

АЛГОРИТМ РЕКОНСТРУКЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В РЕНТГЕНОВСКОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ С КОНУСНЫМ ПУЧКОМ ИЗЛУЧЕНИЯ

Е.Н. Симонов¹, А.В. Прохоров¹

¹Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

Разработан алгоритм реконструкции трехмерных изображений для рентгеновской компьютерной томографии с конусным пучком излучения. Алгоритм основан на точном аналитическом представлении трехмерного преобразования Радона проекционных данных. Для такого представления введена итерационно-инвариантная функция рассеяния точки (ФРТ). Предложенный алгоритм преодолевает главный недостаток приближенных алгоритмов – обеспечивает достаточно высокое качество получаемых изображений даже при больших углах конуса излучения, что проявляется в сравнительно небольшом числе артефактов изображения. Проведена оценка качества реконструируемых томографических изображений.

Ключевые слова: рентгеновская компьютерная томография; двухмерное и трехмерное преобразование Радона; трехмерные алгоритмы реконструкции изображения в конусном пучке излучения.

Введение

Современный этап развития рентгеновской компьютерной томографии (КТ) характеризуется переходом от классического послойного двумерного исследования объекта к трехмерному. Эта тенденция подразумевает переход от линейки детекторов к двумерному массиву детекторов, от круговой траектории движения источника рентгеновского излучения к спиральной траектории, от веерной геометрии сбора данных к конусной. Так как общая формулировка задачи осталась неизменной – восстановление функции по ее интегралам вдоль прямых – подходы к решению трехмерной задачи схожи с теми, что применяются в классической двумерной КТ [1–3].

Один из первых трехмерных алгоритмов реконструкции был предложен в Фельдкампом [4, 5]. В нем производится построчная фильтрация сверткой, подобно тому, как это делается в классической двумерной КТ с веерной схемой сканирования, а полная геометрия конусной схемы учитывается только на этапе вычисления обратной проекции. Алгоритм дает приближенное решение для круговой траектории, обеспечивает хорошее качество восстановления, но не учитывает угол конуса (с увеличением угла растут ошибки реконструкции), требует больших затрат времени компьютерного счета, хотя и превосходит по скорости классический подход и некоторые итерационные методы.

В связи с этим было предложено несколько модификаций алгоритма Фельдкамп. Так в [6] предложен алгоритм, получивший название обобщенной параллельной обратной проекции (EPBP – extended parallel backprojection). От классического алгоритма Фельдкамп этот метод отличается применением перепаковки к параллельным данным с детекторов и тем, что его применение не ограничено плоскими траекториями движения. Альтернативой алгоритмам, основанным на методе Фельдкамп,

служит модернизированный алгоритм однослойной перепаковки (ASSR – advanced single-slice rebinning) [7]. Приемлемое решение задачи трехмерной реконструкции по конусным проекциям приведено в [8]. Представленный алгоритм достаточно теоретически точен, имеет структуру FBP-алгоритма (FBP – filtered backprojection), точно основан на связи между преобразованием в конусе лучей, прямом и обратном преобразовании Радона в трехмерном пространстве. Однако этот алгоритм является сложным, громоздким для вычислений и также он является приближенным. Альтернативой FBP-алгоритмам может служить подход, описанный в [7], где применению взвешенной обратной проекции конусного пучка предшествует операции фильтрации, устраняющей размытости на изображении. В работах авторов [2, 3, 9–11] дан подробный анализ вышеперечисленным подходам.

В настоящей работе рассматривается новый подход в разработке алгоритма прямой реконструкции трехмерных изображений. Он является точным аналитическим подходом. Разработан вычислительный алгоритм, реализация его опробована на математической модели объекта.

1. Подходы к решению задачи трехмерной реконструкции изображений по конусным проекциям

Для точного восстановления трехмерной функции $\mu(\mathbf{r})$ (для рентгеновского излучения это линейный коэффициент ослабления), $\mathbf{r} = (x, y, z)$ по данным конусных проекций необходимо, чтобы они удовлетворяли условию полноты Кириллова – Смита – Туя [12–15]. Для этого необходимо, чтобы каждая плоскость, проходящая через исследуемый объект, по крайней мере, один раз должна пересекать траекторию движения источника излучения. Примеры схем сканирования с траекторией движения источника, удовлетворяющих этому условию: спиральная, две окружности, окружность и прямая, две окружности, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях [4, 8, 16].

