугольной формы решение задачи сводится к последовательному решению системы двух уравнений Пуассона с краевыми условиями Дирихле [3, 5]. В этом случае система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), к решению которой сводится численное решение задачи, оказывается обусловлена лучше, чем в первом случае. В случае других краевых условий различными авторами предлагались нетривиальные алгоритмы, позволяющие свести исходное бигармоническое уравнение к решению системы двух уравнений Пуассона [1, 5]. Важным обстоятельством является то, что метод КНК способен численно решить с повышенной точностью исходное бигармоническое уравнение без сведения его к системе уравнений более низкого порядка.

За последнее время проекционно-сеточный метод КНК показал свою универсальность и эффективность при решении краевых задач для УЧП в областях с криволинейной границей [6], в выпуклых четырехугольных областях [7, 8], в произвольных треугольных областях [4], а также в областях с дискретно заданной границей [2, 9]. В этих работах было показано преимущество применения регулярной сетки с прямоугольными ячейками внутри области и «одинарного» слоя нерегулярных ячеек (н-ячеек) около границы области. Для достижения аппроксимации повышенной точности дифференциальной задачи использовались «законтурные», т.е. не принадлежащие исходной области решения дифференциальной задачи части граничных прямоугольных ячеек, отсеченных границей. Кроме того, «малые» по размеру (в сравнении с остальными) и/или вытянутые н-ячейки полагались «несамостоятельными» и присоединялись к соседним «самостоятельным» ячейкам.

В настоящей работе предлагается новый вариант метода КНК для решения уравнения Пуассона и неоднородного бигармонического уравнения в полигональных областях. Здесь в методе КНК для построения расчетной сетки применяется триангуляция исходной области. Излагаемый подход обладает рядом преимуществ и достоинств, среди которых в первую очередь следует выделить его применимость в случае невыпуклой и многосвязной полигональной области; относительную простоту реализации в сравнении с предложенными ранее вариантами метода КНК для нерегулярных областей.

1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

1.1. Постановка задачи и численный метод ее решения

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad u|_{\delta\Omega} = g(x_1, x_2) \quad (1)$$

в полигональной области Ω с границей $\delta\Omega$ (рис. 1 а), где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $u(x_1, x_2)$ – искомое решение, $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ – заданные функции.

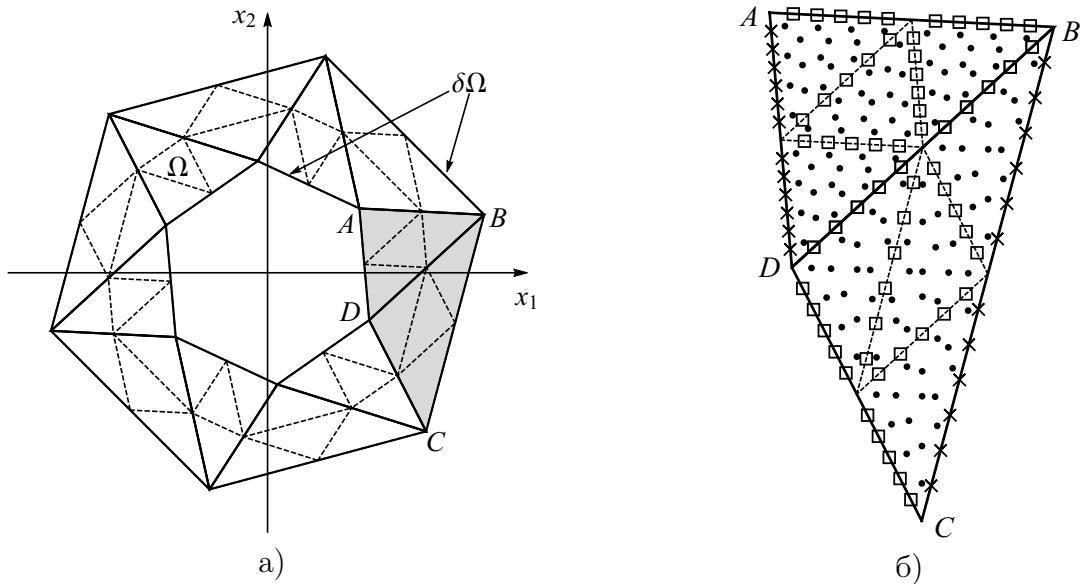


Рис. 1. Полигональная двусвязная область решения задачи. Жирные линии – стороны 12 «больших» треугольников. Пунктирные линии – стороны ячеек регулярных сеток в «больших» треугольниках (а). Фрагмент расчетной области, где • – точки коллокации; □ – точки согласования; × – точки записи краевых условий (б)

