

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

С.И. Кадченко¹, А.В. Пуршева², Л.С. Рязанова¹

¹Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова,
г. Магнитогорск, Российская Федерация

²ЗАО «Урал-Омега», г. Магнитогорск, Российская Федерация

В работах авторов были найдены линейные формулы, позволяющие находить приближенные собственные значения дискретных полуограниченных операторов. Используя их можно находить собственные значения дискретных операторов с любым порядковым номером. При этом снимаются многие вычислительные проблемы, возникающие в классических методах связанные с порядковым номером вычисляемых собственных значений и вопросов корректности производимых операций при их нахождении. Сравнение полученных результатов вычислительных экспериментов показали, что собственные значения, найденные по линейным формулам и методом Галеркина, хорошо согласуются. Причем, по мере увеличения порядкового номера собственных значений отличия уменьшаются. Используя линейные формулы, позволяющие вычислять собственные значения дискретных полуограниченных операторов, в статье изложен метод решения обратных спектральных задачах для операторов Штурма – Лиувилля, заданных на последовательных геометрических графах с конечным числом звеньев. Алгоритм апробирован на последовательном двухреберном графе. Результаты многочисленных экспериментов показали хорошую точность и высокую вычислительную эффективность разработанного метода.

Ключевые слова: собственные значения и собственные функции; дискретные и самосопряженные операторы; обратные спектральные задачи; метод Галеркина; некорректно поставленные задачи; интегральное уравнение Фредгольма первого рода; геометрический граф.

Введение

Теория обратных спектральных задач посвящена разработке алгоритмов восстановления значений операторов по их известным спектральным характеристикам. Большой интерес к ним постоянно стимулируется необходимостью решения новых задач в различных разделах естествознания и техники. Важное место при их решении занимают проблемы корректности постановки и поиска наиболее эффективных методов решения. В последнее время разработан ряд методов построения вычислительных алгоритмов численного решения обратных спектральных задач [1, 2]. Однако при численных реализациях алгоритмов возникают серьезные вычислительные трудности [2–6]. Поэтому разработка новых методов и алгоритмов решения обратных спектральных задач, заданных на множествах различной геометрической структуры, представляет большой научный интерес. В данной работе разработаны алгоритмы решения обратных спектральных задач для дискретных полуограниченных операторов, заданных на геометрических графах. Они отличаются от известных алгоритмов простотой выполнения и снимают вычислительные трудности, возникающие в других

методах. Используя идеи, изложенные в работе В.А. Садовниченко, В.В. Дубровского [7] и в статьях [8–12], был разработан численный метод вычисления собственных значений краевой задачи

$$Lu = \mu u, \quad Gu|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

где L – дискретный дифференциальный полуограниченный оператор, заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения $D_L \in H$; Γ – граница области D_L .

Для вычисления собственных значений краевой задачи (1) рассмотрим последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных пространств, которая полна в H . Пусть ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ пространств $H_n \subseteq H$ удовлетворяет однородным граничным условиям задачи (1). Используя метод Галеркина, приближенное решение краевой задачи (1) ищем в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k(n) \varphi_k. \quad (2)$$

Постоянные $a_k(n)$ находятся из требования, чтобы выражение, которое получается после подстановки u_n вместо u в уравнение (1), было ортонормированным к системе функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$.

В работе [13] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Метод Галеркина в применении к задаче нахождения собственных значений спектральной задачи (1), построенный на системе функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходится.*

Теорема 2. *Приближенные собственные значения $\tilde{\mu}_n$ спектральной задачи (1) находятся по линейным формулам*

$$\tilde{\mu}_n(n) = (L\varphi_n, \varphi_n) + \tilde{\delta}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где $\tilde{\delta}_n = \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\mu}_k(n-1) - \tilde{\mu}_k(n)]$, $\tilde{\mu}_k(n)$ – n -е приближение по Галеркину к соответствующим собственным значениям μ_k спектральной задачи (1).

Там же, используя теоремы 1, 2, показано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_n = 0. \quad (4)$$

Многочисленные вычислительные эксперименты по нахождению собственных значений спектральных задач (1) по формулам (3) и методом Галеркина показали, что они хорошо согласуются. Для проверки формул (3), при больших порядковых номерах собственных значений, были рассмотрены две спектральные задачи

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \mu y(x), \quad \mu = \lambda^2 \quad \text{или} \quad \mu = S^2, \quad 0 < x < \pi,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

или

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) - hy(\pi) = 0,$$

для которых известны асимптотические формулы для собственных значений с требованием, чтобы потенциал $q(x)$ удовлетворял условию $\int_0^{\pi} x|q(x)|dx < \infty$. Вычисление показали совпадение с большой точностью всех найденных собственных значений с порядковыми номерами $n \geq 35$.

Чтобы воспользоваться формулами (3) при вычислении собственных значений задачи (1), построим систему координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая бы удовлетворяла граничным условиям (1). Для этого оператор L представим в виде $L = T + P$, где T – самосопряженный дифференциальный оператор такого же порядка, что и оператор L с областью определения D_L . Найдя собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и собственные функции $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ спектральной задачи

$$Tv = \lambda v, \quad Gv|_{\Gamma} = 0, \tag{5}$$

формулы (3) запишем в виде

$$\tilde{\mu}_n(n) = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \tilde{\delta}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

В случае если система собственных функций $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (5) не является ортогональной, необходимо функции v_n разложить в ряды Фурье по системе функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Это позволит воспользоваться формулами (6). Алгоритмы вычисления собственных значений по формулам (6), в силу корректных и несложных вычислений, простые и вычислительно эффективные.

