

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗГОННОГО ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНОМ ПОРИСТОМ КАНАЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

*В.И. Рязжский<sup>1</sup>, А.В. Келлер<sup>1</sup>, А.В. Рязжский<sup>1</sup>, А.В. Николенко<sup>1</sup>,  
С.В. Дахин<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж,  
Российская Федерация

На основе уравнения Дарси – Бринкмана – Форчхеймера без учета инерционности и в предположении однонаправленности синтезирована 3-D математическая модель разгонного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в анизотропном пористом канале прямоугольного сечения с учетом времени создания постоянного напора. Для тензора проницаемости выбрана ортотропная структура и показано присутствие всех диагональных компонент в формулировке финишной начально-краевой задачи для уравнения импульса, которая решена аналитически применением полуограниченного интегрального преобразования Лапласа и конечного интегрального синус-преобразования Фурье. Сравнительный анализ с известными теоретическими результатами в упрощенной постановке подтвердил корректность принятых допущений, что позволило применить разработанную модель для оценки времени установления разгонного течения в зависимости от времени достижения постоянства градиента давления, коэффициентов проницаемости и угла ориентации в анизотропной структуре.

*Ключевые слова: математическая модель; пористость; анизотропия; проницаемость; канал с прямоугольным поперечным сечением; время установления.*

### Введение

Идентификация явлений переноса в технических и технологических системах широкого предметного назначения достигается применением пористых материалов природного и искусственного происхождения, которые обеспечивают максимально возможную удельную площадь поверхности межфазного взаимодействия [1,2]. Режим функционирования таких систем, как правило, нестационарный, так как входные характеристики потоков (расход, давление, температура и др.) существенным образом зависят от времени (например, в случае электрохимических устройств [3] сжигания углеводородно-нейтральных и возобновляемых видов топлива [4], а также микрохимических реакторов [5]).

Наряду с очевидными преимуществами пористых сред, существует и ключевой недостаток – значительное гидравлическое сопротивление [6], т.е. их использование эффективно тогда, когда увеличение количественных показателей реперных потенциалов будет превышать энергетические затраты на прокачку рабочего тела [7]. Проведение такого анализа путем прямого интегрирования системы фундаментальных уравнений непрерывности и переноса импульса Навье – Стокса невозможно из-за практически неформализуемой топологии порового пространства [8], что привело к синтезу макроскопических [9, 10] и микроскопических [11, 12] моделей. Модели макроскопического типа основываются на уравнении Дарси – Бринкмана – Форчхеймера [13], однако адекватность их применения для оценки нестационарных режимов еще предстоит верифицировать [14]. Тем не менее, при допущении об однонаправленности

течения [15] в [16] было получено аналитическое решение задачи о начальном гидродинамическом участке изотропного пористого канала с прямоугольным поперечным сечением. Микроскопические модели базируются на детальной архитектуре парового пространства, имеющей регулярную структуру [17], причем не ясна правомерность использования такого подхода для описания порового пространства со стохастической структурой. Кроме того, эксперименты в микрометровом масштабе показали [18], что из-за неоднородности течения может происходить скольжение на границе жидкость – твердое тело, причем величина проскальзывания носит динамический характер и это обстоятельство затрудняет ее определение.

Наметившийся тренд дальнейшей интенсификации явлений переноса за счет пористых сред с заданной анизотропной структурой [19, 20] вызвал необходимость оценки гидродинамических параметров для них в нестационарных режимах и, в частности, определения времени выхода на стационарный режим в циркуляционном контуре охлаждения [21] с учетом времени релаксации напора.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается развитие напорного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в полубесконечном горизонтальном анизотропном пористом канале прямоугольного поперечного сечения высотой  $h_z$  и шириной  $h_x$  (рис. 1) при нарастающем градиенте давления до постоянного значения за конечное время  $\tau_0$ .

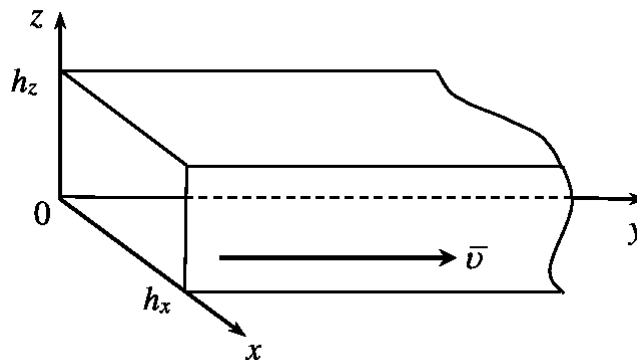


Рис. 1. Расчетная схема

Макроскопическая модель гидродинамики в пористой среде представляется уравнением Дарси – Бринкмана – Форчхеймера без учета инерционного эффекта (допущение обосновано для ламинарного режима течения в [22]) в форме Ксу – Ченга [23]:

$$\nabla \bullet \bar{v} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \left( \frac{\bar{v}}{\varepsilon} \bullet \nabla \right) \bar{v} = \frac{\varepsilon}{\rho_f} \left( -\nabla p + \frac{\mu_f}{\varepsilon} \nabla^2 \bar{v} - \frac{\mu_f}{K} \bar{v} \right), \quad (2)$$