Математически задачу можно определить, как поиск функции объекта μ из уравнения лучевой суммы

$$g(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} \mu(\mathbf{s} + t\mathbf{u}) dt, \quad (1)$$

которое описывает интегрирование по линии с началом в точке \mathbf{s} и в направлении $\mathbf{u} \subset S^2$, где S^2 находится в единичной сфере R^3 . Формула (1) описывает геометрию трехмерной визуализации $\mu(\mathbf{r})$ по проекциям $g(\mathbf{s}, \mathbf{u})$, где вектор $\mathbf{s} \subset R^3$ представляет положение источника на орбите; $\mathbf{s} + t\mathbf{u}$ – уравнение прямой в векторно-параметрическом виде (рис. 1).

Одним из путей обращения интеграла выражения (1) является применение трехмерного преобразования Радона, согласно которому [16]

$$P(\mathbf{n}, s) = \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}) \delta(s - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{r}, \quad (2)$$

где δ – дельта-функция, символ \cdot обозначает скалярное произведение, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + s = 0$ – векторное уравнение плоскости.

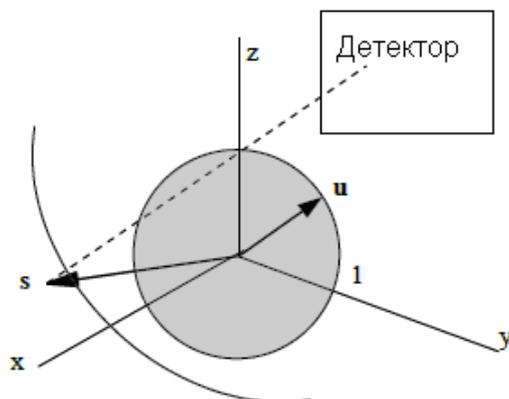


Рис. 1. Геометрия сканирования конусным пучком. Множество функции $\mu(\mathbf{r})$ объекта показано в виде шара с единичным радиусом серого цвета. Положение источника на пути вокруг объекта задано вектором \mathbf{s} . Интеграл взят вдоль пунктирной линии, которая параллельна вектору \mathbf{u} . Проекции конусного пучка собраны вращением вектора \mathbf{u}

В выражении (2) понимается, что преобразование Радона проводится в каждой точке s вектора \mathbf{s} .

Предлагаемый нами подход к разработке аналитического алгоритма трехмерной реконструкции, в отличие от классических ГВР-алгоритмов, сначала выполняет операцию обратного проецирования и затем фильтрацию. Алгоритм может быть описан двумя шагами:

1. Определяется обратная проекция $\mu_s(\mathbf{r})$ по прямой проекции $g(\mathbf{s}, \mathbf{u})$, т.е. $g(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \rightarrow \mu_s(\mathbf{r})$, где $\mu_s(\mathbf{r})$ – не фильтрованные значения восстанавливаемого параметра объекта.
2. Осуществляется фильтрация обратной проекции $\mu_s(\mathbf{r})$, т.е. $\mu_s(\mathbf{r}) \rightarrow \mu(\mathbf{r})$.

На втором шаге алгоритма вводится уравнение визуализации, которое позволяет рассматривать задачу реконструкции, как задачу восстановления изображения с инвариантной к сдвигу функцией рассеяния точки.

2. Алгоритм трехмерной реконструкции изображений по конусным проекциям для спиральной траектории источника излучения

Общий подход, рассмотренный выше, представим для спиральной траектории источника излучения (рис. 2), где R_m – радиус объекта исследования, R_D – расстояние от центра вращения (расположен на оси Z) до детектора \mathbf{D} . Источник движется вдоль спирали, ось которой лежит на оси Z . При этом плоскость детектора \mathbf{D} всегда остается параллельной ей.

Если принять R – радиус спирали, $d/2\pi$ – ее шаг, то параметрическое уравнение такой спирали имеет вид

