

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ  
В ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫХ РАДИАЛЬНО-  
НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ**

*П.Н. Александров<sup>1</sup>, В.Н. Кризский<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Центр геоэлектромагнитных исследований Института физики Земли имени О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Российская Федерация

В основу решения прямой задачи положены две основные идеи: сведение системы уравнений Максвелла, записанных в цилиндрической системе координат, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием интегралов Ломмеля для преобразования Фурье – Бесселя и учет конечных размеров геометрических параметров модели. Это позволяет решать прямые задачи для осесимметричных радиально неоднородных слоистых сред с учетом анизотропии как по удельной электропроводности, так и по магнитной проницаемости, в том числе для их дисперсий как функций частоты. Все это имеет важное значение при изучении околоскважинного пространства в методах геофизических исследований скважин.

*Ключевые слова:* двумерные задачи геоэлектрики; анизотропные горизонтально-слоистые радиально-неоднородные среды; преобразование Фурье – Бесселя; электромагнитный каротаж; газогидраты.

## **Введение**

Изучение рассеивания электрических и магнитных полей в квази-трехмерных геологических структурах (например, в околоскважинном пространстве в методах геофизических исследований скважин) имеющих анизотропию по удельной электропроводности и магнитной проницаемости [1, 2] – практически значимая задача. В процессе бурения скважины вокруг ствола появляются ослабленные зоны, выражающиеся в образования радиальных и азимутальных трещин отрыва (необратимые деформации). К аналогичным изменениям околоскважинного пространства приводит фильтрация флюидов (обратимые процессы). Эти изменения околоскважинного пространства приводят к горизонтально-слоистой и радиально-неоднородной анизотропной модели геоэлектрической среды, обладающей осевой симметрией. К настоящему времени на основе аналитических решений достаточно полно исследованы одномерные радиально-неоднородные и горизонтально-слоистые модели [2, 3]. С использованием численных методов решение получили более сложные задачи – радиально неоднородные горизонтально-слоистые анизотропные, с наклонным расположением слоев [4].

В общем случае электрофизические параметры – удельная электропроводность и магнитная проницаемость, являются тензорами второго ранга. Они обладают частотной дисперсией, что требует нахождения решения прямой задачи в широком диапазоне частот – от первых герц до мегагерц с изменением толщин слоев как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях, начиная от первых миллиметров и сантиметров.

Важным приложением таких задач является разработка скважинной аппаратуры, где требуется учесть пространственные размеры источников и приемников, а также особенности конструкции скважинного снаряда, их физические и геометрические характеристики. Предварительное математическое моделирование позволяет разработать технические требования к скважинной аппаратуре, позволяющие решать конкретные геологические задачи. Одной из таких перспективных задач является задача поиска и исследования газогидратов, которые стандартными методами геофизических исследований скважин не выявляются. Особенностью газогидратов, широко распространенных в районах вечной мерзлоты, является дисперсия удельной электропроводности, проявляющаяся на высоких частотах [4].

## 1. Решение прямой задачи электродинамики в цилиндрической системе координат

Рассмотрим азимутально-однородную горизонтально-слоистую среду. Положим, что поле обладает осевой симметрией и не зависит от азимутальной координаты. Тогда система уравнений Максвелла для анизотропной среды в цилиндрической системе координат, записанная в частотной области, приобретет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} H_r &= \frac{\partial}{\partial r} H_z + \sigma_{\theta\theta} E_\theta + J_\theta^{ex}, \\ \frac{\partial}{\partial z} H_\theta &= -\sigma_{rr} E_r - J_r^{ex}, \\ \frac{\partial}{\partial z} E_r &= \frac{\partial}{\partial r} E_z - i\omega\mu_{\theta\theta} H_\theta - i\omega B_\theta^{ex}, \\ \frac{\partial}{\partial z} E_\theta &= i\omega\mu_{rr} H_r + i\omega B_r^{ex}, \\ H_z &= \frac{1}{\mu_{zz}} \left( -\frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \right) \right) + \frac{1}{\mu_{zz}} \left( \frac{1}{i\omega} B_z^{ex} \right), \\ E_z &= \frac{1}{\sigma_{zz}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) \right) - \frac{1}{\sigma_{zz}} J_z^{ex}, \end{aligned}$$

где  $H_r, E_\theta, H_z$  – компоненты электромагнитного поля в проекции на оси пространственных координат  $\{r, \theta, z\}$  (ось  $z$  направлена вниз, вглубь земли);  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$  – удельные электропроводности среды по радиальному, азимутальному и вертикальному направлениям, соответственно – комплексные функции частоты  $\omega$ ;  $\mu_{rr}, \mu_{\theta\theta}, \mu_{zz}$  – магнитные проницаемости среды по радиальному, азимутальному и вертикальному направлениям, соответственно – также комплексные функции частоты  $\omega$ ;  $J_r^{ex}, J_\theta^{ex}, J_z^{ex}$  – компоненты вектора стороннего электрического тока;  $B_r^{ex}, B_\theta^{ex}, B_z^{ex}$  – компоненты вектора сторонней магнитной индукции;  $i = \sqrt{-1}$ . Источники электромагнитного поля могут находиться как внутри скважины, так и в околоскважинном пространстве при условии сохранения осесимметричности задачи.

Воспользуемся преобразованием Фурье – Бесселя [5] порядка  $n$ :  $\tilde{F}(\rho) = \int_0^\infty F(r) J_n(\rho r) r dr$ , для которого существует обратное преобразование  $F(r) = \int_0^\infty \tilde{F}(\rho') J_n(\rho' r) \rho' d\rho'$ , где  $J_n(x)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка.

Найдем преобразование Фурье – Бесселя порядка  $n$  от правой части выражения

$$\frac{\partial}{\partial r} E_z = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sigma_{zz}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) \right).$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sigma_{zz}} \left( \frac{1}{r} H_\theta + \frac{\partial}{\partial r} H_\theta \right) \right) J_n(\rho r) r dr &= \frac{1}{\sigma_{zz}} \left( \frac{1}{r} H_\theta + \frac{\partial}{\partial r} H_\theta \right) J_n(\rho r) r \Big|_0^\infty - \\ - \frac{1}{\sigma_{zz}} H_\theta \left( (n+1) J_n(\rho r) - \rho r J_{n+1}(\rho r) \right) \Big|_0^\infty &+ \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_{zz}} H_\theta \left( -r \rho^2 + \frac{n^2 - 1}{r} \right) J_n(\rho r) dr + \\ + \int_0^\infty \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sigma_{zz}} \right) H_\theta \left( (n+1) J_n(\rho r) - \rho r J_{n+1}(\rho r) \right) dr. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что только в случае  $n^2 = 1$  можно воспользоваться интегралами Ломмеля [5] и, таким образом, вычислить интегралы по радиальной координате в явном виде через функции Бесселя. В противном случае интегралы в явном виде не имеют аналитического выражения и, в вычислительном плане, это создает сложную проблему.