Разобьем изначально исходную полигональную область Ω на N_t «больших» треугольников (на рис. 1 а) 12 «больших» треугольников). Далее в каждом «большом» треугольнике зададим регулярную сетку с N^2 треугольными ячейками одинакового размера и подобными содержащему их «большому» треугольнику (рис. 1 а). Обозначим через $N_{cells} = N_t N^2$ – количество расчетных ячеек в области. Те ячейки, ни одна сторона которых не лежит на границе области $\delta\Omega$, назовем внутренними, остальные – граничными. Введем локальную систему координат в каждой ячейке области

$$y_1 = \frac{(x_1 - x_{1j})}{h_{1t}}, \quad y_2 = \frac{(x_2 - x_{2j})}{h_{2t}}, \quad (2)$$

где (x_{1j}, x_{2j}) – центр пересечения медиан j -ой треугольной ячейки ($j = 1, \dots, N_{cells}$), $2h_{1t}$ – длина стороны ячейки, к которой проведена высота размера $2h_{2t}$, $t = 1, \dots, N_t$, $v(y_1, y_2) = u(x_1(y_1), x_2(y_2))$. Задача (1) после замены (2) в локальных переменных примет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{h_{1t}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_{2t}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} = f(x_1(y_1), x_2(y_2)), & (y_1, y_2) \in \Omega, \quad t = 1, \dots, N_t, \\ v = g(x_1(y_1), x_2(y_1)), & (y_1, y_2) \in \delta\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

В j -ой ячейке приближенное решение $v_{hj}(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{15} b_{ij} \phi_i$ задачи (3) ищем в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами базисных элементов пространства полиномов от двух переменных. В качестве базисных элементов взяты $\phi_i(y_1, y_2) \in \{y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \mid 0 \leq \alpha_1 \leq 4, 0 \leq \alpha_2 \leq 4 - \alpha_1\}$, $i = 1, \dots, 15$. Глобальное приближенное решение состоит из «локальных» аналитических «кусков», связанных с центром соответствующей ячейки. Для определения b_{ij} в каждой ячейке выписывается переопределенная «локальная» СЛАУ. В нее входят уравнения коллокации,

условия согласования и краевые условия на $\delta\Omega$, если ячейка является граничной. Совокупность СЛАУ во всех ячейках – глобальная СЛАУ определяет глобальное решение. Здесь число уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий в каждой ячейке в сумме равно 32.

Уравнения коллокации, умноженные на $h_{1t}h_{2t}$, в каждой j -ой ячейке выписываются в 16 точках коллокации (рис. 1 б) и имеют вид:

$$k_c \left(\frac{h_{2t}}{h_{1t}} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y_1^2} + \frac{h_{1t}}{h_{2t}} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y_2^2} \right) = k_c h_{1t} h_{2t} f(x_1, x_2), \quad (4)$$

где $t = 1, \dots, N_t$, k_c – весовой множитель уравнения коллокации в переопределенной СЛАУ при применении взвешенного метода наименьших квадратов.

В качестве условия согласования решения в нескольких точках согласования (рис. 1 б) на общих сторонах между соседними ячейками требуется непрерывность линейной комбинации с весовыми множителями значений решения и его производной по нормали

$$k_{m_0} v_{hj} + k_{m_1} \frac{\partial v_{hj}}{\partial n_j} = k_{m_0} \hat{v}_h + k_{m_1} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial n_j}, \quad (5)$$

где n_j – внешняя нормаль к границе j -ой ячейки; v_{hj} и \hat{v}_h – пределы приближенного решения при стремлении изнутри и извне к границе j -ой ячейки, соответственно; k_{m_0}, k_{m_1} – весовые множители условий согласования.

Если сторона граничной j -ой ячейки принадлежит границе области, то в нескольких точках (рис. 1 б) на ней выпишем краевые условия

$$k_{b_0} v_{hj} = k_{b_0} g(x_1, x_2), \quad (6)$$

где k_{b_0} – весовой множитель краевого условия Дирихле.

В каждой ячейке, объединяя уравнения (4)–(6), относительно b_{rj} получим переопределенную локальную СЛАУ [2, 4, 6–9, 12]

$$\sum_{r=1}^{15} B_{lr} b_{rj} = F_l, \quad l = 1, \dots, 32, \quad j = 1, \dots, N_{cells}. \quad (7)$$

Решение системы (7) на каждой итерации находится из условия минимума функционала $\Phi = \sum_{l=1}^{32} \sum_{r=1}^{15} (B_{lr} b_{rj} - F_l)^2$ по коэффициентам b_{rj} , $r = 1, \dots, 15$. Глобальная СЛАУ решается в итерационном процессе Гаусса – Зейделя, который продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{rj} |b_{rj}^{n+1} - b_{rj}^n| < \epsilon, \quad (8)$$

где b_{rj}^n – r -й ($r = 1, \dots, 15$) коэффициент полинома, аппроксимирующего решение в ячейке с номером j на n -й итерации, величина ϵ – заданная малая константа [2, 4, 6–9, 12].