В статьях [14–17] был разработан численный метод решения обратных спектральных задач, позволяющий по известным собственным значениям $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и собственным функциям $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ невозмущенной задачи (5) и известным приближенным значениям $\tilde{\mu}_n$, принадлежащих отрезку $[c, d]$, возмущенной задачи (1), восстанавливать значения неизвестных функций, входящих в оператор L в узлах дискретизации.

Для определенности ограничимся задачами, порожденными дифференциальными операторами, заданными в $L_2[a, b]$, следующего вида

$$Lu \equiv -u'' + p_1(s)u' + p_2(s)u, \quad s \in [a, b].$$

Некоторые функции $p_k(s)$, $k = 1, 2$ могут быть не заданы. Их приближенные значения в узлах дискретизации отрезка $[a, b]$ надо найти при решении соответствующей обратной спектральной задачи с использованием конечно-разностной аппроксимации. Отметим, что описанная ниже методика решения обратных спектральных задач применима к решению и задач, порожденных дифференциальными операторами в частных производных.

На основе формул (6) построим интегральное уравнение Фредгольма первого рода в матричной форме

$$A\hat{P} \equiv \int_a^b \hat{K}(x, s)\hat{P}(s)ds = \tilde{f}(x), \quad x \in [c, d]. \tag{7}$$

Здесь $\widehat{K}(x_n, s) = \left(\varphi_n''(s)\varphi_n(s) \quad \varphi_n'(s)\varphi_n(s) \quad \varphi_n^2(s) \right)$ – матрица-строка, а $\widehat{P}(s) = \begin{pmatrix} -1 \\ p_1(s) \\ p_2(s) \end{pmatrix}$ – матрица-столбец. При этом $\widehat{K}(x, s)$, $\widehat{P}(s)$ и $\widetilde{f}(x)$ такие, что

$$\begin{aligned} \widehat{K}(x_n, s)\widehat{P}(s) &= (L(\varphi_n(s), \varphi_n(s)), \quad a \leq s \leq b, \\ \widetilde{f}(x_n) &= \widetilde{\mu}_n - \lambda_n - \delta_n, \quad c \leq x_n \leq d. \end{aligned} \quad (8)$$

Если для решения \widehat{P} уравнения (7) невязка $\|A\widehat{P} - \widetilde{f}\|_{L_2[c,d]} = 0$, то оно называется точным. Однако такое решение может не существовать или быть не единственным. Поэтому было введено понятие псевдорешения. Решение \widehat{P} уравнения (7) называется псевдорешением, если оно минимизирует невязку $\|A\widehat{P} - \widetilde{f}\|_{L_2[c,d]}$. В дальнейшем под решением интегрального уравнения Фредгольма первого рода (7) будем понимать псевдорешение.

Точные значения правой части уравнения (7) неизвестны, но известны приближенные значения $\widetilde{f}(x)$, такие, что $\|f - \widetilde{f}\|_{L_2[c,d]}^2 \leq \delta$. Пусть ядро $\widehat{K}(x, s)$ интегрального уравнения (7) непрерывно и замкнуто в $\Pi = [c, d] \times [a, b]$ и $\widehat{P}(s) \in W_2^2[a, b]$, $\widetilde{f}(x) \in L_2[c, d]$.

Задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (7) является некорректно поставленной. Ее приближенное решение \widehat{P}_α ищется с помощью метода регуляризации Н.А. Тихонова. Для этого рассмотрим сглаживающий функционал Тихонова

$$\Phi_\alpha[\widehat{P}, f] = \int_a^b (A\widehat{P} - \widetilde{f})^2 ds + \alpha\Omega[\widehat{P}], \quad (9)$$

где $\Omega[\widehat{P}] = \int_a^b [\widehat{P}^T \widehat{P} + \alpha(P')^T P'] ds$ – стабилизирующий функционал, $\alpha > 0$ – параметр регуляризации.

Элемент \widehat{P}_α ищется из условия, что функционал (9) достигает минимальное значение, т.е.

$$\Phi_\alpha[\widehat{P}_\alpha, \widetilde{f}] = \inf_{\widehat{P}_\alpha \in W_2^2} \Phi_\alpha[\widehat{P}_\alpha, \widetilde{f}] \quad (10)$$

при граничных условиях

$$\widehat{P}'_\alpha(a) = \widehat{P}'_\alpha(b) = 0. \quad (11)$$

В работах [18, 19] показано, что если A – линейный, вполне непрерывный оператор, действующий из $W_2^2[a, b]$ в $L_2[c, d]$, то задача (10) имеет единственное решение.

Задачу минимизации функционала (9) можно решать численно, но это сложно реализуется на ЭВМ. Гораздо проще использовать уравнение Тихонова (Эйлера), вытекающее из условия минимума функционала (9).

Если необходимо восстановить значения для одной функции в операторе L в узловых точках дискретизации, используя интегральное уравнение (7), то можно воспользоваться известными классическими алгоритмами. Для случаев нескольких неизвестных функций таких алгоритмов нет.