где  $\tau$  – время,  $c$ ;  $\bar{v}$  – вектор скорости сатурированной жидкости во внутрипоровом пространстве,  $m/c$ ;  $\rho_f$ ,  $\mu_f$  – плотность и динамическая вязкость жидкой фазы,  $kg/m^3$ ,  $Pa \cdot c$ ;  $\varepsilon$  – пористость;  $p$  – абсолютное давление,  $Pa$ ;  $K$  – проницаемость,  $m^2$ . Для изотропной пористой среды проницаемость является скалярной величиной, а в случае

анизотропии – ортотропным тензором [24] по причине более простого экспериментального определения его компонентов.

Введем обозначение тензора проницаемости как  $\bar{\bar{K}}$ . Известно [25], что Якобианы вращения декартовой системы координат вокруг осей  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$  на углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  таковы:

$$J(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; J(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix};$$

$$J(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

поэтому матрица вращения есть

$$A = J(\alpha) J(\beta) J(\gamma) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Структура ортотропного тензора проницаемости имеет диагональный вид в выбранной системе координат

$$\bar{\bar{K}}_0 = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}$$

или в инвариантной форме записи

$$\bar{\bar{K}} = A \bar{\bar{K}}_0 A^T,$$

где его компоненты равны

$$K_{xx} = \cos^2 \beta \cos^2 \gamma K_x + \cos^2 \beta \sin^2 \gamma K_y + \sin^2 \beta K_z;$$

$$K_{xy} = K_{yx} = \cos \beta \cos \gamma (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) K_x -$$

$$- \cos \beta \sin \gamma (-\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma) K_y - \sin \alpha \sin \beta \cos \beta K_z;$$

$$K_{xz} = K_{zx} = \cos \beta \cos \gamma (-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma) K_x -$$

$$- \cos \beta \sin \gamma (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma) K_y + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta K_z;$$

$$K_{yy} = (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma)^2 K_x + (-\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma +$$

$$+ \cos \alpha \cos \gamma)^2 K_y + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta K_z;$$

$$K_{yz} = K_{zy} = (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \gamma) K_x +$$

$$+ (\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma) (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma) K_y - \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta K_z;$$

$$K_{zz} = (-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma)^2 K_x + (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma +$$

$$+ \sin \alpha \cos \gamma)^2 K_y + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta K_z.$$

Составляющая Дарси для анизотропного случая преобразована следующим образом

$$\mu_f \bar{v} / \bar{K} = \mu_f \bar{K}^{-1} \bar{v} / (\bar{K} \cdot \bar{K}^{-1}) = \mu_f \bar{K}^{-1} \bar{v} / \bar{E}, \quad (3)$$

где  $\bar{K}^{-1}$  – обратный тензор проницаемости;  $\bar{E}$  – единичный тензор. Умножение на  $\bar{E}$  слева трансформирует (2) с учетом (3) к виду

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \left( \frac{\bar{v}}{\varepsilon} \bullet \nabla \right) \bar{v} = \frac{\varepsilon}{\rho_f} \left( -\nabla p + \frac{\mu_f}{\varepsilon} \nabla^2 \bar{v} + \mu_f \bar{K}^{-1} \bar{v} \right). \quad (4)$$

Компонентная форма записи системы (1), (4), в предположении однонаправленности течения по оси  $oy$ , т.е.  $\bar{v} = (0, v_y, 0)$ , такова

$$\frac{\partial v_y}{\partial \tau} = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_f}{\rho_f} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\varepsilon \mu_f}{\rho_f} K_{yy}^* v_y, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} K_{yy}^* &= [F_y(\alpha, \beta, \gamma) K_y^* + F_x(\alpha, \beta, \gamma) K_x^* + F_z(\alpha, \beta)] / K_z, \\ F_y(\alpha, \beta, \gamma) &= -\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + 2 \cos^2 \alpha \cos \gamma + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + \\ &+ \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma; \\ F_x(\alpha, \beta, \gamma) &= -\cos^2 \beta \cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma + \\ &+ \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma; \\ F_z(\alpha, \beta) &= \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta; K_y^* = K_z / K_y; K_x^* = K_z / K_x. \end{aligned}$$

Уравнение (5) дополняется краевыми условиями:

$$v_y(x, z, 0) = 0; \quad (6)$$

$$v_y(0, z, \tau) = v_y(h_x, z, \tau) = v_y(x, 0, \tau) = v_y(x, h_z, \tau) = 0, \quad (7)$$

а градиент давления представлен псевдомультимпликативным комплексом

$$\frac{\partial p(y, \tau)}{\partial y} = \frac{dp(y)}{dy} 1_+^*(\tau),$$

где  $dp(y)/dy = \text{const}$ ,

$$1_+^*(\tau) = \begin{cases} \tau/\tau_0, & 0 < \tau < \tau_0, \\ 1, & \tau_0 < \tau < \infty \end{cases}$$

– модифицированная односторонняя функция Хэвисайда [26].