В силу этого полагаем  $H_\theta = H_\theta(r) = \int_0^\infty \tilde{H}_\theta(\rho') J_1(r\rho') \rho' d\rho'$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sigma_{zz}} \left( \frac{1}{r} H_\theta + \frac{\partial}{\partial r} H_\theta \right) \right) J_1(\rho r) r dr &= - \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_{zz}} J_1(r\rho') J_1(\rho r) r dr \rho^2 \tilde{H}_\theta(\rho') \rho' d\rho' + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sigma_{zz}} \right) J_1(r\rho') J_0(\rho r) r dr \rho \tilde{H}_\theta(\rho') \rho' d\rho'. \end{aligned}$$

Для кусочно-постоянной модели среды по радиальной координате с числом границ  $N$  ( $(N+1)$ -ая граница находится в бесконечности), используя интегралы Ломмеля, получим

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sigma_{zz}} J_1(r\rho') J_1(\rho r) r dr = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_{zz}^k} \int_{r_k}^{r_{k+1}} J_1(r\rho') J_1(\rho r) r dr$$

и

$$\int_0^\infty \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sigma_{zz}} \right) J_1(r\rho') J_0(\rho r) r dr = \sum_{k=1}^N \left( \Delta \frac{1}{\sigma_{zz}^k} \right) J_1(r_k \rho') J_0(\rho r_k) r_k, \Delta \frac{1}{\sigma_{zz}^k} = \frac{1}{\sigma_{zz}^{k+1}} - \frac{1}{\sigma_{zz}^k}.$$

Таким же образом, используя преобразование Фурье – Бесселя первого порядка для второго и третьего уравнений, получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{H}_\theta = - \int_0^\infty \left[ \sum_{k=1}^N \sigma_{rr}^k \int_{r_k}^{r_{k+1}} J_1(r\rho') J_1(\rho r) r dr \right] \tilde{E}_r(\rho') \rho' d\rho' - \tilde{J}_r^{ex}; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_r = & - \int_0^\infty \left[ \sum_{k=1}^N \sigma_{zz}^k \int_{r_k}^{r_{k+1}} J_1(r\rho') J_1(\rho r) r dr \right] \rho^2 \tilde{H}_\theta(\rho') \rho' d\rho' + \\ & + \int_0^\infty \sum_{k=1}^N \left( \Delta \frac{1}{\sigma_{zz}^k} \right) J_1(r_k \rho') J_0(\rho r_k) r_k \rho \tilde{H}_\theta(\rho') \rho' d\rho' - i\omega \int_0^\infty \left[ \sum_{k=1}^N \mu_{\theta\theta}^k \int_{r_k}^{r_{k+1}} J_1(r\rho') J_1(\rho r) r dr \right] \times \\ & \times \tilde{H}_\theta(\rho') \rho' d\rho' + \int_{R_s} \frac{1}{\sigma_{zz}} J_z^{ex} J_0(\rho r) \rho r dr - i\omega \tilde{B}_\theta^{ex}, \end{aligned}$$

где  $R_s$  – радиус источника по радиальной координате;

$$\int_{r_k}^{r_{k+1}} J_1(r\rho') J_1(\rho r) r dr = \begin{cases} \frac{-\rho' r_{k+1} J_1(\rho r_{k+1}) J_0(\rho' r_{k+1}) + \rho r_{k+1} J_1(\rho' r_{k+1}) J_0(\rho r_{k+1})}{\rho'^2 - \rho^2} + \\ + \frac{\rho' r_k J_1(\rho r_k) J_0(\rho' r_k) - \rho r_k J_1(\rho' r_k) J_0(\rho r_k)}{\rho'^2 - \rho^2}, \rho' \neq \rho, \\ \frac{\rho r_{k+1}^2 J_1(\rho r_{k+1})^2 - 2r_{k+1} J_1(\rho r_{k+1}) J_0(\rho r_{k+1}) + \rho r_{k+1}^2 J_0(\rho r_{k+1})^2}{2\rho} + \\ + \frac{-\rho r_k^2 J_1(\rho r_k)^2 + 2r_k J_1(\rho r_k) J_0(\rho r_k) - \rho r_k^2 J_0(\rho r_k)^2}{2\rho}, \rho' = \rho \end{cases}$$

– есть интеграл Ломмеля [5].

В случае однородной среды, используя свойство

$$\int_0^\infty J_n(\rho r) J_n(\rho' r) r dr = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') = \frac{1}{\rho'} \delta(\rho - \rho'),$$

где  $\frac{1}{\rho} \delta(\rho)$  – дельта-функция Дирака в цилиндрической системе координат, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{H}_\theta = & -\sigma_{rr} \tilde{E}_r(\rho) - \tilde{J}_r^{ex}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_r = & -\left( \frac{1}{\sigma_{zz}} \rho^2 + i\omega \mu_{\theta\theta} \right) \tilde{H}_\theta(\rho) + \int_{R_s} \frac{1}{\sigma_{zz}} J_z^{ex} J_0(\rho r) \rho r dr - i\omega \tilde{B}_\theta^{ex}. \end{aligned}$$

В противном случае, в случае радиально-неоднородного слоя, остаются формулы (1).

Для каждого слоя добавим и вычтем выражения, связанные с внешним бесконечным слоем с удельной электропроводностью  $\sigma_{rr}^N, \sigma_{zz}^N$  и магнитной проницаемостью  $\mu_{\theta\theta}^N$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{H}_\theta = - \int_0^\infty \left[ \sum_{k=1}^{N-1} (\sigma_{rr}^k - \sigma_{rr}^N) \int_{r_k}^{r_{k+1}} J_1(r\rho') J_1(\rho r) r dr \right] \tilde{E}_r(\rho') \rho' d\rho' - \sigma_{rr}^N \tilde{E}_r(\rho) - \tilde{J}_r^{ex}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_r = & - \int_0^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{1}{\sigma_{zz}^k} - \frac{1}{\sigma_{zz}^N} \right) \int_{r_k}^{r_{k+1}} J_1(r\rho') J_1(\rho r) r dr \right] \rho^2 \tilde{H}_\theta(\rho') \rho' d\rho' + \\ & + \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^N \left( \Delta \frac{1}{\sigma_{zz}^k} \right) J_1(r_k \rho') J_0(\rho r_k) r_k \rho \tilde{H}_\theta(\rho') \rho' d\rho' - \\ - i\omega \int_0^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^N \left( \mu_{\theta\theta}^k - \mu_{\theta\theta}^N \right) \int_{r_k}^{r_{k+1}} J_1(r\rho') J_1(\rho r) r dr \right] \tilde{H}_\theta(\rho') \rho' d\rho' - & \left( \frac{1}{\sigma_{zz}^N} \rho^2 + i\omega \mu_{\theta\theta}^N \right) \tilde{H}_\theta(\rho) + \\ & + \int_{R_s} \frac{1}{\sigma_{zz}} J_z^{ex} J_0(\rho r) \rho r dr - i\omega \tilde{B}_\theta^{ex}. \end{aligned}$$

Для вертикальной составляющей вектора стороннего тока радиуса  $a$  найдем [6]:

$$\int_0^a \frac{1}{\sigma_{zz}} J_z^{ex} J_0(\rho r) \rho r dr = \frac{1}{\sigma_{zz}} J_z^{ex} \int_0^a J_0(\rho r) \rho r dr = \frac{1}{\sigma_{zz}} J_z^{ex} \frac{1}{\rho} \int_0^a J_0(\rho r) \rho r d\rho r = \frac{1}{\sigma_{zz}} J_z^{ex} \frac{a}{\rho} J_1(a\rho).$$

Функция Хевисайда в цилиндрической системе координат имеет вид  $\frac{1}{r}U(r - a)$ , поскольку  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{1}{r} U(r - a)) = \frac{1}{r} \delta(r - a)$  – дельта-функция Дирака в цилиндрической системе координат.