В данной статье разработаны алгоритмы решения обратных спектральных задач, позволяющие восстанавливать значения неизвестных функций, входящих в дискретный полуограниченный вектор-оператор \mathbf{L} , заданный на геометрическом графе. Алгоритмы восстановления функций используют известные собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ и собственные вектор-функции $\{\varphi_n = (\varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \dots, \varphi_{j_0n})\}_{n=1}^\infty$ вспомогательной задачи для оператора \mathbf{T}

$$T_j \varphi_j = \lambda \varphi_j, \quad \varphi_j = \varphi_j(s_j), \quad j = \overline{1, j_0}, \quad (12)$$

$$d_j \frac{d\varphi_j}{ds_j} \Big|_{s_j=l_j} - d_{j+1} \frac{d\varphi_{j+1}}{ds_{j+1}} \Big|_{s_{j+1}=0} = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{ds_1} \Big|_{s_1=0} = \frac{d\varphi_{j_0}}{ds_{j_0}} \Big|_{s_{j_0}=l_{j_0}} = 0, \quad 1 \leq j < j_0, \quad (13)$$

$$\varphi_j(l_j) = \varphi_{j+1}(0), \quad 1 \leq j < j_0, \quad (14)$$

и известные приближенные собственные значения $\tilde{\mu}_n \in [c, d]$ спектральной задачи

$$(T_j + P_j)u_j = \mu u_j, \quad u_j = u_j(s_j), \quad j = \overline{1, j_0}, \quad (15)$$

$$d_j \frac{du_j}{ds_j} \Big|_{s_j=l_j} - d_{j+1} \frac{du_{j+1}}{ds_{j+1}} \Big|_{s_{j+1}=0} = 0, \quad \frac{du_1}{ds_1} \Big|_{s_1=0} = \frac{du_{j_0}}{ds_{j_0}} \Big|_{s_{j_0}=l_{j_0}} = 0, \quad 1 \leq j < j_0, \quad (16)$$

$$u_j(l_j) = u_{j+1}(0), \quad 1 \leq j < j_0, \quad (17)$$

которую порождает вектор-оператор \mathbf{L} .

1. Постановка задачи

Рассмотрим конечный связанный ориентированный граф $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ с последовательно соединенными ребрами [20–23]. Здесь через $\mathbf{V} = \{V_i\}_{i=1}^{j_0}$ обозначено множество вершин графа \mathbf{G} , а через $\mathbf{E} = \{E_j\}_{j=1}^{j_0}$ – множество его ребер. Каждое ребро E_j имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения $d_j > 0$. Зададим на ребрах \mathbf{E} графа \mathbf{G} вектор-оператор

$$\mathbf{L} = (L_1, L_2, \dots, L_{j_0}), \quad (18)$$

действующий в гильбертовом пространстве

$$\mathbf{H} = L_2(\mathbf{G}) = \{\mathbf{G} = (G_1, G_2, \dots, G_{j_0}), \quad G_j \in L_2(0, l_j), \quad j = \overline{1, j_0}\}$$

со скалярным произведением [23]

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j ds, \quad \mathbf{g}, \mathbf{h} \in H. \quad (19)$$

Здесь L_j – дискретные полуограниченные операторы, заданные в $L_2[0, l_j]$ ($j = \overline{1, j_0}$).

В дальнейшем будем считать, что вектор-оператор \mathbf{L} можно представить в виде $\mathbf{L} = \mathbf{T} + \mathbf{P}$, где $\mathbf{T}\mathbf{u} = (T_1 u_1, T_2 u_2, \dots, T_{j_0} u_{j_0})$, $T_j u_j = -\frac{d^2 u_j}{ds_j^2}$, $\mathbf{P}\mathbf{u} = (P_1 u_1, P_2 u_2, \dots, P_{j_0} u_{j_0})$, $P_j u_j = \sum_{k=1}^2 p_{jk}(s_j) u_j^{(2-k)}$, $s_j \in [0, l_j]$, $j = \overline{1, j_0}$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{j_0})$,

$u_j \in W_2^2[0, l_j]$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции на каждом ребре графа \mathbf{G} . При этом некоторые функции $p_{jk}(s_j)$ ($j = \overline{1, j_0}$, $k = 1, 2$) не заданы. Их приближенные значения в соответствующих узлах дискретизации области \mathbf{E} надо найти при решении обратной спектральной задачи (15) – (17). Условия (16) означают, что поток через каждую вершину равен нулю, а условие (17), что вектор-функция $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{j_0})$ непрерывная во внутренних вершинах графа \mathbf{G} .

Для построения ортонормированной системы $\{\varphi_n = (\varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \dots, \varphi_{j_0n})\}_{n=1}^\infty$ вектор-функций, которая удовлетворяет граничным условиям (16), (17), возьмем прямую спектральную задачу (12) – (14).

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ – собственные значения задачи (12) – (14), занумерованные в порядке неубывания их величин, а $\{\varphi_n = (\varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \dots, \varphi_{j_0n})\}_{n=1}^\infty$ – собственные вектор-функции, соответствующие этим собственным значениям λ_n .

Используя формулы (6) и (19), нетрудно показать, что приближенные собственные значения вектор-оператора \mathbf{L} , действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве $W_2^2(\mathbf{G})$, находятся по формулам:

$$\tilde{\mu}_n(n) = \lambda_n + \sum_{j=1}^{j_0} d_j \chi_j(s) \int_0^{l_j} \varphi_{jn}(s) \sum_{k=1}^2 p_{jk}(s) \varphi_{jn}^{(2-k)}(s) ds + \tilde{\delta}_n, \quad n \in N. \quad (20)$$

Здесь $\tilde{\delta}_n(n) = \sum_{k=1}^{n-1} [\hat{\mu}_k(n-1) - \hat{\mu}_k(n)]$, $\hat{\mu}_k(n)$ – n -ые приближения по Галеркину k -ого собственного значения, $\chi_j(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, l_j], \\ 0, & s \notin [0, l_j]. \end{cases}$ Таким образом, по формуле (20) можно вычислять приближенные собственные значения прямой спектральной задачи (14) – (16), если заданы все функции p_{jk} .