1.2. Результаты численных экспериментов

Во всех представленных ниже таблицах в пункте 1.2 приведены значения абсолютной погрешности приближенного решения в равномерной норме

$$E_c = \| u - u_h \|_C = \max_{j=1, \dots, N_{cells}} \left(\max_{m=1, \dots, L_j} |u(x_{1m}, x_{2m}) - u_{hj}(x_{1m}, x_{2m})| \right), \quad (9)$$

где L_j – количество равномерно распределенных контрольных точек (x_{1m}, x_{2m}) , взятых в j -ой ячейке для подсчета в них погрешности, u – точное решение задачи (1),

u_h – приближенное решение в области Ω , $u_{h,j}$ – приближенное решение в j -ой ячейке. Порядок сходимости погрешности приближенного решения вычисляется по формуле

$$R = \log_2 \frac{E_p}{E_c}, \quad (10)$$

где E_c – значение погрешности на текущей сетке размера N^2 , E_p – значение погрешности на сетке размера $N^2/4$. В численных экспериментах были взяты следующие значения параметров: $L_j = 100$, $\epsilon = 10^{-14}$ в случае примеров 1–3 и $\epsilon = 0,5 \cdot 10^{-10}$ в случае примера 4, $k_c = 1$, $k_{m_0} = 1$, $k_{m_1} = 5\sqrt{h_{1t}h_{2t}}$ ($t = 1, \dots, N_t$), $k_{b_0} = 1,5$. В качестве начального приближения решения взяты $b_{rj} = 0,4$, где $r = 1, \dots, 15$, $j = 1, \dots, N_{cells}$. Пусть N_{iter} – количество итераций. Здесь в расчетах комбинируется операция продолжения (prolongation) в методе Федоренко и на всех сетках ускорение итерационного процесса по Крылову [10, 11].

Пример 1. В табл. 1 приведены результаты численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}$ в четырехугольной области с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0,8;0,3)$, $(-0,3;0,9)$. Исходная область разбивалась на $N_t = 2$ «больших» треугольника.

Таблица 1

Результаты численных экспериментов

Пример 1				Пример 2			
N_{cells}	E_c	R	N_{iter}	N_{cells}	E_c	R	N_{iter}
98	2,24E-8	–	81	192	4,44E-8	–	78
392	7,40E-10	4,91	74	768	1,46E-9	4,92	70
1568	3,00E-11	4,62	85	3072	4,70E-11	4,95	70
6272	1,85E-12	4,01	121	12288	2,38E-12	4,84	91
Пример 3				Пример 4			
N_{cells}	E_c	R	N_{iter}	N_{cells}	E_c	R	N_{iter}
400	3,73E-8	–	95	1536	9,89E-2	–	243
1600	1,17E-9	4,99	128	6144	5,98E-3	4,03	445
6400	5,51E-11	4,40	77	24576	3,69E-4	4,01	1085
25600	3,49E-12	4,01	139	98304	2,30E-5	4,00	2010

Пример 2. В табл. 1 приведены результаты численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$ в двусвязной области (рис. 1 а), вершины внешней границы: $(\cos \frac{\pi}{12}; \sin \frac{\pi}{12})$, $(\cos \frac{7\pi}{4}; \sin \frac{7\pi}{4})$, $(\cos \frac{17\pi}{12}; \sin \frac{17\pi}{12})$, $(\cos \frac{13\pi}{12}; \sin \frac{13\pi}{12})$, $(\cos \frac{3\pi}{4}; \sin \frac{3\pi}{4})$, $(\cos \frac{5\pi}{12}; \sin \frac{5\pi}{12})$; вершины внутренней границы: $(\frac{1}{2} \cos \frac{7\pi}{36}; \frac{1}{2} \sin \frac{7\pi}{36})$, $(\frac{1}{2} \cos \frac{67\pi}{36}; \frac{1}{2} \sin \frac{67\pi}{36})$, $(\frac{1}{2} \cos \frac{55\pi}{36}; \frac{1}{2} \sin \frac{55\pi}{36})$, $(\frac{1}{2} \cos \frac{43\pi}{36}; \frac{1}{2} \sin \frac{43\pi}{36})$, $(\frac{1}{2} \cos \frac{31\pi}{36}; \frac{1}{2} \sin \frac{31\pi}{36})$, $(\frac{1}{2} \cos \frac{19\pi}{36}; \frac{1}{2} \sin \frac{19\pi}{36})$. Здесь $N_t = 12$.

Пример 3. В табл. 1 приведены результаты численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = \sin(x_1) + \sin(x_2)$ в невыпуклой шестиугольной области с вершинами $(0;0)$, $(0,5;1,25)$, $(1,5;1,5)$, $(1;2,25)$, $(2,5;2)$, $(2;0,5)$. Здесь $N_t = 4$.

Пример 4. В табл. 1 приведены результаты численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = e^{10x_1} + e^{10x_2} + e^{5x_1+5x_2}$, имеющим весьма большие градиенты в шестиугольной области с вершинами, которые совпадают с вершинами внешней границы из примера 2. Здесь $N_t = 6$.