Для  $J_r^{ex} = I[U(z + \Delta z) - U(z - \Delta z)] \frac{1}{r} [U(r) - U(r - a)]$ , где  $I$  – сила тока на токовом электроде, стекающего из электрода (либо втекающего в электрод) высотой  $2\Delta z_s$  радиусом  $a$ , получим

$$\begin{aligned} \tilde{J}_r^{ex}(z, \rho) &= \int_0^{\infty} J_r^{ex}(r) r dr = I[U(z + \Delta z) - U(z - \Delta z)] \int_0^{\infty} \frac{1}{r} [U(r) - U(r - a)] J_1(\rho r) r dr J_r^{ex} = \\ &= I[U(z + \Delta z) - U(z - \Delta z)] \int_0^a J_1(\rho r) r dr = -I[U(z + \Delta z) - U(z - \Delta z)] \frac{1}{\rho} (J_0(\rho a) - 1). \end{aligned}$$

Аналогично получим для  $\tilde{B}_\theta^{ex}$ , с учетом кольца с внутренним радиусом  $a_0$  и внешним радиусом  $a$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\theta^{ex} &= \int_0^{\infty} B_\theta^{ex} r dr = I[U(z + \Delta z) - U(z - \Delta z)] \int_0^{\infty} \frac{1}{r} [U(r - a) - U(r - a_0)] J_1(\rho r) r dr J_r^{ex} = \\ &= I[U(z + \Delta z) - U(z - \Delta z)] \int_{a_0}^a J_1(\rho r) r dr = -I[U(z + \Delta z) - U(z - \Delta z)] \frac{1}{\rho} (J_0(\rho a) - J_0(\rho a_0)). \end{aligned}$$

Проведем интегрирование по центральной координате источника  $z_0$ , и высоте источника  $2\Delta z_s$  функции  $\int_{z_0 - \Delta z_s}^{z_0 + \Delta z_s} e^{-\sqrt{\lambda}|z - z'|} dz'$ .

Для  $z > z_0 + \Delta z_s$ ,

$$\int_{z_0 - \Delta z_s}^{z_0 + \Delta z_s} e^{-\sqrt{\lambda}(z - z')} dz' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}(z - z_0)} (e^{\sqrt{\lambda}\Delta z_s} - e^{-\sqrt{\lambda}\Delta z_s}) = e^{-\sqrt{\lambda}(z - z_0)} \frac{2 \sinh(\sqrt{\lambda}\Delta z_s)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Для  $z < z_0 - \Delta z_s$ ,

$$\int_{z_0 - \Delta z_s}^{z_0 + \Delta z_s} e^{\sqrt{\lambda}(z-z')} dz' = \frac{1}{-\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda}(z-z_0)} (e^{-\sqrt{\lambda}\Delta z_s} - e^{\sqrt{\lambda}\Delta z_s}) = e^{\sqrt{\lambda}(z-z_0)} \frac{2 \sinh(\sqrt{\lambda}\Delta z_s)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Для  $z_0 + \Delta z_s > z > z_0 - \Delta z_s$ ,

$$\int_{z_0 - \Delta z_s}^z e^{-\sqrt{\lambda}(z-z')} dz' + \int_z^{z_0 + \Delta z_s} e^{\sqrt{\lambda}(z-z')} dz' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (2 - e^{-\sqrt{\lambda}(z-z_0 + \Delta z_s)} - e^{\sqrt{\lambda}(z-z_0 - \Delta z_s)}).$$

Отсюда, с учетом последних выражений, заменяя несобственные интегралы конечными суммами в уравнениях (2), получим систему уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} [0] & L_{12} \\ L_{21} & [0] \end{pmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{Y}^{ext},$$

где  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_\theta \\ \mathbf{E}_r \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{H}_\theta = \mathbf{H}_\theta(z)$  и  $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r(z)$  – вектор-столбцы, составленные из функций  $\tilde{H}_\theta$  и  $\tilde{E}_r$  для каждого значения  $\rho$ . Аналогично составляются векторы-столбцы для вариантов в зависимости от типа источника  $\mathbf{Y}^{ext} = \begin{pmatrix} [0] \\ \mathbf{J}_z^{ext} \end{pmatrix}$ , или  $\mathbf{Y}^{ext} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_r^{ext} \\ [0] \end{pmatrix}$ , или  $\mathbf{Y}^{ext} = \begin{pmatrix} [0] \\ \mathbf{B}_\theta^{ext} \end{pmatrix}$ , или их комбинаций,  $[0]$  – нулевой вектор столбец соответствующей размерности.

Матрицы  $L_{12}$  и  $L_{21}$  – есть матрицы соответствующей размерности, зависящие от параметров модели, частоты и значения  $\rho$ .

Из последней системы уравнений, исключая вектор  $\mathbf{E}_r$ , получим систему для разных типов источников

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{H}_\theta = L_{12} L_{21} \mathbf{H}_\theta + L_{12} \mathbf{J}_z^{ext}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{H}_\theta = L_{12} L_{21} \mathbf{H}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{J}_r^{ext}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{H}_\theta = L_{12} L_{21} \mathbf{H}_\theta + L_{12} \mathbf{B}_\theta^{ext},$$

решение которых имеет вид:

$$\mathbf{H}_\theta = \nu e^{\sqrt{\lambda}z} \mathbf{C}_1 + \nu e^{-\sqrt{\lambda}z} \mathbf{C}_2 + \mathbf{H}_\theta^f,$$

где  $\lambda$ , ( $\text{Re}(\lambda) > 0$ ) – собственные значения матрицы  $L_{12} L_{21} = \nu \lambda \nu^{-1}$ ,  $\nu$  – матрица, составленная из собственных векторов матрицы  $L_{12} L_{21}$  соответствующих ее собственным значениям;  $\mathbf{H}_\theta^f$  – первичное поле соответствующих источников  $L_{12} \mathbf{J}_z^{ext}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{J}_r^{ext}$ ,  $L_{12} \mathbf{B}_\theta^{ext}$ .