$$\mathbf{S}(\alpha) = (R \cos \alpha, R \sin \alpha, d\alpha)^T, \quad (3)$$

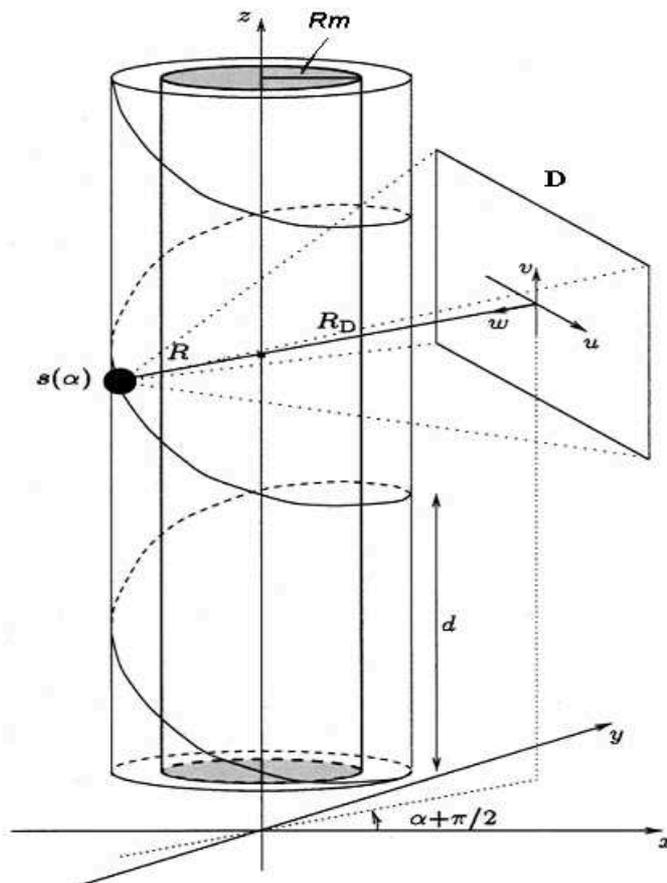


Рис. 2. Геометрия спирального сканирования с конусным пучком излучения

где α угол поворота источника излучения вокруг оси Z , или в координатах XYZ .

$$S(\alpha) = (x, y, z)^T.$$

Используя уравнение спирали (3), можно переписать основное уравнение (1) в форме преобразования с конусным пучком излучения

$$g(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} \mu(\mathbf{s}(\alpha) + t\mathbf{u}) dt, \alpha \in \Theta, \mathbf{u} \in S^2 \quad (4)$$

на спиральной орбите $s(\alpha)$, Θ изменяется от 0 до 2π .

Рассмотрим преобразование рентгеновского излучения

$$\hat{\mu}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\mathbf{s}(\alpha) + t\mathbf{u}) dt, \quad (5)$$

где интегрирование проводится по всей линии, проходящей через точку $s(\alpha)$.

Сравнивая уравнения (4) и (5), мы можем написать

$$\hat{\mu}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u}) = g(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u}) + g(\mathbf{s}(\alpha), -\mathbf{u}). \quad (6)$$

Для определения алгоритма реконструкции изображения используем дельта-функцию, которая позволяет переписать (5) в форме

$$\widehat{\mu}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha) - t\mathbf{u}) d\mathbf{r} dt = \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha) - t\mathbf{u}) dt d\mathbf{r}. \quad (7)$$

Обозначим обратную проекцию (изображение) через $\widetilde{\mu}_s(\mathbf{r})$, которая может быть определена усреднением значений преобразования рентгеновского излучения в точке \mathbf{r}

$$\widetilde{\mu}_s(\mathbf{r}) = \int_{\alpha} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|} \widehat{\mu}(\mathbf{s}(\alpha), \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|}) d\alpha. \quad (8)$$

Связь между $\widetilde{\mu}_s(\mathbf{r})$ и проекцией $g(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u})$ может быть определена подстановкой уравнения (6) в (8)

$$\widetilde{\mu}_s(\mathbf{r}) = \int_{\alpha} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|} g(\mathbf{s}(\alpha), \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|}) d\alpha, \quad (9)$$

где предположили, что орбита источника лежит на поверхности, которая полностью покрывает объект исследования.

По формуле (9) возможно получение не фильтрованного изображения низкого качества. Для получения фильтрованного изображения $\mu(\mathbf{r})$ необходимо к уравнению (9) применить один из методов регуляризации, например, через фильтрующее ядро – функцию рассеяния точки (ФРТ), используя фильтрующее свойство дельта-функции. Для этого вставим уравнение (7) в уравнение (8)

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_s(\mathbf{r}) &= \int_{\alpha} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|} \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}') \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(\alpha) - t \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|}) dt d\mathbf{r}' d\alpha = \\ &= \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}') \int_{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha) - t'(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt' d\alpha d\mathbf{r}', \quad (10) \end{aligned}$$

где мы использовали замену переменных $t' = t/|r - s(\alpha)|$. Необходимо заметить, что весовой коэффициент $1/|r - s(\alpha)|$ в (10) был исключен заменой переменных.

Интеграл по t' уравнения (10) может быть представлен как

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha) - t(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r} + \mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha) - t(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r} - (t - 1)(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + t'(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt, \quad (11) \end{aligned}$$

что дает интегральное уравнение

$$\tilde{\mu}(\mathbf{r})_s = \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}') h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (12)$$

с ядром

$$h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt d\alpha. \quad (13)$$

Функцию $h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ можно интерпретировать, как произвольную ФРТ для точки \mathbf{r}_0 системы визуализации с конусным пучком излучения. Рассмотрим ФРТ (13) в координатах осей XYZ . Перепишем уравнение (15), используя параметрическое уравнение спирали (3)

$$h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_0 + t(x - R \cos \alpha)) \times \delta(y_0 + t(y - R \sin \alpha)) \times \delta(z_0 + t(z - R d \alpha)) dt d\alpha. \quad (14)$$

Произведение дельта-функций в (14) понимается, как трехмерная дельта функция. Дельта-функция используется, как математическое описание точечного источника сигнала, а ФРТ понимается, как идеальное описание точечного значения $\tilde{\mu}(\mathbf{r})_s$.