Из приведенных результатов видно, что порядок сходимости погрешности приближенного решения не хуже четвертого, что обеспечено высокой степенью базисных полиномов в рассматриваемом функциональном пространстве. Такой порядок сходимости ожидался и он не был понижен несмотря на то, что в коэффициент остаточного члена аппроксимации решения, естественно, входят большие значения производных. Однако в этом примере величина погрешности больше по сравнению со случаем решений задач без особенностей, что и следовало ожидать.

Пример 5. Рассмотрим пример задачи Дирихле для уравнения Пуассона (1) с $f(x_1, x_2) = 1$, $g(x_1, x_2)|_{\delta\Omega} = 0$ [9] в шестиугольной области из примера 4. В этом примере из-за наличия разрыва вторых производных в точках излома границы имеет место особенность в решении задачи (см. раб. [9] и ссылки внутри). Это является причиной увеличения погрешности численного решения задачи и снижения порядка его сходимости, значение которого существенно зависит от рассматриваемой подобласти, взятой в Ω (табл. 2). Для оценки порядка сходимости численного решения в равномерной норме вычислялась величина

$$\tilde{E} = \| u_{N_{cells}} - u_{N_{cells}/4} \|_C = \max_{\xi=1, \dots, Q} |u_{N_{cells}}(x_{1\xi}, x_{2\xi}) - u_{N_{cells}/4}(x_{1\xi}, x_{2\xi})|, \quad (11)$$

где Q – количество равномерно распределенных контрольных точек $(x_{1\xi}, x_{2\xi})$ в области; u_{N_1, N_2} – численное решение, полученное на сетке, содержащей N_{cells} ячеек, $u_{N_{cells}/4}$ – численное решение на сетке, содержащей $N_{cells}/4$ ячеек. Порядок сходимости решения формально определялся по формуле

$$\tilde{R} = \log_2 \frac{\tilde{E}_p}{\tilde{E}_c} = \log_2 \frac{\| u_{N_{cells}} - u_{N_{cells}/4} \|_C}{\| u_{N_{cells}/4} - u_{N_{cells}/16} \|_C}, \quad (12)$$

где $\tilde{E}_p = \| u_{N_{cells}} - u_{N_{cells}/4} \|_C$, $\tilde{E}_c = \| u_{N_{cells}/4} - u_{N_{cells}/16} \|_C$ и $u_{N_{cells}/16}$ – численное решение на сетке, содержащей $N_{cells}/16$ ячеек. В табл. 2 приведены полученные в численном эксперименте значения нормы (11) и соответствующие порядки ее сходимости (12) при $Q = 200N_{cells}$ во всей исходной области Ω и в подобласти $\Omega_1: x_1^2 + x_2^2 \leq 0, 5^2$, которая не содержит точек излома границы.

Таблица 2

Результаты численных экспериментов в задаче с разрывом второй производной

$\ u_{N_{cells}} - u_{N_{cells}/2} \ _C$	$\tilde{E} _{\Omega}$	\tilde{R}	$\tilde{E} _{\Omega_1}$	\tilde{R}
$\ u_{1536} - u_{384} \ _C$	6,84E-4	–	8,19E-6	–
$\ u_{6144} - u_{1536} \ _C$	2,41E-4	1,50	9,93E-7	3,04
$\ u_{24576} - u_{6144} \ _C$	8,55E-5	1,49	1,22E-7	3,02
$\ u_{98304} - u_{24576} \ _C$	3,02E-5	1,50	1,52E-8	3,00

2. Неоднородное бигармоническое уравнение

2.1. Постановка задачи и описание метода

Пусть требуется определить НДС упругой изотропной пластинки полигональной формы, закрепленной на краях и находящейся под действием поперечной нагрузки произвольного вида. Будем считать, что нагрузки достаточно малы, и деформирование пластинки является упругим. Пластинка предполагается тонкой, что позволяет свести трехмерную задачу теории упругости к двумерной задаче теории тонких

пластин. Согласно [3], разрешающую систему уравнений запишем в перемещениях, отыскав которые можно полностью рассчитать НДС пластинки. Величины прогибов пластинки определяются из решения неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 w = \frac{q(x_1, x_2)}{D}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (13)$$

где $w(x_1, x_2)$ – прогиб срединной поверхности пластинки, $q(x_1, x_2)$ – поперечная нагрузка, $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ – жесткость пластинки при изгибе, h – толщина пластинки, E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропного материала пластинки, полигональная область Ω – проекция срединной поверхности пластинки на плоскость (x_1, x_2) . В этой задаче на каждом куске границы пластинки можно задать в частности одно из следующих условий ее закрепления:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ – заземленный край,} \quad (14)$$

$$w = 0, \quad M_n w = 0 \text{ – шарнирно закрепленный край,} \quad (15)$$

$$M_n w = 0, \quad V_n w = 0 \text{ – свободный край,} \quad (16)$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к границе области $\partial\Omega$, M_n – изгибающий момент, V_n – обобщенная поперечная сила [3]. К решению поставленной задачи применим алгоритм, аналогичный описанному выше. Отличия будут в записи уравнений приближенной задачи. Аналогично уравнениям (4), (5) и (6) в каждой j -ой ячейке выписываются