Пусть известны собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ и соответствующие им собственные вектор-функции $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ невозмущенной задачи (12) – (14) и необходимое количество приближенных собственных значений $\tilde{\mu}_n$ возмущенной задачи (15) – (17), принадлежащих отрезку $[c, d]$.

Воспользовавшись линейными формулами (20), запишем интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_0^{l_{max}} \chi_j(s) \sum_{j=1}^{j_0} d_j \sum_{k=1}^2 K_{jk}(x, s) p_{jk}(s) ds = \tilde{F}(x), \quad x \in [c, d], \quad (21)$$

где $K_{jk}(x_n, s_j) = \varphi_{jn}^{(2-k)}(s_j) \varphi_{jn}(x_n)$, $\tilde{F}(x_n) = \tilde{\mu}_n - \lambda_n - \tilde{\delta}_n$, $l_{max} = \max_{1 \leq j \leq j_0} \{l_j\}$. Предположим, что $K_{jk}(x, s_j)$ непрерывны и замкнуты в $\Pi = [c, d] \times [0, l_1] \times \dots \times [0, l_{j_0}]$, $p_{jk}(s_j) \in W_2^2[0, l_j]$ и $\tilde{F}(x) \in L_2[c, d]$.

Запишем интегральное уравнение (21) в матричной форме

$$B(\hat{P}_j) \equiv \int_0^{l_{max}} \sum_{j=1}^{j_0} d_j \hat{K}_j(x, s) \hat{P}_j(s) ds = \tilde{F}(x), \quad x \in [c, d]. \quad (22)$$

Здесь $\widehat{K}_j(x_n, s_j) = \varphi_{jn}(s_j) \begin{pmatrix} \varphi'_{jn}(s_j) & \varphi_{jn}(s_j) \end{pmatrix}$ – матрицы-строки, а $\widehat{P}_j(s) = \begin{pmatrix} \chi_1(s)p_{j1}(s_j) \\ \chi_2(s)p_{j2}(s_j) \end{pmatrix}$ – матрицы-столбцы.

Для построения приближенных решений \widehat{P}_j^α интегрального уравнения (22) методом регуляризации Тихонова воспользуемся сглаживающим функционалом

$$\Phi_\alpha[\widehat{P}_j, \widehat{F}] = \int_0^{l_{max}} \left(B(\widehat{P}_j) - \widehat{F} \right)^2 ds + \alpha \Omega[\widehat{P}_j], \quad (23)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, $\Omega[\widehat{P}_j] = \int_0^{l_{max}} \sum_{j=1}^{j_0} \widehat{P}_j^T \widehat{P}_j + q \widehat{P}'_j{}^T \widehat{P}'_j ds$ – стабилизирующий функционал Тихонова, значение $q \geq 0$ определяет порядок регуляризации, верхний индекс T означает, что матрица транспонированная. При $q = 0$ вместо некорректного уравнения первого рода решается уравнение второго рода, а при $q \neq 0$ – интегро-дифференциальное уравнение.

Приближенное решение \widehat{P}_j^α ищется из условия, что функционал (23) достигает минимального значения, т.е.

$$\Phi_\alpha[\widehat{P}_j^\alpha, \widehat{F}] = \inf_{\widehat{P}_j^\alpha \in W_2^q} \Phi_\alpha[\widehat{P}_j^\alpha, \widehat{F}]. \quad (24)$$

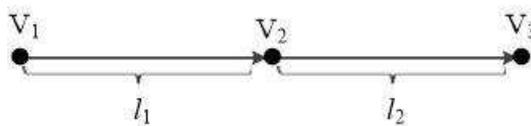
при однородных граничных условиях

$$\widehat{P}'_j^\alpha(0) = \widehat{0}, \quad \widehat{P}'_j^\alpha(l_j) = \widehat{0}, \quad j = \overline{1, j_0}. \quad (25)$$

Для простоты изложения рассмотрим алгоритмы нахождения значений функций $p_{jk}(s_j)$ на примере двухреберного графа.

2. Двухреберный граф

Рассмотрим двухреберный связный ориентированный граф $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ – множество вершин, $\mathbf{E} = \{E_1, E_2\}$ – множество ребер. Каждое ребро имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$, $j = 1, 2$. Пусть на графе \mathbf{G} задана вектор-функция $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, каждая компонента которой $u_j(x_j)$ отвечает соответствующему ребру E_j .