Внутренний интеграл выражения (14) можно представить, как

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_0 + t(x - R \cos \alpha)) \delta(y_0 + t(y - R \sin \alpha)) \times \delta(z_0 + t(z - d \alpha)) dt = \\ & = \delta((y - R \sin \alpha) - x_0(x - R \cos \alpha) y_0) \delta(z_0 - \frac{z - d \alpha}{y - R \sin \alpha} y_0). \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом (15) выражение (14) может быть представлено, как

$$\begin{aligned} h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = & \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}} \int_{\theta} \delta(z_0 - \frac{z - d \alpha}{y - R \sin \alpha} y_0) \times \\ & \times \delta\left(\frac{(y - R \sin \alpha) x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}} - \frac{(x - R \cos \alpha) y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}}\right) d\alpha, \end{aligned} \quad (16)$$

где мы имеем умноженный и деленный аргумент второй дельта-функции на $(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$.

В работе [16] показано, что если $R > 1$ (радиус спирали R взят в относительных единицах при радиусе объекта исследования $R_m = 1$), т.е. радиус вращения источника гораздо больше пути сферического множества искомой функции $\mu(\mathbf{r})$, то ФРТ (16) можно заменить на выражение

$$\tilde{h}_s(\mathbf{r}) = \frac{2}{R} \frac{\delta(z_0)}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}}, \quad (17)$$

которое описывает приближение к ФРТ.

Используя функцию $\tilde{h}_s(\mathbf{r}_0)$ вместо ФРТ $\tilde{h}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ в (12), мы можем последнюю преобразовать в свертку. Наличие дельта-функции $\delta(z_0) = \delta(z - z_0)$ в (17) означает, что 3D фильтрация сокращается до 2D фильтрации поперечных плоскостей. Поэтому к уравнению (12) может быть применено преобразование Фурье, как к уравнению свертки

$$\tilde{\mu}_s(w_x, w_y, z) = \bar{\mu}(w_x, w_y, z)\tilde{H}_s(w_x, w_y), \quad (18)$$

где $\bar{\mu}_s(w_x, w_y, z)$, $\bar{\mu}(w_x, w_y, z)$ – преобразование Фурье с пространственными частотами w_x и w_y соответственно, $\mu_s(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$, $\tilde{H}_s(w_x, w_y)$ – преобразование Фурье функции (17)

$$\tilde{H}_s(w_x, w_y) = \frac{2}{R} \frac{2\pi}{(w_x^2 + w_y^2)^{1/2}}. \quad (19)$$

Весовой коэффициент в (10), если имеем неравенство $R > 1$, будет равен

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|} = \frac{1}{(R^2 + (z - d\alpha)^2)^{1/2}}. \quad (20)$$

Влияние коэффициента $2/R$ может быть убрано из выражения (19) и вставлено в весовой коэффициент (20), тогда

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|} = \frac{R}{2(R^2 + (z - d\alpha)^2)^{1/2}}. \quad (21)$$

3. Вычислительный алгоритм трехмерной реконструкции изображений по конусным проекциям

Учитывая выше представленные выкладки, алгоритм трехмерной реконструкции изображения для конусного пучка рентгеновского излучения может представлен следующими шагами:

1. Определение взвешенной обратной проекции $\tilde{\mu}_s(\mathbf{r})$ по прямым проекциям $g(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha))$, используя выражения (9) и (21)

$$\tilde{\mu}_s(\mathbf{r}) = \frac{R}{2} \int_{\alpha} = \frac{1}{(R^2 + (z - d\alpha)^2)^{1/2}} g\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|}, \alpha\right) d\alpha. \quad (22)$$

2. Фильтрация взвешенной обратной проекции $\tilde{\mu}_s(\mathbf{r})$ (22).