Система (5) – (7) в безразмерной форме записи такова:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = C 1_+^*(\tau) + \text{Re}^{-1} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) - \varepsilon (\text{Re} \cdot \text{Da})^{-1} \Phi V; \quad (8)$$

$$V(X, Z, 0) = 0; \quad (9)$$

$$V(0, Z, \theta) = V(H_x, Z, 0) = V(X, 0, \theta) = V(X, H_z, \theta) = 0, \quad (10)$$

где  $\theta = \bar{v}\tau/d_h$ ;  $\theta_0 = \bar{v}\tau_0/d_h$ ;  $X = x/d_h$ ;  $Z = z/d_h$ ;  $V = v_y/\bar{v}$ ;  $d_h = 2h_x h_z / (h_x + h_z)$  – гидравлический диаметр канала, м;  $\bar{v}$  – среднеинтегральная скорость жидкости по поперечному сечению канала при  $\theta \rightarrow \infty$ ;  $\text{Re} = \rho_f d_h \bar{v} / \mu_f$  – число Рейнольдса;  $\text{Da} = K_z / d_h^2$  – число Дарси;  $P = p / (\rho_f \bar{v}^2)$ ;  $\Phi = F_y(\alpha, \beta, \gamma) K_y^* + F_x(\alpha, \beta, \gamma) K_x^* + F_z(\alpha, \beta)$ ;  $C = -\varepsilon dP/dY$ ;  $Y = y/d_h$ .

## 2. Решение

Результат применения одностороннего интегрального преобразования Лапласа [27] по переменной  $\theta$  к начально-краевой задаче (8) – (10):

$$\frac{\partial^2 V_L}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_L}{\partial Z^2} - (\text{Re} + \varepsilon \text{Da}^{-1} \Phi V_L) = -\frac{C \text{Re}}{\theta_0 s^2} [1 - \exp(-\theta_0 s)]; \quad (11)$$

$$V_L(0, Z, s) = V_L(H_x, Z, s) = V_L(X, 0, s) = V_L(X, H_z, s) = 0, \quad (12)$$

где  $V_L(X, Z, s)$  – изображение  $V(X, Z, \theta)$ . Конечные интегральные синус-преобразования Фурье [28] по переменной  $X$

$$\mathfrak{F}_X [V_L(X, Z, s)] = \int_0^{H_x} V_L(X, Z, s) \sin(\lambda_m X) dX = V_{LF_x}(\lambda_m, Z, s),$$

где  $\lambda_m = m\pi/H_x$ ,  $m = \overline{1, \infty}$ , и по переменной  $Z$

$$\mathfrak{F}_Z [V_{LF_x}(\lambda_m, Z, s)] = \int_0^{H_z} V_{LF_x}(\lambda_m, Z, s) \sin(\mu_n Z) dZ = V_{LF_x F_z}(\lambda_m, \mu_n, s),$$

где  $\mu_n = n\pi/H_z$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , вначале переводят систему (11), (12) в краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 V_{LF_x}}{dZ^2} - (\lambda_m^2 + s \text{Re} + \varepsilon \text{Da}^{-1} \Phi) V_{LF_x} = -\frac{C \text{Re}}{\lambda_m \theta_0 s^2} [1 - \cos(\lambda_m H_x)] [1 - \exp(-\theta_0 s)];$$

$$V_{LF_x}(\lambda_m, 0, s) = V_{LF_x}(\lambda_m, H_z, s) = 0,$$

а потом в алгебраическое соотношение

$$V_{LF_x F_z} = C \text{Re} [1 - \cos(\lambda_m H_x)] [1 - \cos(\mu_n H_z)] [1 - \exp(-\theta_0 s)] / [\lambda_m \mu_n \theta_0 s^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2 + s \text{Re} + \varepsilon \text{Da}^{-1} \Phi)]. \quad (13)$$

С помощью формул обращения [27, 28] примененных интегральных преобразований получено из (13) решение:

$$V(X, Z, \theta) = \frac{4C}{H_x H_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{b_{mn}^2} \left\{ -1 + b_{mn} \theta 1_+(\theta_0 - \theta) + \exp(-b_{mn} \theta) + 1_+(\theta - \theta_0) \left[ 2 \exp\left(-\frac{b_{mn}}{2} \theta + \frac{\theta_0 b_{mn}}{2}\right) \text{sh}\left(\frac{b_{mn}}{2} \theta - \frac{\theta_0 b_{mn}}{2}\right) + \theta_0 b_{mn} \right] \right\} \sin(\lambda_m X) \sin(\mu_n Z),$$

где  $a_{mn} = [1 - \cos(\lambda_m H_x)] [1 - \cos(\mu_n H_z)] / (\lambda_m \mu_n \theta_0)$ ,  $b_{mn} = (\lambda_m^2 + \mu_n^2 + \varepsilon \text{Da}^{-1} \Phi) / \text{Re}$ .