1) уравнения коллокации, умноженные на $h_{1t}^2 h_{2t}^2$, в 16 точках коллокации (рис. 1 б)

$$k_c \left(\frac{h_{2t}^2}{h_{1t}^2} \frac{\partial^4 v_{hj}}{\partial y_1^4} + 2 \frac{\partial^4 v_{hj}}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} + \frac{h_{1t}^2}{h_{2t}^2} \frac{\partial^4 v_{hj}}{\partial y_2^4} \right) = k_c h_{1t}^2 h_{2t}^2 f(x_1, x_2), \quad (17)$$

где k_c – весовой множитель уравнений коллокации, $t = 1, \dots, N_t$;

2) условия согласования (умноженные на $h_{1t} h_{2t}$ во втором случае) на каждой общей стороне между соседними ячейками в нескольких точках согласования (рис. 1 б)

$$k_{m_0} v_{hj} + k_{m_1} \frac{\partial v_{hj}}{\partial n_j} = k_{m_0} \hat{v}_h + k_{m_1} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial n_j}, \quad (18)$$

$$h_{1t} h_{2t} \left(k_{m_2} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial n_j^2} + k_{m_3} \frac{\partial^3 v_{hj}}{\partial n_j^3} \right) = h_{1t} h_{2t} \left(k_{m_2} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial n_j^2} + k_{m_3} \frac{\partial^3 \hat{v}_h}{\partial n_j^3} \right), \quad (19)$$

где n_j – внешняя нормаль к границе j -ой ячейки, $t = 1, \dots, N_t$, v_{hj} и \hat{v}_h – пределы приближенного решения задачи при стремлении изнутри и извне к границе j -й ячейки, соответственно, k_{m_0} , k_{m_1} , k_{m_2} , k_{m_3} – весовые множители условий согласования;

3) краевые условия в нескольких точках записи краевых условий (рис. 1 б) на границе области, если ячейка является граничной.

В данном случае каждая «локальная» СЛАУ состоит из 48 уравнений: 16 уравнений коллокации и по два уравнения в каждой точке для записи условий согласования или краевых условий в случае граничной ячейки.

2.2. Результаты численных экспериментов

Пример 6. Рассмотрим шарнирно закрепленную на краях (15) прямоугольную пластинку размера $d_1 \times d_2$, находящуюся под действием поперечной нагрузки $q = 10^5 \sin(\pi x_1/d_1) \sin(\pi x_2/d_2)$ (Па). В этом случае задача имеет точное решение [3]

$$w(x_1, x_2) = \frac{q d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + d_2^2)^2}. \quad (20)$$

Ранее эта задача была решена методом КНК в работе [12] с использованием пространства полиномов четвертой степени. В случае краевых условий (15) решение бигармонического уравнения (13) в полигональной области можно свести к последовательному решению системы двух уравнений Пуассона с краевыми условиями Дирихле [3]. Как отмечено во введении, задача Дирихле для уравнения Пуассона – хорошо обусловленная задача по сравнению с краевой задачей для бигармонического уравнения, что, очевидно, сказывается на точности численного решения задачи. Пусть теперь E_c – относительная погрешность численного решения, порядок сходимости R которой вычислялся по формуле (10). В табл. 3 приведено сравнение результатов численного решения уравнения [12] и результатов решения системы двух уравнений Пуассона. Здесь прямоугольная область покрывалась регулярной сеткой с прямоугольными ячейками. В этом случае был использован вариант 1 метода КНК из работы [8]. В расчетах использовались следующие параметры: $d_1 = 10$ м, $d_2 = 10$ м, $h = 0,1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,28$, $\epsilon = 10^{-14}$. В табл. 3 в N_{iter} в скобках указано количество итераций для первого уравнения Пуассона (аналогично в табл. 4). В работе [12] в случае $N_{cells} = 12800$ нет информации о количестве итераций.

Таблица 3

Сравнение результатов численных экспериментов

N_{cells}	Пример 1, работа [12]			Пример 1, эта работа		
	E_c	R	N_{iter}	E_c	R	N_{iter}
100	1,82E-2	–	129	1,00E-4	–	68 (58)
400	2,83E-3	2,68	282	6,32E-6	3,98	81 (74)
1600	4,56E-4	2,63	593	3,95E-7	4,00	112 (123)
6400	7,57E-5	2,58	2090	2,47E-8	3,99	162 (135)
12800	1,32E-5	2,51		1,57E-9	3,97	251 (161)

Таблица 4

Сравнение результатов численных экспериментов

N_{cells}	Пример 2, случай 1			Пример 2, случай 2		
	E_c	R	N_{iter}	E_c	R	N_{iter}
48	3,97E-4	–	45	1,29E-4	–	81 (81)
192	3,74E-5	3,40	43	4,43E-6	4,86	81 (81)
768	6,24E-6	2,58	81	1,37E-7	5,01	86 (81)
3072	1,15E-6	2,43	241	4,63E-9	4,88	97 (85)
12288				2,48E-10	4,22	174 (161)