2.1. Определение прямого преобразования Фурье взвешенной обратной проекции

$$\tilde{\mu}_s(w_x, w_y, z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mu}_s \exp(-i(w_x x + w_y y)) dx dy. \quad (23)$$

2.2. Определение прямого преобразования Фурье искомой обратной проекции из выражения (18)

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(w_x, w_y, z) &= \tilde{\mu}_s(w_x, w_y, z) \frac{1}{\tilde{H}_s(w_x w_y)} = \\ &= \tilde{\mu}_s(w_x, w_y, z) \frac{R(w_x^2 + w_y^2)^{1/2}}{2 \cdot 2\pi} = \tilde{\mu}_s(w_x, w_y, z) I_s(\sqrt{w_x^2 + w_y^2}) W(\sqrt{w_x^2 + w_y^2}), \end{aligned} \quad (24)$$

где обратный фильтр $\frac{1}{\tilde{H}_s(w_x w_y)}$ ФРТ представлен в виде произведения собственно обратного фильтра $I_s(\rho) = \frac{\rho}{2\pi}$, где $\rho^2 = w_x^2 + w_y^2$, и «окна» фильтрации $W(\rho)$, ограничивающего для повышения устойчивости алгоритма реконструкции высокие частоты объекта [1].

Для примера мы можем использовать «окно» Хемминга

$$W(\rho) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos(\pi\rho/w_{cp}), & \text{при } \rho \leq w_{cp}, \\ 0, & \text{при } \rho \geq w_{cp}, \end{cases} \quad (25)$$

где w_{cp} – частота среза.

2.3. Определение искомой обратной проекции через обратное преобразование Фурье выражения (24)

$$\mu(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mu}(w_x, w_y, z) \exp(i(w_x x + w_y y)) dw_x dw_y. \quad (26)$$

4. Результаты математического моделирования алгоритма трехмерной реконструкции изображений по конусным проекциям

Для моделирования алгоритма трехмерной реконструкции изображений по конусным проекциям была разработана математическая модель фантома, физический образ которого представлен на рис. 3. Размер матрицы изображения задавался 512×512 пикселей, размер куба значений $\mu(x, y, z) - 512 \times 512 \times 512$ вокселей, количество единичных детекторов (отсчетов) в матрице детекторов – $N \times N = 512 \times 512$, количество ракурсов облучения объекта исследования – $M = 300$, шаг спирали $d = 0,5$ мм, т.е. количество шагов $L = 90$.

Для заданного фантома были смоделированы проекционные данные (прямые проекции) для рентгеновских лучей

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha)) = -\ln \left(\frac{I(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha))}{I_0} \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{s(\alpha)} ds \right)_{r, s(\alpha)}, \quad (27)$$

где логарифм определен согласно закону Бугера – Ламберта – Бера при поглощении монохроматического рентгеновского луча в объекте исследования

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha)) = I_0 \exp \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{s(\alpha)} ds \right)_{r, s(\alpha)}, \quad (28)$$

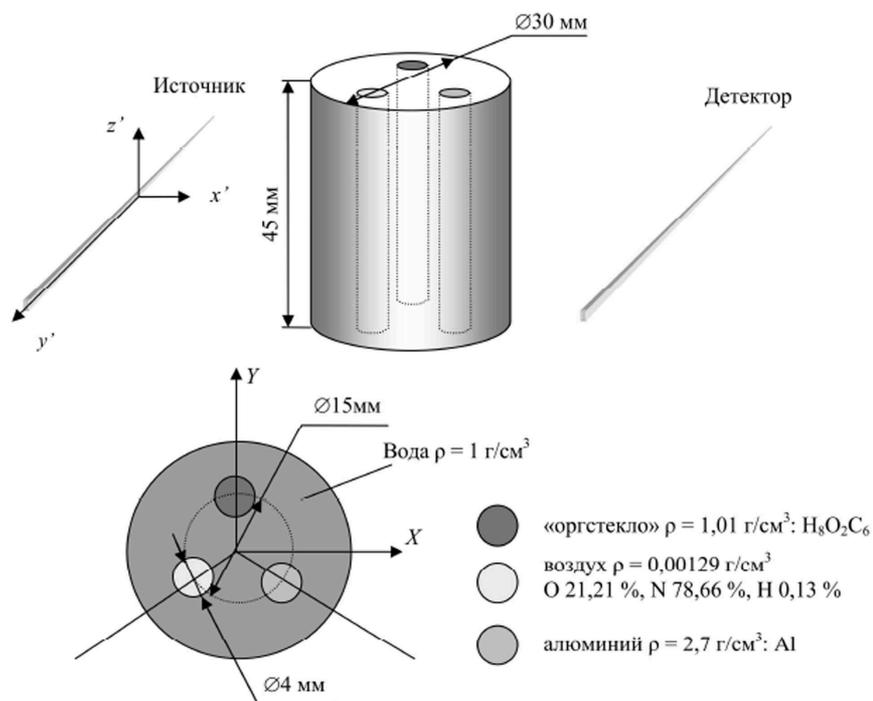


Рис. 3. Фантом

I_0 – интенсивность входящего луча рентгеновского излучения в объект исследования, ds – элементарное расстояние, которое проходит луч через вещество по прямой, соединяющей источник \mathbf{s} и точку объекта исследования \mathbf{r} , $\mu_{\mathbf{s}(\alpha)}$ – линейный коэффициент ослабления рентгеновского излучения на элементарном расстоянии при ракурсе облучения объекта α . Интеграл (27) есть лучевая сумма для общего ее выражения по (1). В результате моделирования проекционных данных были получены:

- трехмерная матрица проекционных данных $g(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha))$ размером $N \times N \times M$ для одного шага спирали,
- четырехмерная матрица проекционных данных размером $N \times N \times M \times L$ для L шагов спирали.