Удовлетворяя граничным условиям на границе раздела сред по координате  $z$  с номерами 1 и 2 вида  $[\mathbf{H}_\theta] = 0$  [ $L_{12}^1 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^1 - L_{12}^2 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^2$ ] = 0, найдем неизвестные вектора коэффициентов  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  и, таким образом, решим прямую двумерную задачу для радиально-неоднородной горизонтально-слоистой модели среды. Используя уравнение  $E_z = \frac{1}{\sigma_{zz}} (\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta)) - \frac{1}{\sigma_{zz}} J_z^{ex}$ , найдем вертикальную составляющую электрического поля. Из уравнения  $\frac{\partial}{\partial z} H_\theta = -\sigma_{rr} E_r - J_r^{ex}$  получим выражение для радиальной составляющей плотности электрического тока в спектральной области

$$\mathbf{J}_r = -\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta + \mathbf{J}_r^{ex} = -(\nu \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}z} \mathbf{C}_1 - \nu \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}z} \mathbf{C}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^f) + \mathbf{J}_r^{ex}.$$

Следовательно, для нахождения компонент электромагнитного поля достаточно решения уравнения для азимутальной составляющей напряженности магнитного поля.

После нахождения неизвестных коэффициентов перейдем к нахождению полей. При этом учтем, что измерительные электроды и датчики имеют некоторый размер по вертикальной координате. Проинтегрируем найденные компоненты электромагнитного поля по вертикальной координате по отрезку длины  $2\Delta z$  – по высоте датчика.

$$\tilde{\mathbf{H}}_\theta = \frac{1}{2\Delta z} \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} \mathbf{H}_\theta(z') dz' = \nu e^{\sqrt{\lambda}z} \frac{sh(\sqrt{\lambda}\Delta z)}{\Delta z \sqrt{\lambda}} \mathbf{C}_1 + \nu e^{-\sqrt{\lambda}z} \frac{sh(\sqrt{\lambda}\Delta z)}{\Delta z \sqrt{\lambda}} \mathbf{C}_2 + \frac{1}{2\Delta z} \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} \mathbf{H}_\theta^f dz'.$$

## 2. Алгоритм вычисления неизвестных коэффициентов

В каждом слое с координатами кровли  $z_k$  и подошвы  $z_{k+1}$  ( $z_{k+1} > z > z_k$ ,  $k = \overline{0, M, M+1}$  – количество слоев, включая верхнее и нижнее полупространства) решение для  $\mathbf{H}_\theta$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\theta^k &= \nu_k e^{\sqrt{\lambda_k}z} \mathbf{C}_{k,1} + \nu_k e^{-\sqrt{\lambda_k}z} \mathbf{C}_{k,2} + \mathbf{H}_\theta^{kf}(z, z_0^k) = \\ &= \nu_k e^{\sqrt{\lambda_k}(z-z_{k+1})} \mathbf{S}_{k,1} + \nu_k e^{-\sqrt{\lambda_k}(z-z_k)} \mathbf{S}_{k,2} + \mathbf{H}_\theta^{kf}(z, z_0^k), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{S}_{k,1} = e^{\sqrt{\lambda_k}z_{k+1}} \mathbf{C}_{k,1}$ ,  $\mathbf{S}_{k,2} = e^{-\sqrt{\lambda_k}z_k} \mathbf{C}_{k,2}$  – новое обозначение векторов неизвестных коэффициентов;  $\mathbf{H}_\theta^{kf}(z, z_0^k)$  – первичное поле источника в слое с номером  $k$ ;  $z_{k+1} > z_0^k > z_k$ .

Введенное переобозначение для неизвестных коэффициентов позволяет выразить решение в слое через убывающие экспоненты:

$$\begin{aligned} \nu_0 \mathbf{S}_{0,1} - \nu_1 e^{-\sqrt{\lambda_1}h_1} \mathbf{S}_{1,1} - \nu_1 \mathbf{S}_{1,2} &= \mathbf{H}_\theta^{1f}(z_1, z_0^1) - \mathbf{H}_\theta^{0f}(z_1, z_0^0); \\ L_{12}^0 \nu_0 \sqrt{\lambda_0} \mathbf{S}_{0,1} - L_{12}^1 \nu_1 \sqrt{\lambda_1} e^{-\sqrt{\lambda_1}h_1} \mathbf{S}_{1,1} + L_{12}^1 \nu_1 \sqrt{\lambda_1} \mathbf{S}_{1,2} &= \\ &= L_{12}^1 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^{1f}(z_1, z_0^1) - L_{12}^0 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^{0f}(z_1, z_0^0); \\ \nu_1 \mathbf{S}_{1,1} + \nu_1 e^{-\sqrt{\lambda_1}h_1} \mathbf{S}_{1,2} - \nu_2 e^{-\sqrt{\lambda_2}h_2} \mathbf{S}_{2,1} - \nu_2 \mathbf{S}_{2,2} &= \mathbf{H}_\theta^{2f}(z_2, z_0^2) - \mathbf{H}_\theta^{1f}(z_2, z_0^1); \\ L_{12}^1 \nu_1 \sqrt{\lambda_1} \mathbf{S}_{1,1} - L_{12}^1 \nu_1 \sqrt{\lambda_1} e^{-\sqrt{\lambda_1}h_1} \mathbf{S}_{1,2} - L_{12}^2 \nu_2 \sqrt{\lambda_2} e^{-\sqrt{\lambda_2}h_2} \mathbf{S}_{2,1} + L_{12}^2 \nu_2 \sqrt{\lambda_2} \mathbf{S}_{2,2} &= \\ &= L_{12}^2 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^{2f}(z_2, z_0^2) - L_{12}^1 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^{1f}(z_2, z_0^1); \\ \nu_k \mathbf{S}_{k,k} + \nu_k e^{-\sqrt{\lambda_k}h_k} \mathbf{S}_{k,2} - \nu_{k+1} e^{-\sqrt{\lambda_{k+1}}h_{k+1}} \mathbf{S}_{k+1,1} - \nu_{k+1} \mathbf{S}_{k+1,2} &= \\ &= \mathbf{H}_\theta^{k+1f}(z_{k+1}, z_0^{k+1}) - \mathbf{H}_\theta^{kf}(z_{k+1}, z_0^k); \\ L_{12}^k \nu_k \sqrt{\lambda_k} \mathbf{S}_{k,1} - L_{12}^k \nu_k \sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k}h_k} \mathbf{S}_{k,2} - L_{12}^{k+1} \nu_{k+1} \sqrt{\lambda_{k+1}} e^{-\sqrt{\lambda_{k+1}}h_{k+1}} \mathbf{S}_{k+1,1} + \\ + L_{12}^{k+1} \nu_{k+1} \sqrt{\lambda_{k+1}} \mathbf{S}_{k+1,2} &= L_{12}^{k+1} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^{k+1f}(z_{k+1}, z_0^{k+1}) - L_{12}^k \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^{kf}(z_{k+1}, z_0^k); \\ \nu_M \mathbf{S}_{M,1} + \nu_M e^{-\sqrt{\lambda_M}h_M} \mathbf{S}_{M,2} - \nu_{M+1} \mathbf{S}_{M+1,2} &= \mathbf{H}_\theta^{M+1f}(z_M, z_0^{M+1}) - \mathbf{H}_\theta^{Mf}(z_M, z_0^M); \end{aligned}$$

$$L_{12}^M \nu_M \sqrt{\lambda_M} \mathbf{S}_{M,1} - L_{12}^M \nu_M \sqrt{\lambda_M} e^{-\sqrt{\lambda_M} h_M} \mathbf{S}_{M,2} - L_{12}^{M+1} \nu_{M+1} \sqrt{\lambda_{M+1}} \mathbf{S}_{M+1,2} = \\ = L_{12}^{M+1} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^{M+1f}(z_M, z_0^{M+1}) - L_{12}^M \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_\theta^{Mf}(z_M, z_0^M),$$

где  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя,  $k = \overline{1, M}$ .