Двухреберный граф $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$

На ребрах \mathbf{E} графа \mathbf{G} зададим линейный оператор

$$\mathbf{L} = \left(-\frac{d^2}{ds_1^2} + p_{12}(s_1), -\frac{d^2}{ds_2^2} + p_{22}(s_2) \right), \quad x_j \in (0, l_j), \quad j = 1, 2,$$

действующий в гильбертовом пространстве

$$\mathbf{H} = L_2(\mathbf{G}) = \{\mathbf{g} = (g_1, g_2), g_j \in L_2(0, l_j), j = 1, 2\}$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \sum_{j=1}^2 d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx, \quad \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbf{G}.$$

Для постановки обратной спектральной задачи на двухреберном графе воспользуемся вышеописанной методикой, полагая в (15) – (17) $k = 2$ и $j_0 = 2$. Тогда для восстановления значений функций $p_{12}(s_1)$ и $p_{22}(s_2)$, заданных на ребрах E_j графа \mathbf{G} , рассмотрим следующие краевые задачи

$$-\frac{d^2 u_j}{ds_j^2} + p_{j2}(s_j)u_j = \mu u_j, \quad u_j = u_j(s_j), \quad s_j \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \quad (26)$$

$$d_1 \frac{du_1}{ds_1} \Big|_{s_1=l_1} - d_2 \frac{du_2}{ds_2} \Big|_{s_2=0} = 0, \quad \frac{du_1}{ds_1} \Big|_{s_1=0} = \frac{du_2}{ds_2} \Big|_{s_2=l_2} = 0, \quad (27)$$

$$u_1(l_1) = u_2(0),$$

и

$$-\frac{d^2 \varphi_j}{ds_j^2} = \lambda \varphi_j, \quad \varphi_j = \varphi_j(s_j), \quad s_j \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \quad (28)$$

$$d_1 \frac{d\varphi_1}{ds_1} \Big|_{s_1=l_1} - d_2 \frac{d\varphi_2}{ds_2} \Big|_{s_2=0} = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{ds_1} \Big|_{s_1=0} = \frac{d\varphi_2}{ds_2} \Big|_{s_2=l_2} = 0, \quad (29)$$

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_2(0).$$

Допустим, что $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ собственные значения прямой задачи (28), (29), занумерованные в порядке неубывания их вещественных частей, а $\{\varphi_n = (\varphi_{1n}, \varphi_{2n})\}_{n=1}^\infty$ – соответствующие им ортонормированные собственные вектор-функции, заданные на ребрах E_j графа \mathbf{G} . Известно, что система собственных вектор-функций $\{\varphi_n = (\varphi_{1n}, \varphi_{2n})\}_{n=1}^\infty$ образует ортонормированный базис в $L_2(\mathbf{G})$.

Согласно теореме 2 приближенные собственные значения $\tilde{\mu}_n(n)$ задачи (26) – (27) находятся по формулам

$$\tilde{\mu}_n(n) = \lambda_n + \sum_{j=1}^2 \int_0^{l_{max}} d_j \chi_j(s) \varphi_{jn}^2(s) p_{j2}(s) ds + \tilde{\delta}_n, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (30)$$

где $l_{max} = \max(l_1, l_2)$, $\chi_j(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, l_j], \\ 0, & s \notin [0, l_j], \end{cases} \quad j = 1, 2.$

По аналогии с построением интегрального уравнения (22) на основе (30) составим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$B(P_j) \equiv \int_0^{l_{max}} \sum_{j=1}^2 K_j(x, s) P_j(s) ds = \tilde{F}(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (31)$$

Здесь $K_j(x_n, s) = d_j \varphi_{jn}^2(s)$, $P_j(s) = \chi_j(s) p_{j2}(s)$, $\tilde{F}(x_n) = \tilde{\mu}_n - \lambda_n - \tilde{\delta}_n$, $j = \overline{1, 2}$.

Допустим, что функции $K_j(x, s)$ непрерывные и замкнутые в $\Pi = [c, d] \times [0, l_1] \times [0, l_2]$, а $F(x) \in L_2[c, d]$, $p_{j2}(s) \in W_2^2[0, l_j]$, $j = 1, 2$.

В этом случае система уравнений, определяющая экстремали $P_j^\alpha(s) = p_{j2}^\alpha(s)$ функционала (23), имеет вид

$$\begin{cases} \alpha \chi_1(t) [p_{12}^\alpha(t) - q(p_{12}^\alpha)''(t)] + \int_0^{l_{max}} [\chi_1(s) R_{11}(s, t) p_{12}^\alpha(s) + \\ \quad + \chi_2(s) R_{21}(s, t) p_{22}^\alpha(s)] ds = F_1(t), \\ \alpha \chi_2(t) [p_{22}^\alpha(t) - q(p_{22}^\alpha)''(t)] + \int_0^{l_{max}} [\chi_1(s) R_{12}(s, t) p_{12}^\alpha(s) + \\ \quad + \chi_2(s) R_{22}(s, t) p_{22}^\alpha(s)] ds = F_2(t), \quad t \in [0, l_1] \cup [0, l_2]. \end{cases} \quad (32)$$

Здесь

$$\int_0^{l_{max}} [R_{mn}(s, t) p_{m2}^\alpha(s) ds = \int_0^{l_{max}} p_{m2}^\alpha(s) ds \left[\int_c^d K_m(x, s) K_n(x, t) dx \right] ds,$$

$$F_m(t) = \int_c^d K_m(x, t) \tilde{F}(x) dx, \quad t \in [a, b], \quad m, n = 1, 2.$$

При проведении численных экспериментов решение $p_{j2}^\alpha(s_j)$ системы линейных уравнений (32) в узлах дискретизации $s_{j_i} \in [0, l_j]$ находятся с использованием метода квадратур.