Моделирование трехмерного алгоритма осуществлялось в среде Matlab, которая эффективно осуществляет матричные вычисление интегралов, дифференциалов, прямого и обратного одномерного и двухмерного преобразования Фурье, одномерной и двухмерной свертки, одномерного и двухмерного преобразования Радона с задаваемыми одномерными, двухмерными и трехмерными матрицами переменных. По проекционным данным $g(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha))$ в соответствии с вычислительным алгоритмом (п. 4) проводилась реконструкция значений $\mu(\mathbf{r})$ модели фантома.

На рис. 4 представлены томограммы модели фантома для четырех шагов спирали при соотношении $R/R_m = 6$.

Качество изображения томограмм достаточно высокое, что показывает хорошую устойчивость разработанного трехмерного алгоритма. Ошибка моделирования сечений фантома (мера различия идеального фантома и его модели) определялась по

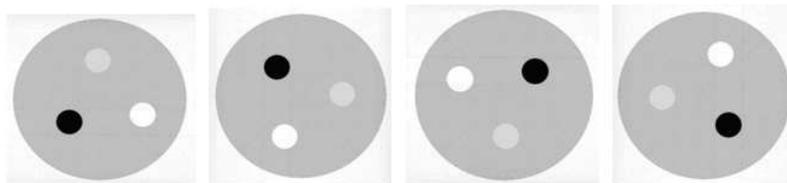


Рис. 4. Томограммы модели фантома, полученные при реконструкции по трехмерному алгоритму

формуле, как среднеквадратическая ошибка

$$d_1 = \left(\frac{\sum_i^k (t_i - h_i)^2}{\sum_i^\mu t_i^2} \right)^{1/2}, \quad (29)$$

где t_i , и h_i – значения серо-белого линейного коэффициента ослабления рентгеновского излучения μ i -го значения профиля идеального фантома и его модели, соответственно; k – количество значений профиля. Мера различия $d_1 = 0,026$ или 2,6%.

Погрешности реконструкции по методу Фельдкампфа, полученной в работе [16] (погрешность 2,7%), и разработанного алгоритма практически одинаковы. Было проведено исследование влияние расстояния источника излучения от центра координат по отношению к радиусу объекта исследования для значений R/R_m , равных 1,5; 3,0; 6,0; 12,0. Для этого была разработана математическая модель фантома в форме шара, состоящего из отдельных равномерных эллиптических пластин (эллипсоидов) одинаковой плотности (рис. 5).

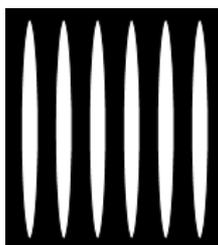


Рис. 5. Сечение математической модели фантома по плоскости $z = 0$

На рис. 6 представлены томограммы фантома, реконструируемые по трехмерному алгоритму пп. 4, 5, для значений R/R_m , равных 12,0; 6,0; 3,0; 1,5.

Ошибка реконструкции (мера различия изображения сечения модели фантома и реконструированного изображения) определялась по формуле, как среднеквадратическая ошибка [17]

$$d = \left(\frac{\sum_i^\xi \sum_j^\xi (t_{i,j} - h_{i,j})^2}{\sum_i^\xi \sum_j^\xi t_{i,j}^2} \right)^{1/2}, \quad (30)$$

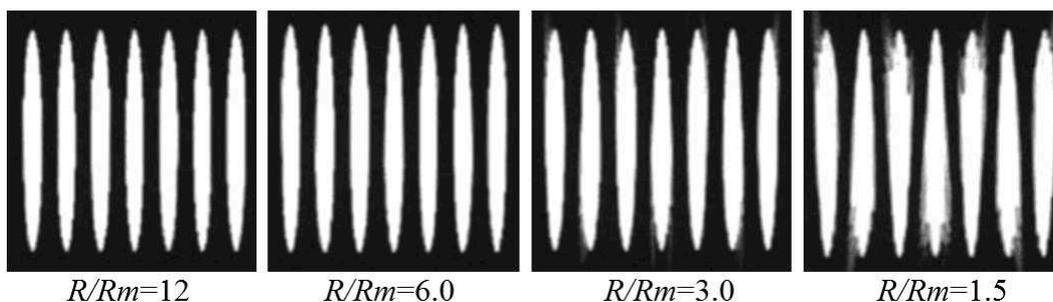


Рис. 6. Реконструируемые изображения пластинчатого фантома

где $t_{i,j}$ и $h_{i,j}$ – значения серо-белого коэффициента ослабления рентгеновского излучения μ i -го пикселя в j -ой строке матрицы изображений модели и реконструкции, соответственно; матрицы изображений имеют размер $\xi \times \xi$. Мера различия d для различных значений R/R_m представлена в таблице.