Зная неизвестные коэффициенты, электромагнитное поле может быть найдено как на оси скважины, так и в околоскважинном пространстве.

### 3. Результаты компьютерного моделирования

Описанный выше метод вычисления программно реализован. Проведены вычислительные эксперименты для ряда практических геофизических примерных задач.

#### Пример 1. Низкочастотное приближение.

Для разработки геофизических приборов с целью изучения околоскважинного пространства на низких частотах необходимо проведение численных экспериментов с целью определения параметров аппаратуры для решения геологических задач. Пусть скважина диаметром 0,1 м с удельной электропроводностью 0,1 См/м пересекает горизонтальный пласт (средний слой) метровой толщины с удельной электропроводностью 0,01 См/м (рис. 1). Области, находящиеся выше и ниже пласта, (верхний и нижние слои) имеют удельную электропроводность 1/30 См/м. Электромагнитное поле возбуждается источником частотой 100 Гц, находящимся в скважине на удалении 0,25 м выше верхней границы пласта. Геометрические размеры источника: радиус  $a=0,05$  м, высота  $h=0,001$  м. На рис. 2 представлены результаты решения прямой двумерной задачи на оси скважины для данной модели среды.

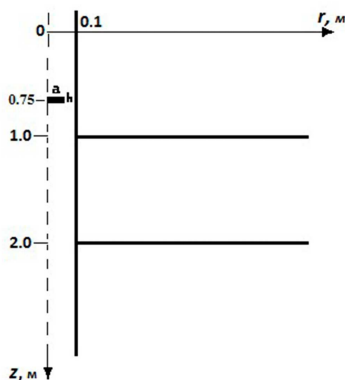


Рис. 1. Модель среды – скважина пересекает пласт

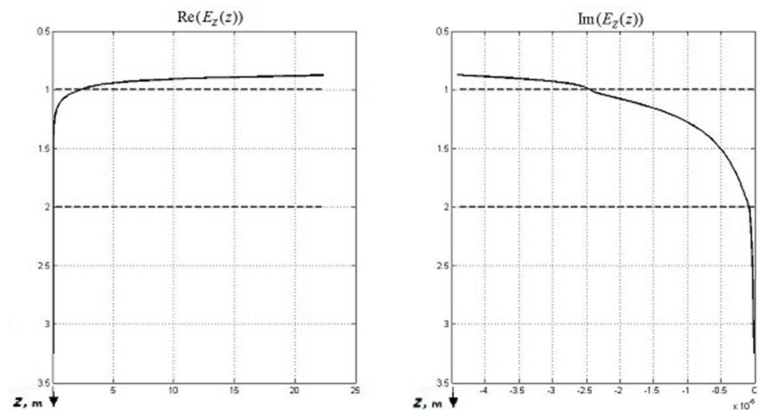


Рис. 2. Действительная (а) и мнимая (б) части вертикальной компоненты напряженности электрического поля на оси скважины для частоты 100 Гц

#### Пример 2. Высокочастотное приближение (георадар) для горизонтально-слоистой модели геологической среды.

Одна из практических задач – поиск и разведка месторождений газогидратов. Газогидраты не выявляются с использованием стандартных методов исследования



скважин. Однако известно, что они обладают различными диспергирующими свойствами удельной электропроводности по отношению к вмещающим породам [7]. Это требует разработки методических основ изучения таких объектов на основе высокочастотных методов геоэлектрики, каким является георадарный метод в скважинном варианте [8].

На основе предложенного подхода к решению прямых задач в скважинном варианте разработанное программное обеспечение моделирования электромагнитных полей в высокочастотном приближении. Основная проблема – необходимость учета широкого диапазона пространственных частот, что реализовано на декадном разделении носителя подынтегральной быстроосциллирующей функции в обратном преобразовании Фурье – Бесселя и переходе к интегрированию с разным шагом на каждой декаде.

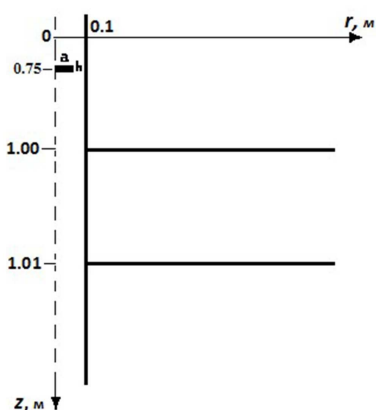


Рис. 3. Модель среды – скважина пересекает газогидратный пласт

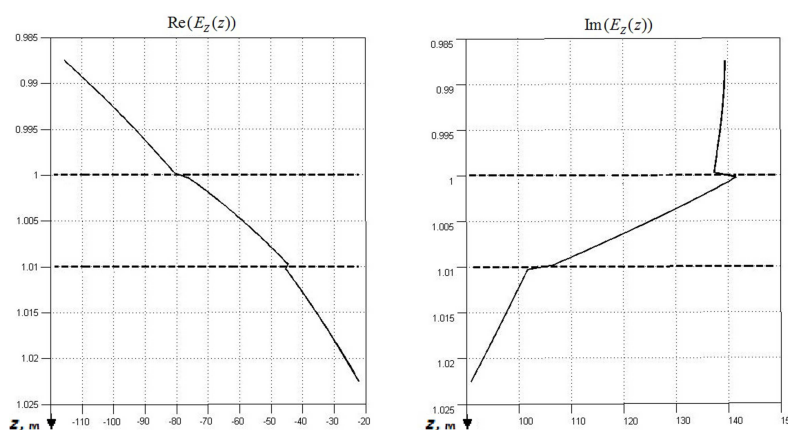
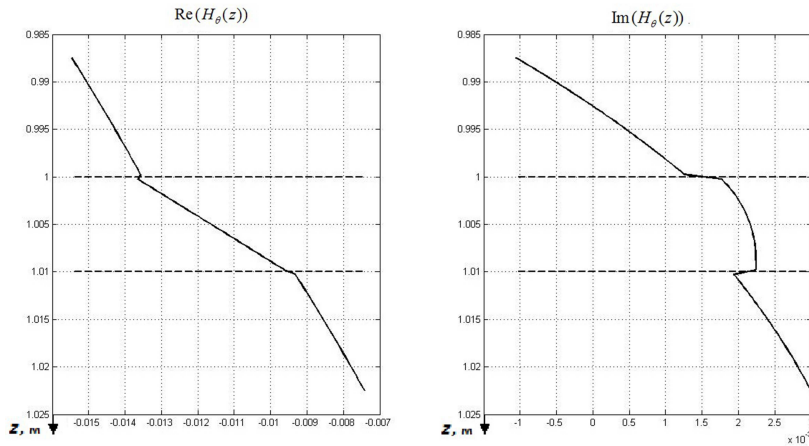