3. Вычислительный эксперимент

Применим разработанный алгоритм к нахождению численного решения обратной спектральной задачи (26), (27) на двухреберном графе \mathbf{G} . Собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ невозмущенной спектральной задачи (28), (29) являются решениями трансцендентного уравнения

$$d_1 \sin(\sqrt{\lambda} l_1) \cos(\sqrt{\lambda} l_2) + d_2 \sin(\sqrt{\lambda} l_2) \cos(\sqrt{\lambda} l_1) = 0,$$

а соответствующие им собственные вектор-функции $\{\varphi_n = (\varphi_{1n}, \varphi_{2n})\}_{n=1}^\infty$ на ребрах \mathbf{E} графа \mathbf{G} имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{1n} &= C_n \cos(\sqrt{\lambda_n} s_1), \quad 0 \leq s_1 \leq l_1, \quad n = \overline{1, \infty}, \\ \varphi_{2n} &= C_n \left[\cos(\sqrt{\lambda_n} l_1) \cos(\sqrt{\lambda_n} s_2) - \frac{d_1}{d_2} \sin(\sqrt{\lambda_n} l_1) \sin(\sqrt{\lambda_n} s_2) \right], \quad 0 \leq s_2 \leq l_2. \end{aligned}$$

Множители C_n находятся из условия нормировки вектор-функций системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$.

Для восстановления приближенных значений функций p_{j2} , $j = \overline{1, 2}$ используется система (32), которая решается численно с использованием конечно-разностных аппроксимаций. Для выбора параметра регуляризации α использовался обобщенный принцип невязки.

В табл. 1, 2 приведены результаты вычислительного эксперимента по восстановлению потенциалов $p_1(s) = \sin(2s + 1)$, $p_2(s) = \cos(s) + 2s + \exp(s)$ в узловых точках

Таблица 1

Первое ребро

n	s_n	$p_1(s_n)$	$p_1^\alpha(s_n)$	$ p_1(s_n) - p_1^\alpha(s_n) $	ζ_n
0	0,0	0,84147	0,64134	0,20014	$2,2 \cdot 10^{-8}$
1	0,1	0,93204	0,87571	0,05633	$1,8 \cdot 10^{-8}$
2	0,2	0,98545	1,02457	0,03912	$2,3 \cdot 10^{-8}$
3	0,3	0,99957	1,09542	0,09585	$8,4 \cdot 10^{-9}$
4	0,4	0,97385	1,09204	0,11820	$4,7 \cdot 10^{-9}$
5	0,5	0,90930	1,01590	0,10661	$6,4 \cdot 10^{-9}$
6	0,6	0,80850	0,87278	0,06428	$3,2 \cdot 10^{-9}$
7	0,7	0,67546	0,67612	0,00066	$2,2 \cdot 10^{-9}$
8	0,8	0,51550	0,44588	0,06962	$3,1 \cdot 10^{-9}$
9	0,9	0,33499	0,20449	0,13050	$1,6 \cdot 10^{-9}$
10	1,0	0,14112	-0,02752	0,16844	$1,3 \cdot 10^{-9}$
11	1,1	-0,05837	-0,23460	0,17623	$1,4 \cdot 10^{-9}$
12	1,2	-0,25554	-0,40764	0,15210	$7,2 \cdot 10^{-10}$
13	1,3	-0,44252	-0,54397	0,10145	$3,5 \cdot 10^{-10}$
14	1,4	-0,61186	-0,64638	0,03453	$4,6 \cdot 10^{-10}$
15	1,5	-0,75680	-0,72127	0,03554	$3,7 \cdot 10^{-10}$
16	1,6	-0,87158	-0,77623	0,09535	$2,3 \cdot 10^{-10}$
17	1,7	-0,95160	-0,81798	0,13362	$1,1 \cdot 10^{-10}$
18	1,8	-0,99369	-0,85176	0,14193	$2,5 \cdot 10^{-11}$
19	1,9	-0,99616	-0,88211	0,11395	$6,3 \cdot 10^{-11}$
20	2,0	-0,95892	-0,91321	0,04572	$3,3 \cdot 10^{-11}$

Таблица 2

Второе ребро

n	s_n	$p_1(s_n)$	$p_1^\alpha(s_n)$	$ p_1(s_n) - p_1^\alpha(s_n) $	ζ_n
0	0,0	2,00000	2,04572	0,04572	$2,0 \cdot 10^{-11}$
1	0,1	2,30018	2,34553	0,04536	$8,7 \cdot 10^{-12}$
2	0,2	2,60147	2,61968	0,01821	$1,5 \cdot 10^{-11}$
3	0,3	2,90520	2,88565	0,01954	$1,6 \cdot 10^{-11}$
4	0,4	3,21289	3,16003	0,05286	$2,5 \cdot 10^{-11}$
5	0,5	3,52630	3,45523	0,07107	$1,9 \cdot 10^{-12}$
6	0,6	3,84745	3,77866	0,06879	$4,5 \cdot 10^{-11}$
7	0,7	4,17859	4,13380	0,04479	$3,4 \cdot 10^{-11}$
8	0,8	4,522255	4,52437	0,00212	$2,9 \cdot 10^{-11}$
9	0,9	4,88121	4,96041	0,07919	$1,0 \cdot 10^{-10}$
10	1,0	5,25858	5,45872	0,20013	$4,9 \cdot 10^{-11}$

дискретизации при следующих значениях параметров задачи (15) – (17): $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$.

В таблицах 1, 2 величины $\zeta_n = |\tilde{F}(x_n) - \int_0^{l_{max}} \sum_{j=1}^2 K_j(x_n, s) P_j^\alpha(s) ds|$ определяют поточечную абсолютную погрешность приближенного решения $P_j^\alpha(s)$. Невязка полученного решения равна $\zeta = \|\tilde{F}(x_n) - B(P_j^\alpha)\|_{L_2[c,d]} = 1,765 \cdot 10^{-15}$. Параметр регуляризации $\alpha = 6,11 \cdot 10^{-9}$ был вычислен методом обобщенной невязки.