Пример 7. Рассмотрим полигональную пластинку с вырезом из примера 2 пункта 1.2, при этом исходная область растягивалась в 5 раз и сдвигалась на вектор (5; 5). Зададим на границе $\delta\Omega$ значения w и $M_n w$, вычисленные из точного решения (20). В табл. 4 приведено сравнение результатов численного решения исходного бигармонического уравнения (случай 1) и результатов численного решения системы двух уравнений Пуассона (случай 2) в пластинке с вырезом. В расчетах использовались следующие параметры: $d_1 = 9,65$ м, $d_2 = 9,65$ м, $h = 0,1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,28$, $\epsilon = 10^{-10}$ для численного решения бигармонического уравнения, $\epsilon = 10^{-14}$ для численного решения системы двух уравнений Пуассона. Здесь $N_t = 12$. Здесь

для краткости значения d_1 и d_2 округлены до сотых. Значения весовых параметров в первом случае взяты из работы [2], а во втором случае из пункта 1.2. В первом случае при $N_{cells} = 12288$ значение погрешности численного решения не изменялось по сравнению с предыдущим случаем.

Пример 8. Рассмотрим два примера плохообусловленных задач, точное решение которых не известно. Пусть в первом случае шестиугольная пластинка, а во втором случае эта же пластинка, но с вырезом, находятся под действием равномерной поперечной нагрузки $q = \text{const}$. В первом случае два края пластинки защемлены (14), два – шарнирно закреплены (15), два – свободны (16). Во втором случае внутренние края пластинки шарнирно закреплены (15), внешние четыре края – защемлены (14), два – свободны (16). Напряженное состояние пластины описывается функцией распределения интенсивности напряжений

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\sigma_{xy}^2}, \quad (21)$$

где $\sigma_x = -\bar{E}(w_{xx} + \nu w_{yy})$, $\sigma_y = -\bar{E}(w_{yy} + \nu w_{xx})$, $\sigma_{xy} = -\bar{E}(w_{xy})$, $\bar{E} = Ex_3/(1 - \nu^2)$, $x_3 \in [-h/2, h/2]$. Отметим, что здесь относительно легко вычислить любые производные приближенного решения, поскольку в методе КНК оно является кусочно-полиномиальным. Это одно из достоинств используемого метода. В обоих случаях в расчетах использовались следующие параметры задачи: $h = 0,1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,28$, $x_3 = h/2$, $\epsilon = 10^{-10}$. В первом примере $q = 200$ КПа, $N_{cells} = 1536$, $N_t = 6$, а во втором $q = 1$ МПа, $N_{cells} = 3072$, $N_t = 12$. На рис. 2, 3 показаны форма прогиба w а) и интенсивность напряжений I (21) б).

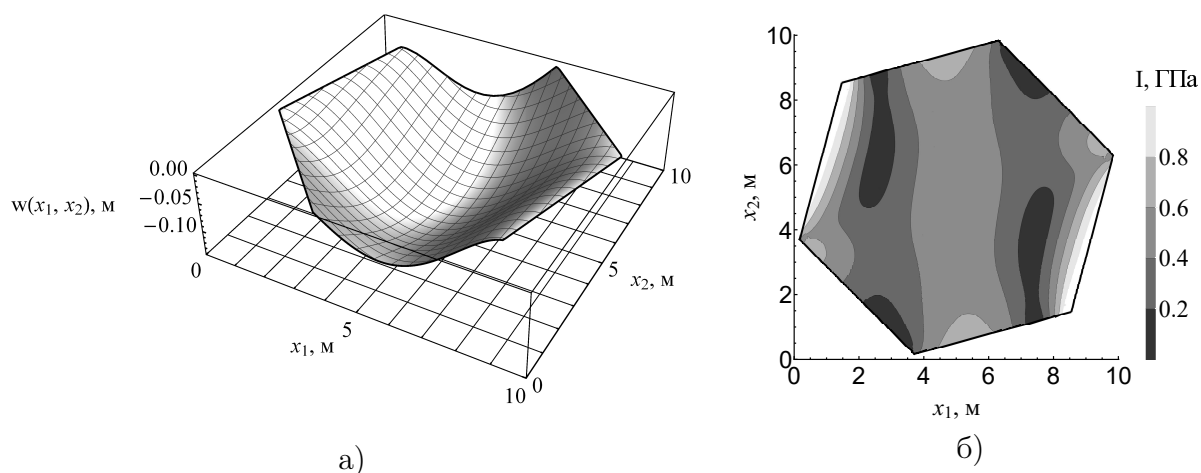


Рис. 2. Величина прогиба w (а) деформированной пластинки (два края защемлены, два – шарнирно закреплены, два – свободны) и интенсивность напряжений I (б)

Заключение

Предложен и реализован новый вариант метода КНК для численного решения эллиптических уравнений в полигональных областях, в том числе в многосвязных. Проведен ряд численных экспериментов, в которых показано, что для задач с достаточно гладкими решениями, в том числе с большими градиентами, имеет место

повышенный порядок сходимости к нулю погрешности решения. В этом случае при решении уравнения Пуассона наблюдался порядок сходимости не ниже четвертого, а при решении бигармонического уравнения не меньше второго.