Рис. 4. Действительная (а) и мнимая (б) части вертикальной компоненты напряженности электрического поля на оси скважины для частоты 250 МГц без учета дисперсии диэлектрической проницаемости

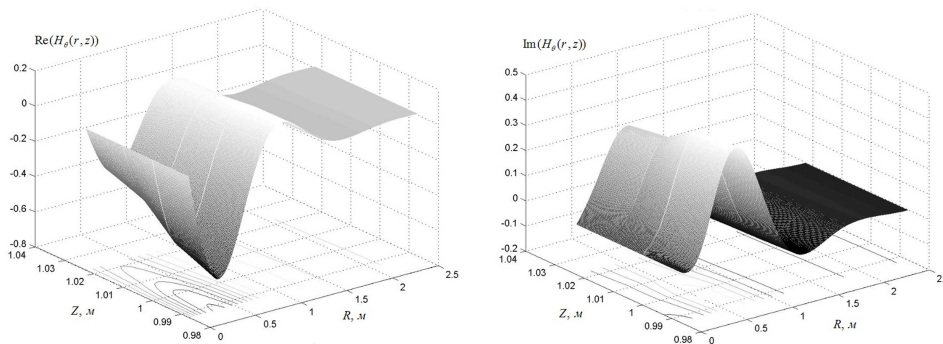
Пусть скважина (рис. 3) диаметром 0,1 м с удельной электропроводностью  $\sigma_s = 0,1 + i\omega \frac{10^{-9}}{36\pi}$  См/м пересекает горизонтальный пласт (средний слой) сантиметровой толщины. Области, находящиеся выше и ниже пласта, (верхний и нижние слои) имеют удельные электропроводности  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0,01 + i\omega \frac{10^{-9}}{36\pi}$  См/м. Вертикальное электромагнитное поле с частотой 250 МГц возбуждается источником, находящимся в скважине на удалении 0,25 м выше верхней границы пласта. Геометрические размеры источника: радиус  $a=0,05$  м, высота  $h=0,001$  м.

Вычислительный эксперимент проведен для двух случаев удельной электропроводности газогидратного пласта: I) без учета дисперсии диэлектрической проницаемости (при  $\sigma_2 = \frac{1}{30} + i\omega \frac{10^{-9}}{36\pi}$  См/м), и II) с учетом дисперсии диэлектрической проницаемости (при  $\sigma_2 = \frac{1+(8i\omega)^{0,4}}{30+0,9(8i\omega)^{0,4}}$  См/м) – модель Cole-Cole [9].

Результаты расчетов для случая I представлены на рис. 4 – 6. Здесь на рис. 4 показана вариация вертикальной компоненты напряженности электрического поля вдоль оси скважины. Азимутальная компонента напряженности магнитного поля показана на оси скважины (рис. 5) и в плоскости  $\theta = \text{const}$  (рис. 6).



**Рис. 5.** Действительная (а) и мнимая (б) части азимутальной компоненты напряженности магнитного поля на оси скважины для частоты 250 МГц без учета дисперсии диэлектрической проницаемости



**Рис. 6.** Действительная (а) и мнимая (б) части азимутальной компоненты напряженности магнитного поля в плоскости  $\theta = \text{const}$  для частоты 250 МГц без учета дисперсии диэлектрической проницаемости

Учет диспергирующих свойств удельной электропроводности газогитратного пласта (вариант II) демонстрируется на рис. 7 – 9. Здесь на рис. 7 показана вариация вертикальной компоненты напряженности электрического поля вдоль оси скважины. Азимутальная компонента напряженности магнитного поля показана на оси скважины (рис. 8) и в плоскости  $\theta = \text{const}$  (рис. 9).

**Пример 3.** Высокочастотное приближение (георадар) для радиально-неоднородной горизонтально-слоистой модели геологической среды.

Рассмотрим скважину диаметром 0,1 м с удельной электропроводностью и магнитной проницаемостью бурового раствора в ней соответственно  $\sigma_s = 0,1 + i\omega\varepsilon_0 80$  См/м и  $\mu_s = 10\mu_0$ , где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума. Скважина имеет электрически слабопроницаемую глинистую корку ( $r_g = 0,105$  м) с параметрами См/м и  $\sigma_g = 0,00001 + i\omega\varepsilon_0$  См/м и  $\mu_g = \mu_0$ , и пересекает горизонтально-слоистую трехслойную среду. Горизонтальный пласт (средний слой) имеет толщину 10 см с электромагнитными характеристиками  $\sigma_{22} = 0,01 + i\omega\varepsilon_0$  См/м и  $\mu_{22} = \mu_0$ . Области,

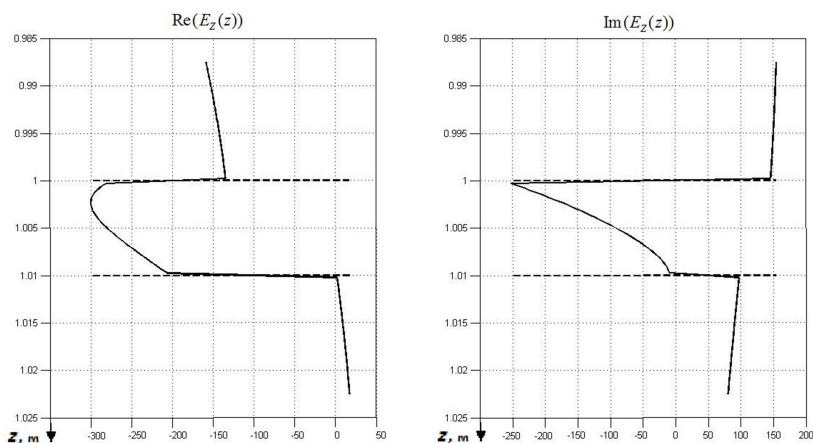


Рис. 7. Действительная (а) и мнимая (б) части вертикальной компоненты напряженности электрического поля на оси скважины для частоты 250 МГц с учетом дисперсии диэлектрической проницаемости