Заключение

Проведенные вычислительные эксперименты по восстановлению приближенных значений p_{j2}^α функций p_{j2} , $j = \overline{1, 2}$, заданных на двухребенном геометрическом графе в узлах дискретизации по известным собственным значениям $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, собственным вектор-функциям $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ невозмущенной задачи (28), (29) и известным приближенными значениям $\tilde{\mu}_n \in [c, d]$ спектральной задачи (26), (27), показали высокую вычислительную эффективность разработанной методики решения обратных спектральных задач для возмущенных самосопряженных операторов, заданных на геометрических графах. Надо отметить, что методику восстановления вектор-оператора \mathbf{L} можно перенести на случай последовательного графа с любым конечным числом звеньев.

Литература

1. Марченко, В.А. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля / В.А. Марченко. – Киев: Наукова думка, 1972.
2. Юрко, В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач / В.А. Юрко. – М.: Физматлит, 2007.
3. Yurko, V.A. Methods of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory / V.A. Yurko. – Utrecht: VSP, 2002.
4. Chadan, K. An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems / K. Chadan, D. Colton, L. Hfivarinta, W. Rundell. – Philadelphia: SSSIAM, 1997.
5. Fabiano, R.H. A Finite-Difference Algorithm for an Inverse Sturm – Liouville Problem / R.H. Fabiano, R. Knobel, B.D. Lowe // IMA Journal of Numerical Analysis. – 1995. – V. 15. – P. 75–88.
6. Paine, J.W. On the Sturm – Liouville Problems / J.W. Paine, F. de Hoog, R.S. Anderssen // Computing. – 1981. – V. 26. – P. 123–139.
7. Садовничий, В.А. Замечание об одном методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – Т. 17. – 1994. – С. 244–248.
8. Кадченко, С.И. Метод регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2009. – № 37 (170), вып. 4. – С. 4–23.
9. Кадченко, С.И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуграниченных операторов / С.И. Кадченко, И.И. Кинзина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 7. – С. 1265–1273.
10. Кадченко, С.И. Вычисление спектральных характеристик возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – М.: РАН, ВИНТИ. – 2017. – № 141. – С. 59–77.

11. Dubrovskii, V.V. Computation of the First Eigenvalues of a Discrete Operator / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 4–9.
12. Dubrovskii, V.V. A New Method for Approximate Evaluation of the First Eigenvalues in the Orr–Zommerfeld Eigenvalue Problem / V.V. Dubrovskii, S.I. Kadchenko, V.F. Kravchenko, V.A. Sadovnichii // Doklady Mathematics. – 2001. – Т. 63, № 3. – С. 355–358.
13. Kadchenko, S.I. A Numerical Method for Inverse Spectral Problem / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 3. – С. 116–126.
14. Кадченко, С.И. Численные методы решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами, методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестник Самарского Университета. Естественно-научная серия. – 2013. – № 6 (107). – С. 23–30.
15. Кадченко, С.И. Решение обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами / С.И. Кадченко, Г.А. Закирова, А.И. Кадченко // Математические методы в технике и технологиях. – 2016. – № 9. – С. 8–11.
16. Кадченко, С.И. Алгоритмы решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами / С.И. Кадченко // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования. – 2015. – Т. 3. – С. 138–141.
17. Кадченко, С.И. Численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами / С.И. Кадченко // Вестник Самарского университета. Естественно-научная серия. – 2013. – № 9. – С. 5–11.
18. Гончарский, А.В. Численные методы решения обратных задач астрофизики / А.В. Гончарский, А.М. Черепашук, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1978.
19. Тиханов, А.В. Методы решения некорректных задач / А.В. Тиханов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979.
20. Пенкин, В.Л. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / В.Л. Пенкин, В.Л. Пряднев. – М.: Физматгиз, 2004.
21. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск, 2002. – С. 221–225.
22. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференциальные уравнения – 2006. – Т. 12, № 1. – С. 126–131.
23. Баязитова, А.А. Задача Штурма – Лиувилля на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Вестник ЮрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16, вып. 192. – С. 4–10.

Сергей Иванович Кадченко, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика», Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова (г. Магнитогорск, Российская Федерация), sikadchenko@mail.ru.

Анастасия Викторовна Пуршева, ЗАО «Урал-Омега» (г. Магнитогорск, Российская Федерация), avpursheva@gmail.com.

Любовь Сергеевна Рязанова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика», Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова (г. Магнитогорск, Российская Федерация), ryazanovals23@gmail.com.

Поступила в редакцию 16 августа 2020 г.

SOLUTION OF INVERSE SPECTRAL PROBLEMS FOR DISCRETE SEMI-BOUNDED OPERATORS GIVEN ON GEOMETRIC GRAPHS*S.I. Kadchenko*¹, *A.V. Pursheva*², *L.S. Ryazanova*¹¹Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation²CJSC “Ural-Omega”, Magnitogorsk, Russian Federation

E-mails: sikadchenko@mail.ru, avpursheva@gmail.com, ryazanovals23@gmail.com

Using the numerical method of regularized traces and the Galerkin method, linear formulas were previously obtained for calculating the approximate eigenvalues of discrete semi-bounded operators. These formulas can be used to find approximate eigenvalues of discrete operators with any ordinal number without using the previous eigenvalues. It removes many of the computational difficulties arising in other methods. The comparison of the results of computational experiments showed that the eigenvalues found by both linear formulas and the Galerkin method are in a good agreement. On the basis of linear formulas for calculating the eigenvalues of discrete semi-bounded operators, we describe a numerical method for solving inverse spectral problems given on sequential geometric graphs with a finite number of links. The method allows to recover the values of unknown functions included in the operators at the discretization nodes using the eigenvalues of the operators and the spectral characteristics of the corresponding self-adjoint operators. We construct an algorithm for solving inverse spectral problems given on sequential geometric graphs with a finite number of links, and test the algorithm on a sequential two-edge graph. The results of numerous experiments shown good accuracy and a high computational efficiency of the developed method.