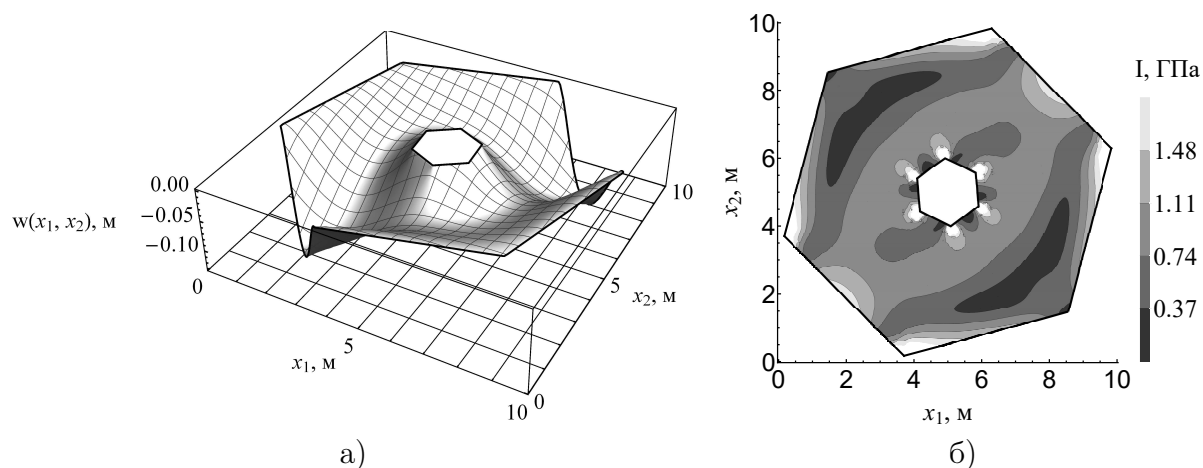


Рис. 3. Величина прогиба w (а) деформированной пластинки с вырезом (внутренние края пластинки шарнирно закреплены, внешние четыре края – защемлены, два – свободны) и интенсивность напряжений I (б)

Здесь также рассмотрен пример задачи Дирихле для уравнения Пуассона, когда на границе области в точках ее излома имеет место особенность – разрыв вторых производных искомого решения. В этом случае порядок сходимости численного глобального решения задачи понижается и был равен полтора в отличие от случаев, когда краевые условия и правая часть уравнения «согласованы» и достаточно гладкие. Но за исключением окрестности особых точек на границе, порядок сходимости решения остается повышенным и равен трем. Это хорошо согласуется с теорией краевых задач для эллиптических уравнений.

Кроме того, в работе приведены результаты решения задач расчета НДС изотропных пластин сложной формы. Решение таких задач имеет самостоятельное прикладное значение.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы (проект № АААА-А17-117030610136-3).

Литература

1. Guo Chen. A Fast Finite Difference Method for Biharmonic Equations on Irregular Domains and Its Application to an Incompressible Stokes Flow / Guo Chen, Zhilin Li, Ping Lin // *Advances in Computational Mathematics*. – 2008. – V. 29, № 2. – P. 113–133.
2. Шапеев, В.П. Решение с повышенной точностью бигармонического уравнения в нерегулярных областях методом коллокации и наименьших квадратов / В.П. Шапеев, В.А. Беляев // *Вычислительные методы и программирование*. – 2018. – Т. 19, № 4. – С. 340–355.
3. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1963.

4. Шапеев, В.П. Решение краевых задач для уравнений с частными производными в треугольных областях методом коллокации и наименьших квадратов / В.П. Шапеев, В.А. Беляев // Вычислительные методы и программирование. – 2018. – Т. 19, № 1. – С. 96–111.
5. Сорокин, С.Б. Переобусловливание при численном решении задачи Дирихле для бигармонического уравнения / С.Б. Сорокин // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 205–213.
6. Шапеев, В.П. Варианты метода коллокации и наименьших невязок повышенной точности в области с криволинейной границей / В.П. Шапеев, В.А. Беляев // Вычислительные технологии. – 2016. – Т. 21, № 5. – С. 95–110.
7. Беляев, В.А. Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в трапециевидных областях / В.А. Беляев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22, № 4. – С. 22–42.
8. Беляев, В.А. Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в выпуклых четырехугольных областях / В.А. Беляев, В.П. Шапеев // Моделирование и анализ информационных систем. – 2017. – Т. 24, № 5. – С. 629–648.
9. Беляев, В.А. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом коллокации и наименьших квадратов в области с дискретно заданной границей / В.А. Беляев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. – 2018. – Т. 23, № 3. – С. 15–30.
10. Федоренко, Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса / Р.П. Федоренко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1964. – Т. 4, № 3. – С. 559–564.
11. Saad, Y. Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems / Y. Saad. – Manchester: Manchester University Press, 1991.
12. Голушко, С.К. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18, № 6. – С. 31–43.