Таблица

Мера различия d

Мера различия d	$R/R_m = 12,0$	$R/R_m = 6,0$	$R/R_m = 3,0$	$R/R_m = 1,5$
	1,9%	2,7%	4,7%	8,9%

Реконструированные изображения пластинчатого фантома показывают, что разработанный трехмерный алгоритм для спирального сканирования объекта исследования дает хорошие результаты уже для значений R/R_m , равных около 3,0, т.е. при достаточно больших углах конуса излучения источника. Для значений R/R_m менее 3,0 появляются артефакты на изображении, что наблюдается на томограмме пластинчатого фантома при $R/R_m = 1,5$.

Выводы

1. Показано, что задача трехмерной реконструкции в конусном пучке характеризуется итерационно-инвариантной функцией рассеяния точки (ФРТ).
2. Для вывода приближения в форме уравнения свертки было предположено, что источник излучения находится относительно далеко от объекта исследования. Итерационно-инвариантная ФРТ может быть сокращена до ядра свертки.
3. Использование специально выбранного весового коэффициента в обратной проекции дает нам возможность упростить выражение ФРТ и фильтра реконструкции. Формула для такой фильтрации обратной проекции дана в области Фурье в форме 2D поперечного фильтра.
4. Выполнено математическое моделирование разработанного алгоритма трехмерной реконструкции для спиральной траектории источника излучения, получены удовлетворительные результаты на модели фантома, имитирующего объект исследования с контрастными вставками.
5. В отличие от приближенного алгоритма Фельдкампса представленный подход позволяет иметь любую траекторию источника, в том числе спиральную, которая лежит на цилиндре, охватывающем объект.

Литература

1. Симонов, Е.Н. Физика визуализации изображений в рентгеновской компьютерной томографии / Е.Н. Симонов. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2014.
2. Симонов, Е.Н. К вопросу разработки методов реконструкции изображений в рентгеновской компьютерной томографии с конусным пучком излучения / Е.Н. Симонов, М.В. Аврамов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2015. – Т. 15, № 4. – С. 58–66.
3. Симонов, Е.Н. Анализ трехмерных алгоритмов реконструкции в рентгеновской компьютерной томографии / Е.Н. Симонов, М.В. Аврамов, Д.В. Аврамов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2017. – Т. 17, № 2. – С. 24–32.
4. Календер, В. Компьютерная томография основы, техника, качество изображений и области клинического использования / В. Календер. – М.: Техносфера, 2006.
5. Feldkamp, L.A. Practical Cone-Beam Algorithm / L.A. Feldkamp, L.C. Davis, J.W. Kress // Journal of the Optical Society of America A. – 1984. – № 2. – С. 612–614.
6. Kachelrie, M. Extended Parallel Backprojection for Standard Three-Dimensional and Phase-Correlated Four-Dimensional Axial and Spiral Cone-Beam CT with Arbitrary Pitch, Arbitrary Cone-Angle, and 100% Dose Usage / M. Kachelrie, M. Knaup, W.A. Kalender // Medical Physics. – 2004. – V. 31, № 1. – P. 1623–1641.
7. Kachelrie, M. Advanced Single-Slice Rebinning in Cone-Beam Spiral CT / M. Kachelrie, S. Schaller, W.A. Kalender // Medical Physics. – 2001. – V. 27, № 4. – P. 1033–1041.
8. Katsevich, A. A General Scheme for Constructing Inversion Algorithms for Cone Beam CT / A. Katsevich // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2003. – № 21. – P. 1305–1321.
9. Симонов, Е.Н. К вопросу получения объемных изображений в рентгеновской компьютерной томографии / Е.Н. Симонов, Д.В. Аврамов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2015. – Т. 15, № 4. – С. 50–57.
10. Симонов, Е.Н. Метод объемного рендеринга для визуализации трехмерных данных в рентгеновской компьютерной томографии / Е.Н. Симонов, М.В. Аврамов, Д.В. Аврамов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2016. – Т. 16, № 4. – С. 5–12.
11. Simonov, E. Review of Image Reconstruction Methods in X-Ray Computed Tomography with Cone-Beam Geometry / E. Simonov, M. Avramov // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление и радиоэлектроника. – 2018. – Т. 18, № 2. – С. 29–37.
12. Smith, B.D. Cone-Beam Tomography: Recent Advances and Tutorial Review / B.D. Smith // Optical Engineering. – 1991. – № 29. – С. 524–534.
13. Bronnikov, V. Wavelet-Based Image Enhancement in X-Ray Imaging and Tomography / V. Bronnikov, G. Duifhuis // Applied Optics. – 1998. – № 37. – С. 4437–4448.
14. Kirillov, A. On a Problem of I.M. Gelfand / A. Kirillov // Доклады академии наук СССР. Серия: Математика. – 1961. – № 2. – С. 268–269.
15. Tuy, Heang K. An Inversion Formula for Cone-Beam Reconstruction / Heang K. Tuy // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1983. – № 43. – С. 546–552.
16. Bronnikov, A.V. Cone-Beam Reconstruction by Backprojection and Filtering / A.V. Bronnikov // Journal of the Optical Society of America A. – 2000. – V. 17, № 11. – P. 1993–2000.