Keywords: eigenvalues and eigenfunctions; discrete and self-adjoint operators; inverse spectral problem; Galerkin method; ill-posed problems; Fredholm integral equation of the first kind; geometric graph.

References

1. Marchenko V.A. *Spektral'naja teorija operatorov Shturma–Liuvillja* [The Spectral Theory of Sturm–Liouville Operators]. Kiev, Naukova dumka, 1972. (in Russian)
2. Yurko V.A. *Vvedenie v teoriju obratnykh spektral'nykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems]. Moscow, Fizmatlit, 2007. (in Russian)
3. Yurko V.A. *Methods of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Utrecht, VSP, 2002. DOI: 10.1515/9783110940961
4. Chadan K., Colton D., Hfivarinta L., Rundell W. *An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems*. Philadelphia, SIAM, 1997. DOI: 10.1137/1.9780898719710
5. Fabiano R.H., Knobel R., Lowe B.D. A Finite-Difference Algorithm for an Inverse Sturm–Liouville Problem. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1995, vol. 15, pp. 75–88. DOI: 10.1093/imanum/15.1.75
6. Paine J.W., de Hoog F., Anderssen R.S. On the Sturm–Liouville Problems. *Computing*, 1981, vol. 26, pp. 123–139. DOI: 10.1007/BF02241779
7. Sadovnichiy V.A., Dubrovskiy V.V. [Remark on a New Method of Calculation Eigenvalues and Eigenfunctions for Discrete Operators]. *Proceedings of the Seminar Named After I.G. Petrovsky*, 1994, no. 17, pp. 244–248. (in Russian)

8. Kadchenko S.I. [Method of Regularized Traces]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2009, no. 37 (170), issue 4, pp. 4–23. (in Russian)
9. Kadchenko S.I., Kinzina I.I. Computation of Eigenvalues of Perturbed Discrete Semibounded Operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 7, pp. 1200–1206. DOI: 10.1134/S0965542506070116
10. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. Calculation of Spectral Characteristics of Perturbed Self-Adjoint Operators by Methods of Regularized Traces. *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 241, pp. 59–77. (in Russian) DOI: 10.1007/s10958-019-04446-z
11. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. Computation of the First Eigenvalues of a Discrete Operator. *Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 1998, vol. 3, no. 2, p. 4. (in Russian)
12. Dubrovskii V.V., Kadchenko S.I., Kravchenko V.F., Sadovnichii V.A. A New Method for Approximate Evaluation of the First Eigenvalues in the Orr–Zommerfeld Eigenvalue Problem. *Doklady Akademii Nauk*, 2001, vol. 378, pp. 443–446.
13. Kadchenko S.I., Zakirova G.A. Calculation of Eigenvalues of Discrete Semibounded Differential Operators. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 38–47. DOI: 10.14529/jcem170104
14. Kadchenko S.I. [Numerical Method for the Solution of Inverse Problems Generated by Perturbations of Self-Adjoint Operators by Method of Regularized Traces]. *Bulletin of Samara State University. Natural Science Series*, 2013, no. 6 (107), pp. 23–30. (in Russian)
15. Kadchenko S.I., Zakirova G.A., Kadchenko A.I. [Solution of Inverse Spectral Problems Generated by Perturbed Self-Adjoint Operators]. *Mathematical Methods in Engineering and Technology*, 2016, no. 9 (91), pp. 8–11. (in Russian)
16. Kadchenko S.I. [Algorithms for Solving Inverse Problems Generated by Perturbed Self-Adjoint Operators]. *Actual Problems of Modern Science, Technology and Education*, 2015, vol. 3, pp. 138–141. (in Russian)
17. Kadchenko S.I. [A Numerical Method for Solving Inverse Spectral Problems Generated by Perturbed Self-Adjoint Operators]. *Bulletin of Samara State University. Natural Science Series*, 2013, no. 9-1 (110), pp. 5–11. (in Russian)
18. Goncharskij A.V., Cherepashhuk A.M., Jagola A.V. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Astrophysics*. Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)
19. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for Solving Ill-Posed Problems*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)
20. Penkin V.L., Pryadnev V.L. *Differencial'nye uravnenija na geometricheskikh grafah* [Differential Equations on Geometric Graphs]. Moscow, Fizmatgiz, 2004. (in Russian)
21. Sviridyuk G.A. Sobolev-Type Equations on Graphs. *Nonclassical Equations of Mathematical Physics. Collection of Scientific Papers*, Novosibirsk, 2002, pp. 221–225. (in Russian)
22. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. *Hoff Equations on Graphs*. *Differential Equations*, 2006, vol. 42 (1), pp. 139–145. DOI: 10.1134/S0012266106010125
23. Bayazitova A.A. The Sturm–Liouville Problem on Geometric Graph. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2010, no. 16 (192), issue 5, pp. 4–10. (in Russian)

Received August 16, 2020