Константа  $C$  определена из условия

$$\frac{1}{H_x H_z} \int_0^{H_x} \int_0^{H_z} V(X, Z, \infty) dX dZ = 1,$$

откуда

$$C = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{4}{H_x H_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{b_{mn}^2} \left\{ -1 + b_{mn} \theta 1_+ (\theta_0 - \theta) + \exp(-b_{mn} \theta) + 1_+ (\theta - \theta_0) \left[ 2 \exp \left( -\frac{b_{mn}}{2} \theta + \frac{\theta_0 b_{mn}}{2} \right) \right] \right\},$$

а коэффициент гидравлического сопротивления  $\xi$  из закона Дарси [1]:

$$dp = \xi \frac{\rho_f \bar{v}^2}{2} \frac{dy}{dh},$$

т.е.

$$\xi = -2C/\varepsilon.$$

Время установления стабилизированного течения  $\theta^*$  найдено при допустимом отклонении в 1% из уравнения

$$|1 - V(1/2, 1/2, \theta^*) / V(1/2, 1/2, \infty)| = 0,01.$$

### 3. Анализ

Проверка адекватности синтезированной математической модели проводилась на основе сравнительного анализа с аналитическим решением при напорном стационарном ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном анизотропном пористом полубесконечном канале [29] формата 2-D. В этом случае ось  $ox$  (рис. 1) нивелируется, причем  $K_x^* = 0$ ,  $\beta = \gamma = 0$  и  $\theta_0 = 0,01$ , а для того, чтобы канал с прямоугольным сечением соответствовал плоскому каналу с сечением в виде полосы, достаточно выполнение условия  $H_x \gg H_z$  (например,  $H_x : H_z = 10 : 1$ ). Если положить  $\alpha = 0$  и варьировать коэффициентом проницаемости  $K_y^*$ , то как показано на рис. 2 выраженная гидравлическая анизотропия в направлении оси  $Oz$  приводит к более однородному профилю скорости, а изменение ориентации проницаемости от базовой системы координат  $zOy$  на угол  $\alpha$  вызывает аналогичную трансформацию профиля скорости (рис. 3).

Результаты сравнения позволили применить предложенную математическую модель для оценки зависимости времени установления разгонного течения от времени достижения постоянства градиента давления в условиях анизотропности пористой среды. Увеличение трансверсальной проницаемости по отношению к аксиальной выравнивает поле скоростей по поперечному сечению канала с возрастанием соответственно коэффициента гидравлического сопротивления (рис. 4). Влияние угла ориентации выражено в меньшей степени (рис. 5). Продемонстрирована практически линейная функциональная связь между временем установления течения и временем достижения постоянного перепада давления.

### Заключение

Разработана адекватная математическая модель для определения гидродинамических характеристик разгонного течения вязкой несжимаемой жидкости в пористом

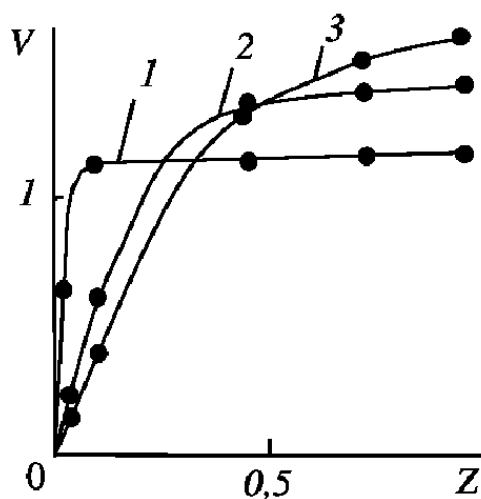


Рис. 2. Профили скоростей установившегося течения в плоском канале при  $H_x = 10$ ,  $H_z = 1$ ,  $Da = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $Re = 10$ ,  $\varepsilon = 0,4$ ,  $\theta_0 = 0,01$  для различных коэффициентов гидравлической проницаемости  $K_y^*$ : 1 – 10; 2 – 1; 3 – 0,1; • – данные [29]