Василий Павлович Шапеев, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация); профессор, кафедра «Математическое моделирование», Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), shapeev.vasily@mail.ru.

Лука Сергеевич Брындин, лаборант, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация); магистрант механико-математического факультета, кафедра «Математическое моделирование», Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), bryndin-1996@mail.ru.

Василий Алексеевич Беляев, аспирант, младший научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация), belyaevasily@mail.ru.

Поступила в редакцию 23 ноября 2018 г.

**SOLVING ELLIPTIC EQUATIONS IN POLYGONAL DOMAINS
BY THE LEAST SQUARES COLLOCATION METHOD***V.P. Shapeev*^{1,2}, *L.S. Bryndin*^{1,2}, *V.A. Belyaev*¹¹ Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch
of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation² Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

E-mail: shapeev.vasily@mail.ru, bryndin-1996@mail.ru, belyaevasily@mail.ru

The paper considers a new version of the least squares collocation (LSC) method for the numerical solution of boundary value problems for elliptic equations in polygonal domains, in particular, in multiply connected domains. The implementation of this approach and numerical experiments are performed on the examples of the inhomogeneous biharmonic and Poisson equations. As an application, we use the nonhomogeneous biharmonic equation to simulate the stress-strain state of isotropic elastic thin plate of polygonal form under the action of transverse load. The new version of the LSC method is based on the triangulation of the original domain. Therefore, this approach is fundamentally different from the previous more complicated versions of the LSC method proposed to solve the boundary value problems for partial derivative equations in irregular domains. We make the numerical experiments on the convergence of the approximate solution to various problems on a sequence of grids. The experiments show that the solution to the problems converges with high order and, in the case of the known analytical solution, matches with high accuracy with the analytical solution to the test problems.

Keywords: least squares collocation method; polygonal multiply connected domain; Poisson's equation; nonhomogeneous biharmonic equation; stress-strain state.

References

1. Guo Chen, Zhilin Li, Ping Lin. A Fast Finite Difference Method for Biharmonic Equations on Irregular Domains and its Application to an Incompressible Stokes Flow. *Advances in Computational Mathematics*, 2008, vol. 29, no. 2, pp. 113–133. DOI: 10.1007/s10444-007-9043-6
2. Shapeev V.P., Belyaev V.A. [Solving the Biharmonic Equation with High Order Accuracy in Irregular Domains by the Least Squares Collocation Method]. *Numerical Methods and Programming*, 2018, vol. 19, no. 4, pp. 340–355. (in Russian)
3. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. N.-Y., Toronto, London, McGraw-Hill, 1959.
4. Shapeev V.P., Belyaev V.A. Solving Boundary Value Problems for Partial Differential Equations in Triangular Domains by the Least Squares Collocation Method. *Numerical Methods and Programming*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 96–111. (in Russian)
5. Sorokin, S.B. Preconditioning in the Numerical Solution to a Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation. *Numerical Analysis and Applications*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 167–174. DOI: 10.1134/S1995423911020078
6. Shapeev V.P., Belyaev V.A. Versions of High Order Accuracy Collocation and Least Residuals Method in the Domain with a Curvilinear Boundary. *Computational Technologies*, 2016, vol. 21, no. 5, pp. 95–110. (in Russian)

7. Belyaev V.A., Shapeev V.P. The Versions of Collocation and Least Residuals Method for Solving Problems of Mathematical Physics in the Trapezoidal Domains. *Computational Technologies*, 2017, vol. 22, no. 4, pp. 22–42. (in Russian)
8. Belyaev V.A., Shapeev V.P. Versions of the Collocation and Least Residuals Method for Solving Problems of Mathematical Physics in the Convex Quadrangular Domains. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2017, vol. 24, no. 5, pp. 629–648. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-629-648 (in Russian)
9. Belyaev V.A., Shapeev V.P. Solving the Dirichlet Problem for the Poisson Equation by the Least Squares Collocation Method with Given Discrete Boundary Domain. *Computational Technologies*, 2018, vol. 23, no. 3, pp. 15–30. DOI: 10.25743/ICT.2018.3.15956 (in Russian)
10. Fedorenko R.P. The Speed of Convergence of One Iterative Process. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, no. 3, pp. 227–235. DOI: 10.1016/0041-5553(64)90253-8
11. Saad, Y. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. Manchester, Manchester University Press, 1991.
12. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. Application of Collocations and Least Residuals Method to Problems of the Isotropic Plates Theory. *Computational Technologies*, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 31–43. (in Russian)

Received November 23, 2018