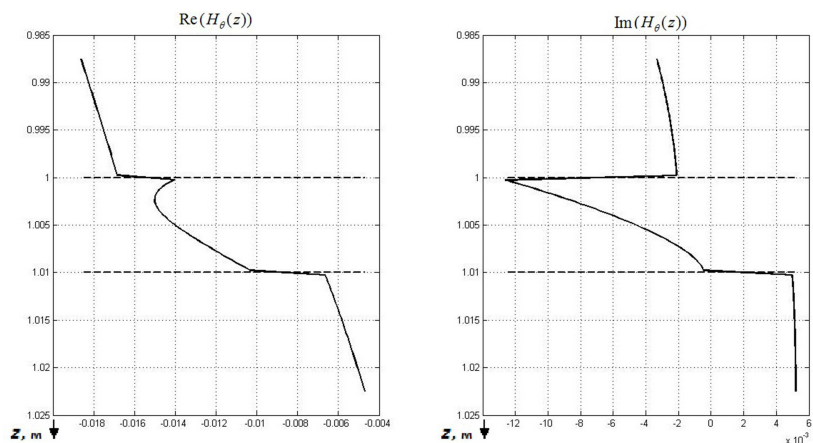
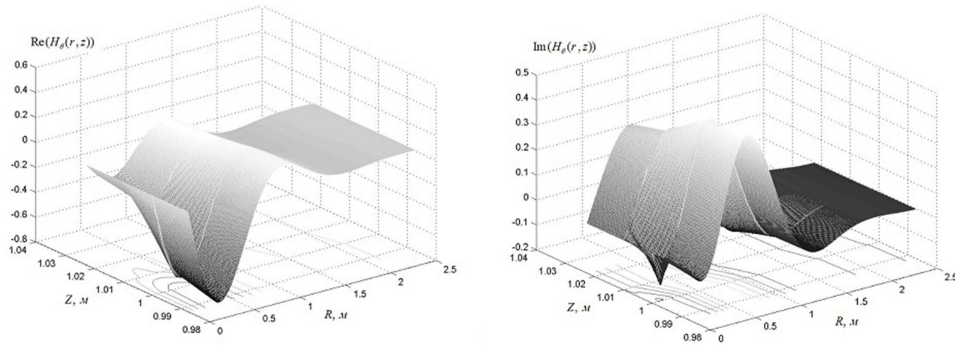


Рис. 8. Действительная (а) и мнимая (б) части азимутальной компоненты напряженности магнитного поля на оси скважины для частоты 250 МГц с учетом дисперсии диэлектрической проницаемости

находящиеся выше и ниже пласта, (верхний и нижний слои) имеют одинаковые характеристики  $\sigma_{12} = \sigma_{32} = 0,001 + i\omega\varepsilon_0$  См/м и  $\mu_{12} = \mu_{32} = \mu_0$ . В каждом горизонтальном слое фильтрат бурового раствора образует зоны проникновения (рис. 10) радиусы внешних границ которых соответственно  $r_1 = 0,395$  м,  $r_2 = 0,145$  м и  $r_3 = 0,045$  м. Электрические и магнитные свойства зон проникновения первого и третьего слоя одинаковы –  $\sigma_{11} = \sigma_{31} = 0,01 + i\omega\varepsilon_0$  См/м и  $\mu_{11} = \mu_{31} = \mu_0$ . Зона проникновения фильтрата бурового раствора второго слоя задана следующими параметрами:  $\sigma_{21} = \frac{1}{30} + i\omega\varepsilon_0$  См/м,  $\mu_{21} = \mu_0$ .

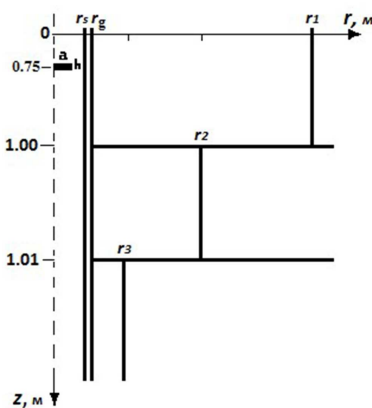
Вертикальное электромагнитное поле с частотой 250 МГц возбуждается источником, находящимся в скважине на удалении 0,25 м выше верхней границы второго слоя (пласта). Геометрические размеры источника: радиус  $a=0,05$  м, высота  $h=0,001$  м.

Результаты вычислительного эксперимента для примера 3 представлены на рис. 11 – 13. Здесь на рис. 11 показана вариация вертикальной компоненты напря-

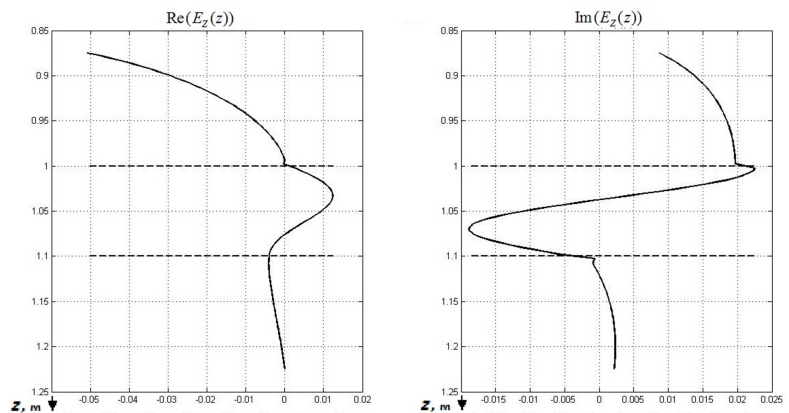


**Рис. 9.** Действительная (а) и мнимая (б) части азимутальной компоненты напряженности магнитного поля в плоскости  $\theta = \text{const}$  для частоты 250 МГц с учетом дисперсии диэлектрической проницаемости

женности электрического поля вдоль оси скважины. Азимутальная компонента напряженности магнитного поля показана на оси скважины (рис. 12) и в плоскости  $\theta = \text{const}$  (рис. 13).



**Рис. 10.** Модель горизонтально-слоистой радиально-неоднородной среды



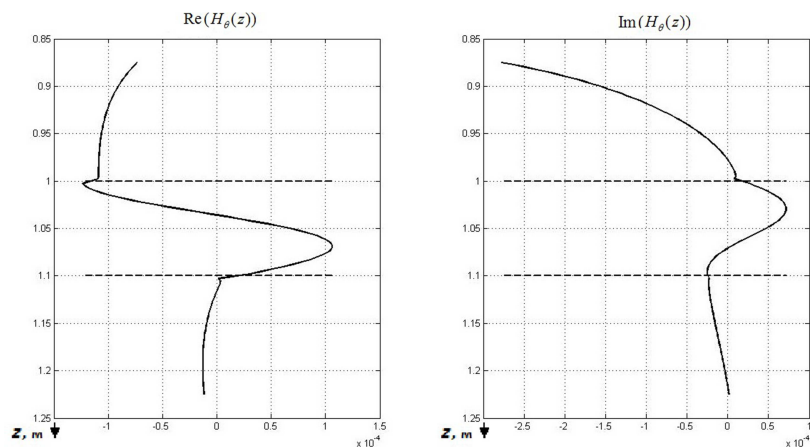
**Рис. 11.** Действительная (а) и мнимая (б) части вертикальной компоненты напряженности электрического поля на оси скважины для частоты 250 МГц

### Заключение

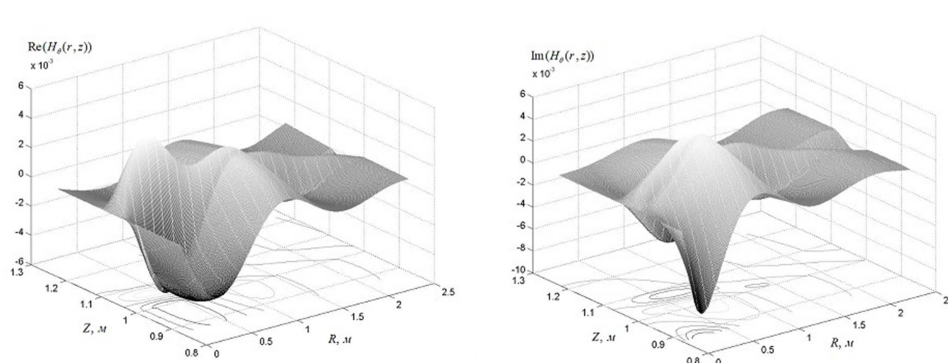
Сведение системы уравнений Максвелла к системам обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет использовать интегралы Ломмеля, которые в свою очередь создают возможность получить аналитические выражения для некоторых интегралов.