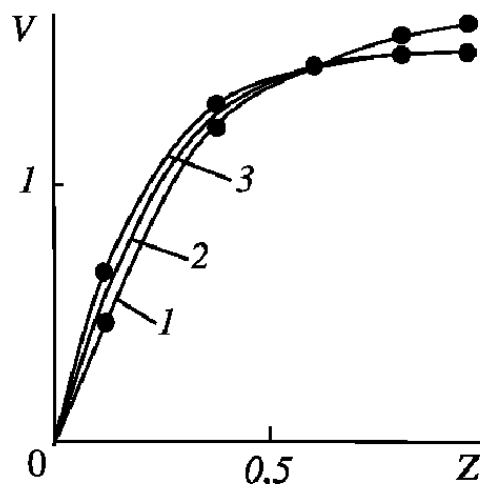


Рис. 3. Профили скоростей установившегося течения в плоском канале при  $H_x = 10$ ,  $H_z = 1$ ,  $Da = 10^{-2}$ ,  $K_y^* = 0,25$ ,  $Re = 10$ ,  $\varepsilon = 0,4$ ,  $\theta_0 = 0,01$  для различных значений угла ориентации  $\alpha$ : 1 – 0; 2 – 30°; 3 – 90°; • – данные [29]

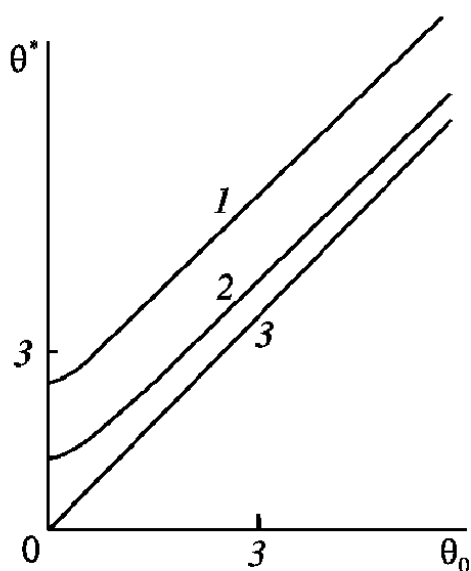


Рис. 4. Время установления разгонного течения при  $H_x = H_z = 1$ ;  $Da = 10^{-2}$ ;  $\alpha = 0$ ;  $Re = 10$ ;  $\varepsilon = 0,4$  для различных значений угла ориентации  $K_y^*$ : 1 – 0,1; 2 – 1; 3 – 10

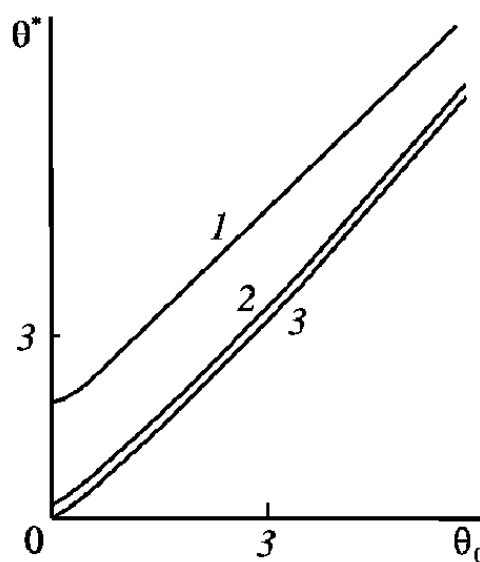


Рис. 5. Время установления разгонного течения при  $H_x = H_z = 1$ ;  $Da = 10^{-2}$ ;  $K_y^* = 0,1$ ;  $Re = 10$ ;  $\varepsilon = 0,4$  для различных значений угла ориентации  $\alpha$ : 1 – 0; 2 – 30°; 3 – 90°

анизотропном канале с прямоугольным сечением, которая позволяет идентифицировать время установления поля скоростей в зависимости от времени стабилизации градиента давления, коэффициента проницаемости и угла ориентации в анизотропной матрице.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-38-90114.*

## Литература

1. Bird, R. Transport Phenomena / R. Bird, W. Stewart, E. Lightfoot. – N.Y.: John Wiley and Sons, 2002.
2. Vafai, K. Handbook of Porous Media / K. Vafai. – N.Y.: CRC Press, 2016.
3. Guodong Xia. A Review on Battery Thermal Management in Electric Vehicle Application / Guodong Xia, Lei Cao, Guanglong Bi // Journal of Power Sources. – 2017. – V. 367. – P. 90–105.
4. Ellrey, J.L. Heat Recirculating Reactors: Fundamental Research and Application / J.L. Ellrey, E.L. Belmont, C.H. Smith // Progress in Energy and Combustion Science. – 2019. – V. 72. – P. 32–58.
5. Kolb, G. Microstructured Reactors for Distributed and Renewable Production of Fuels and Electrical Energy / G. Kolb // Chemical Engineering and Processing: Process Intensification. – 2013. – V. 65. – P. 1–44.
6. Machmoudi, Y. Convective Heat Transfer in Porous Media / Y.Machmoudi, K. Hooman, K. Vafai. – N.Y.: CRC Press, 2019.
7. Lukisha, A.P. The Efficiency of Round Channels Fitted with Porous, Highly Heat-Conducting in Set in a Laminar Fluid Coolant Flow at Boundary Conditions of the Third Kind / A.P. Lukisha, V.F. Prishyakov // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2010. – V. 53. – P. 2469–2476.
8. Jianming Ying. Anisotropic Porous Structure Modeling for 3D Printed Objects / Jianming Ying, Lin Lu, Lihao Tian, Xin Yan, Baoquan Chen // Computers and Graphics. – 2018. – V. 10, № 2. – P. 157–164.
9. Machamoudi, Y. Analytical Investigation of Heat Transfer Enhancement in a Channel Partially Filled with a Porous Material Under Local Thermal Non-Equilibrium Conditions: Effects of Different Thermal Boundary Conditions at the Porous–Fluide Interface / Y. Machamoudi, N. Karimi, K. Mazaheri // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2014. – V. 70. – P. 875–891.
10. Saberinejad, H. Numerical Study of Heat Transfer Performance in a Pipe Partially Filled with Non-Uniform Porous Media Under the Condition / H. Saberinejad, A. Keshavaz, M. Payandehdoost, M.R. Azmoodeh, A. Batooei // International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. – 2018. – V. 28, № 12. – P. 1845–1855.
11. Lopez Penha, D.J. Fully-Developed Conjugate Heat Transfer in Porous Media with Uniform Heating / D.J. Lopez Penha, S. Stols, J.G.M. Kuerten, M. Nordlund, A.K. Kuczay, B.J. Geurts // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2012. – V. 38. – P. 94–106.
12. Xu Chua. Direct Numerical Simulation of Convective Heat Transfer in Porous Media / Xu Chua, Guang Yang, Sandeep Pandey, Bernhard Weiganda // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2019. – V. 133. – P. 11–20.



13. Gamal, A. Problems of Modeling Flow and Heat Transfer in Porous Media / A. Gamal, P. Furmanski // *Journal of Power Technologies*. – 1997. – V. 85. – P. 55–88.
14. Yuanwang Deng. Effects of Different Coolants and Cooling Strategies on the Cooling Performance of the Power Lithium Ion Battery System: a Review / Yuanwang Deng, Changling Feng, Jiaqiang E, Hao Zhu, Jingwei Chen, Ming Wen, Huichun Yin // *Applied Thermal Engineering*. – 2018. – V. 142. – P. 10–29.
15. Chakraborty, G. A Note on Methods for Analysis of Flow Through Microchannels / G. Chakraborty // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2008. – V. 51, № 17–18. – P. 4583–4588.
16. Ryazhskikh, V.I. Analytical Solutions to the Problem of Convective Heat Transfer in a Porous Rectangular Channel for Thermal Boundary Conditions of the Second Genus / V.I. Ryazhskikh, D.A. Konovalov, A.V. Ryazhskikh, A.A. Boger, A.V. Dakhin // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2017. – Т. 10, № 3. – С. 40–53.
17. Gamrat, G. Numerical Study of Heat Transfer Over Banks of Rods in Small Reynolds Number Cross-Flow / G. Gamrat, M. Farve-Marinet, S. Le Person // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2008. – V. 51, № 3–4. – P. 853–864.
18. Benchawan Wiwatanapataphec. Transient Flows of Newtonian Fluid Through a Rectangular Microchannel with Slip Boundary / Benchawan Wiwatanapataphec, Yong Hong Wu, Suharsono Suharsono // *Abstract and Applied Analysis*. – 2014. – Article ID: 530605. – 13 p.
19. Sefi, S. Heat and Mass Transfer in Anisotropic Porous Media / S. Sefi, S. Benissaad // *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*. – 2012. – V. 5, № 1. – P. 11–22.
20. Qinzhuo Liao. Patila Analytical Solution for Upscaling Hydraulic Conductivity in Anisotropic Heterogeneous Formations / Qinzhuo Liao, Gang Lei, Dongxiao Zhang, Shirish Patil // *Advances in Water Resources*. – 2019. – V. 128, № 6. – P. 97–116.
21. Ряжских, В.И. Анализ режимов функционирования замкнутого циркуляционного контура охлаждения с промежуточным теплоносителем / В.И. Ряжских, Ю.Ю. Громов, А.В. Ряжских, А.А. Хвостов // *Прикладная физика и математика*. – 2017. – № 8. – С. 20–26.
22. Izadpanah, M.R. Experimental and Theoretical Studies of Convective Heat Transfer in a Cylindrical Porous Medium / M.R. Izadpanah, H. Muller-Steinhagen, M. Jamialahmadi // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. – 1998. – V. 19, № 6. – P. 629–635.
23. Chintsau Hsu. Thermal Dispersion in Porous Medium / Chintsau Hsu, Ping Cheng // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 1990. – V. 33, № 8. – P. 1587–1597.
24. Soltani, H. Analytical Solution of Forced Convective Heat Transfer in a Horizontal Anisotropic Porous Media Cylinder: Effect of Variatious of Frictional Heating and Heat Generation on the Temperature Profile and Nusselt Number / H. Soltani, H. Ajamin // *Biochemical Engineering Journal*. – 2014. – V. 28, № 3. – P. 301–318.
25. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987.
26. Анго, А. Математика для элеткро- и радио инженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1964.
27. Dotsch, G. Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der z-transformation / G. Dotsch. – Wien: Oldenbourg, 1967.
28. Sneddon, I.N. Fourier Transforms / I.N. Sneddon. – N.Y.: McGraw-Hill, 1951.