Учет пространственных размеров приемников и источников приближает решение к реальным системам наблюдения. Учет пространственных размеров источников позволяет исключить сингулярности и вычислить поле внутри источников, что является актуальной задачей исследования согласования источника и нагрузки.

Полученное решение позволяет находить электромагнитное поле во временной области, используя обратное преобразование Фурье. Это создает теоретическую основу



**Рис. 12.** Действительная (а) и мнимая (б) части азимутальной компоненты напряженности магнитного поля на оси скважины для частоты 250 МГц



**Рис. 13.** Действительная (а) и мнимая (б) части азимутальной компоненты напряженности магнитного поля в плоскости  $\theta = \text{const}$  для частоты 250 МГц

разработки геордарной технологии в скважинном варианте по обнаружению тонких слоев, обладающих дисперсией удельной электропроводности.

## Литература

1. Александров, П.Н. Прямая задача геоэлектрики в одномерных бианизотропных средах / П.Н. Александров // Физика Земли. – 2001. – № 4. – С. 51–61.
2. Геофизические методы исследования скважин. Справочник геофизика. – М.: Недра, 1983.
3. Кауфман, А.А. Теория индукционного каротажа / А.А. Кауфман. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1965.
4. Каринский, А.Д. Электромагнитное поле в моделях электрически анизотропной среды / А.Д. Каринский. – М.: ГЕОС, 2018.
5. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974.
6. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981.
7. Фатыхов, М.А. Разработка методики определения и экспериментальные исследования диэлектрических параметров газового гидрата в области вы-

соких частот [Электронный ресурс] / М.А. Фатыхов, Н.Я. Багаутдинов // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – 2006. – № 2. – URL: [http://ogbus.ru/files/ogbus/authors/Fatykhov/Fatykhov\\_1.pdf](http://ogbus.ru/files/ogbus/authors/Fatykhov/Fatykhov_1.pdf)

8. Kapustin, V.V. Application of Borehole Penetrating Radar for Surveying Underground Engineering Structures / V.V. Kapustin, N.P. Semeikin, V.V. Monakhov // First Break. – 2009. – V. 27, № 3. – P. 87–90.
9. Cole, K.S. Dispersion and Absorption in Dielectrics II. Direct Current Characteristics / K.S. Cole, R.H. Cole // The Journal of Chemical Physics. – 1942. – V. 10, № 2. – P. 98–105.

Павел Николаевич Александров, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Центр геоэлектромагнитных исследований Института физики Земли имени О.Ю. Шмидта РАН (г. Москва, Российская Федерация), alexander@igemi.troitsk.ru.

Владимир Николаевич Кризский, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (г. Стерлитамак, Российская Федерация), v.n.krizsky@strbsu.ru.

*Поступила в редакцию 18 марта 2020 г.*

---

MSC 35Q86, 86A25

DOI: 10.14529/mmp200208

## MODELLING OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN HORIZONTALLY LAYERED RADIALY INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC MEDIA

*P.N. Aleksandrov<sup>1</sup>, V.N. Krizsky<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Center for Geoelectromagnetic Research of the Schmidt Institute of Earth Physics of the Russian Academy of Sciences

<sup>2</sup> Sterlitamak Branch of the Bashkir State University, Sterlitamak, Russian Federation  
E-mails: alexander@igemi.troitsk.ru, v.n.krizsky@strbsu.ru

The solution of the direct problem is based on two main ideas: reducing the system of Maxwell equations written in a cylindrical coordinate to a system of ordinary differential equations using Lommel integrals for the Fourier–Bessel transform and taking into account the final dimensions of the geometric parameters of the model. This allows us to solve direct problems for axisymmetric radially inhomogeneous layered media, taking into account anisotropy in both electrical conductivity and magnetic permeability, including for their dispersions as frequency functions. All this is important in the study of near-well space in the methods of geophysical research of wells.

*Keywords: two-dimensional problems of geoelectrics; anisotropic horizontally layered radially inhomogeneous media; Fourier–Bessel transform; electromagnetic logging; gas hydrates.*

---

## References

1. Aleksandrov P.N. [The Direct Problem of Geoelectrics in the One-Dimensional Bi-Anisotropic Media]. *Fizika Zemli* [Physics of the Earth], 2001, no. 4, pp. 51–61. (in Russian)
2. *Geofizicheskie metody issledovanija skvazhin. Spravochnik geofizika* [Geophysical Methods of Well Research. Geophysics Reference Book]. Moscow, Nedra, 1983.
3. Kaufman A.A. *Teorija indukcionnogo karotazha* [The Theory of Induction Logging]. Novosibirsk, Nauka, 1965.
4. Karinskij A.D. *Jelektromagnitnoe pole v modeljah jelektricheski anizotropnoj sredy* [Electromagnetic Field in Models of an Electrically Anisotropic Medium]. Moscow, GEOS, 2018.
5. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike* [Handbook of Mathematics]. Moscow, Nauka, 1974.
6. Prudnikov A.P., Brychkov Ju.A., Marichev O.I. *Integraly i rjady* [Integrals and Series]. Moscow, Nauka, 1981.
7. Fatykhov M.A., Bagautdinov N.Ja. [Development of a Method for Determining and Experimental Studies of the Dielectric Parameters of a Gas Hydrate in the High-Frequency Region]. *Neftegazovoe delo* [Oil and Gas Business], 2006, no. 2, available at: [http://ogbus.ru/files/ogbus/authors/Fatykhov/Fatykhov\\_1.pdf](http://ogbus.ru/files/ogbus/authors/Fatykhov/Fatykhov_1.pdf) (in Russian)
8. Kapustin V.V., Semeikin N.P., Monakhov V.V. Application of Borehole Penetrating Radar for Surveying Underground Engineering Structures. *First Break*, 2009, vol. 27, no. 3, pp. 87–90.
9. Cole K.S., Cole R.H. Dispersion and Absorption in Dielectrics II. Direct Current Characteristics. *The Journal of Chemical Physics*, 1942, vol. 10, no. 2, pp. 98–105.

*Received March 18, 2020*