29. Degan, G. Forced Convection in Horizontal Porous Channels with Hydrodynamic Anisotropy / G. Degan, S. Zjhoum, P. Vasseur // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2002. – V. 45. – P. 3181–3188.

Виктор Иванович Рязских, доктор технических наук, профессор, кафедры «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), ryazhskih\_vi@mail.ru.

Алевтина Викторовна Келлер, доктор физико-математических наук, профессор, кафедры «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), alevtinak@inbox.ru.

Александр Викторович Рязских, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), ryazhskihav@bk.ru.

Александр Владимирович Николенко, аспирант, кафедры «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), nikolenko.alexandr.93@yandex.ru.

Сергей Викторович Дахин, кандидат технических наук, доцент, кафедры «Теоретическая и промышленная теплоэнергетика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), secretary-d21203705@yandex.ru.

*Поступила в редакцию 20 апреля 2020 г.*

---

MSC 35K60

DOI: 10.14529/mmp200302

**MATHEMATICAL MODEL OF THE ACCELERATION LAMINAR FLOW OF A NEWTONIAN FLUID IN AN ANISOTROPIC POROUS CHANNEL OF RECTANGULAR CROSS SECTION**

*V.I. Ryazhskih<sup>1</sup>, A.V. Keller<sup>1</sup>, A.V. Ryazhskih<sup>1</sup>, A.V. Nikolenko<sup>1</sup>, S.V. Dakhin<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

E-mails: ryazhskih@scientist.com, alevtinak@inbox.ru, ryazhskihav@bk.ru, nikolenko.alexandr.93@yandex.ru, secretary-d21203705@yandex.ru

Based on the Darcy–Brinkman–Forchchimer equations without taking into account the inertia and assuming the unity of the synthesis of the synthesized three-dimensional mathematical model of the accelerating-laminar flow of a viscous incompressible fluid in an anisotropic origin of a rectangular section, taking into account the time of creation of a constant pressure. In order to investigate and analyze the orthopedic structure, all diagonal components were found to determine the primary and boundary value problems for the momentum equations, which solve analytically semilacial and finite Fourier integral sine transforms. It is believed that the application of the developed model for estimating time and differences depending on the time it takes to reach constant pressure gradients, permeability coefficients, and the angle of inclination in an anisotropic system

*Keywords: mathematical model; porosity; anisotropy; permeability; channel with a rectangular cross-section; viewing time.*

## References

1. Bird R., Stewart W., Lightfoot E. *Transport Phenomena*. N.Y., John Wiley and Sons, 2002.
2. Vafai K. *Handbook of Porous Media*. N.Y., CRC Press, 2016. DOI: 10.1201/b18614
3. Guodong Xia, Lei Cao, Guanglong Bi. A Review on Battery Thermal Management in Electric Vehicle Application. *Journal of Power Sources*, 2017, vol. 367, pp. 90–105. DOI: 10.1016/j.jpowsour.2017.09.046
4. Ellrey J.L., Belmont E.L., Smith C.H. Heat Recirculating Reactors: Fundamental Research and Application. *Progress in Energy and Combustion Science*, 2019, vol. 72, pp. 32–58. DOI: 10.1016/j.pecs.2018.12.001
5. Kolb G. Microstructured Reactors for Distributed and Renewable Production of Fuels and Electrical Energy. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 2013, vol. 65, pp. 1–44. DOI: 10.1016/j.cep.2012.10.015
6. Machmoudi Y., Hooman K., Vafai K. *Convective Heat Transfer in Porous Media*, N.Y., CRC Press, 2019.
7. Lukisha A.P., Prishyakov V.F. The Efficiency of Round Channels Fitted with Porous, Highly Heat-Conducting in Set in a Laminar Fluid Coolant Flow at Boundary Conditions of the Third Kind. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, vol. 53, pp. 2469–2476. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.01.036
8. Yuanwang Deng, Changling Feng, Jiaqiang E, Hao Zhu, Jingwei Chen, Ming Wen, Huichun Yin. Anisotropic Porous Structure Modeling for 3D Printed Objects. *Applied Thermal Engineering*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 157–164. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2018.06.043
9. Machamoudi Y., Karimi N., Mazaheri K. Analytical Investigation of Heat Transfer Enhancement In a Channel Partially Filled with a Porous Material Under Local Thermal Non-Equilibrium Conditions: Effects of Different Thermal Boundary Conditions at the Porous-Fluide Interface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2014, vol. 70, pp. 875–891. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.11.048
10. Saberinejad H., Keshavaz A. Payandehdoost M., Azmoodeh M.R., Batooei A. Numerical Study of Heat Transfer Performance in a Pipe Partially Filled with Non-Uniform Porous Media Under the Condition. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 2018, vol. 28, no. 8, pp. 1845–1855. DOI: 10.1108/HFF-12-2017-0495
11. Penha D.J.Lopez, Stols S., Kuerten J.G.M., Nordlund M., Kuczay A.K., Geurts B.J. Fully-Developed Conjugate Heat Transfer in Porous Media With Uniform Heating. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2012, vol. 38, pp. 94–106. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2012.08.007
12. Xu Chua, Guang Yang, Sandeep Pandey, Bernhard Weiganda. Direct Numerical Simulation of Convective Heat Transfer in Porous Media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, vol. 133, pp. 11–20. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.11.172
13. Gamal A., Furmanski P. Problems of Modeling Flow and Heat Transfer in Porous Media. *Journal of Power Technologies*, 1997, no. 85, pp. 55–88. DOI: 10.1080/00144940.1997.11484129
14. Yuanwang Deng, Changling Feng, Jiaqiang E, Hao Zhu, Jingwei Chen, Ming Wen, Huichun Yin. Effects of Different Coolants and Cooling Strategies on the Cooling Performance of the Power Lithium Ion Battery System: a Review. *Applied Thermal Engineering*, 2018, vol. 142, pp. 10–29. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2018.06.043

15. Chakraborty G. A Note on Methods for Analysis of Flow Through Microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, vol. 51, no. 17–18, pp. 4583–4588. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.11.058
16. Ryazhskikh V.I., Konovalov D.A., Ryazhskikh A.V., Boger A.A., Dakhin A.V. Analytical Solutions to the Problem of Convective Heat Transfer in a Porous Rectangular Channel for Thermal Boundary Conditions of the Second Genus. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 40–53. DOI: 10.14529/mmp170304
17. Gamrat G., Farve-Marinet M., Le Person S. Numerical Study of Heat Transfer Over Banks of Rods in Small Reynolds Number Cross-Flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, vol. 51, no. 3–4, pp. 853–864. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.04.038
18. Benchawan Wiwatanapataphec, Yong Hong Wu, Suharsono Suharsono. Transient flows of Newtonian Fluid Through a Rectangular Microchannel with Slip Boundary. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, article ID: 530605, 13 p.
19. Sefi S., Benissaad S. Heat and Mass Transfer in Anisotropic Porous Media. *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 1, pp. 11–22.
20. Qinzhuo Liao, Gang Lei, Dongxiao Zhang, Shirish Patil. Analytical Solution for Upscaling Hydraulic Conductivity in Anisotropic Heterogeneous Formations. *Advances in Water Resources*, 2019, vol. 128, no. 6, pp. 97–116. DOI: 10.1016/j.advwatres.2019.04.011
21. Ryazhskikh V.I., Gromov Yu.Yu., Ryazhskikh A.V., Khvostov A.A. [Analysis of the Operating Modes of a Closed Circulation Cooling Circuit with an Intermediate Coolant]. *Prikladnaya fizika i matematika* [Applied Physics and Mathematics], 2017, no. 8, pp. 20–26. (in Russian)
22. Izadpanah M.R., Muller-Steinhagen H., Jamilahmadi M. Experimental and Theoretical Studies of Convective Heat Transfer in a Cylindrical Porous Medium. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 1998, vol. 19, no. 6, pp. 629–635. DOI: 10.1016/S0142-727X(98)10035-8
23. Chintsau Hsu, Ping Cheng. Thermal Dispersion in Porous Medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1990, vol. 33, no. 8, pp. 1587–1597. DOI: 10.1016/0017-9310(90)90015-M
24. Soltani H., Ajamin H. Analytical Solution of Forced Convective Heat Transfer in a Horizontal Anisotropic Porous Media Cylinder: Effect of Variatiouse of Frictional Heating and Heat Generation on the Temperature Profile and Nusselt Number. *Biochemical Engineering Journal*, 2014, vol. 28, no. 3, pp. 301–318.
25. Landau L.D., Lifshic E.M. *Teoreticheskaya Fizika. T.VII. Teoriya uprugosti*. [Theoretical Physics. T.VII. Elasticity Theory], Moscow, Nauka, 1987. (in Russian)
26. Ango A. *Matematika dlya elektro-i radio inzhinerov* [Mathematical for Electical and Radio Engineers]. Moscow, Nauka, 1964. (in Russian)
27. Dotsch G. *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der z-transformation*. Wien, Oldenbourg, 1967. (in German)
28. Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. N.Y., McGraw-Hill, 1951.
29. Degan G., Zjhoun S., Vasseur P. Forced Convection in Horizontal Porous Channels with Hydrodynamic Anisotropy. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, vol. 45, pp. 3181–3188.

Received April 20, 2020