17. Хермен, Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии / Г. Хермен. – М: Мир, 1983.

Евгений Николаевич Симонов, доктор технических наук, профессор кафедры «Техника, технология и строительство», Институт открытого и дистанционного образования (ИОДО), Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), e.n.simonov@yandex.ru.

Александр Владимирович Прохоров, кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Современные образовательные технологии», Институт открытого и дистанционного образования (ИОДО), Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), prokhorovav@susu.ru.

Поступила в редакцию 28 марта 2020 г.

MSC 68X00

DOI: 10.14529/mmp210108

ALGORITHM OF RECONSTRUCTION OF THREE-DIMENSIONAL IMAGES IN X-RAY COMPUTED TOMOGRAPHY WITH A CONE BEAM

E. Simonov¹, A.V. Prokhorov¹

¹South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mails: e.n.simonov@yandex.ru, prokhorov@bk.ru

An algorithm for reconstructing three-dimensional images for X-ray computed tomography with a cone beam of radiation is developed. The algorithm is based on an accurate analytical representation of the three-dimensional Radon transformation of the projection data. For this representation, an iteration-invariant point scattering function (FRT) is introduced. The proposed algorithm overcomes the main drawback of approximate algorithms-it provides a sufficiently high quality of the obtained images even at large angles of the radiation cone, which is manifested in a relatively small number of image artefacts. The quality of the reconstructed tomographic images was evaluated.

Keywords: x-ray computed tomography; two-dimensional and three-dimensional Radon transformation; three-dimensional image reconstruction algorithms in a cone beam of radiation.

References

1. Simonov E.N. *Fizika vizualizacii izobrazhenij v rentgenovskoj komp'yuternoj tomografii* [Physics of Image Visualization in X-Ray Computed Tomography]. Chelyabinsk, Publishing Center of SUSU, 2014. (in Russian)
2. Simonov E.N., Avramov M.V. [On the Development of Methods for Image Reconstruction in X-Ray Computed Tomography with a Cone Beam of Radiation]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technology, Automatic Control, Radio Electronics*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 58–66. (in Russian) DOI: 10.14529/ctcr150406
3. Simonov E.N., Avramov M.V., Avramov D.V. [Analysis of Three-Dimensional Reconstruction Algorithms in X-Ray Computed Tomography]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technology, Automatic Control, Radio Electronics*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 24–32. (in Russian) DOI: 10.14529/ctcr170202

4. Kalender V. *Kompyuternaya tomografiya osnovy, tekhnika, kachestvo izobrazhenij i oblasti klinicheskogo ispolzovaniya* [Computed Tomography Fundamentals, Technique, Image Quality and Clinical Applications]. Moscow, Tekhnosfera, 2006. (in Russian)
5. Feldkamp L.A., Davis L.C., Kress J.W. Practical cone-Beam Algorithm. *Journal of the Optical Society of America A*, 1984, no. 2, pp. 612–614.
6. Kachelrie M., Knaup M., Kalender W.A. Extended Parallel Backprojection for Standard Three-Dimensional and Phase-Correlated Four-Dimensional Axial and Spiral Cone-Beam Ct with Arbitrary Pitch, Arbitrary Cone-Angle, and 100% Dose Usage. *Medical Physics*, 2004, vol. 31, no. 1. pp. 1623–1641.
7. Kachelrie M., Shaller M., Kalender W.A. Advanced Single-Slice Rebinning in Cone-Beam Spiral CT. *Medical Physics*, 2001, vol. 27, no. 4. pp. 1033–1041.
8. Katsevich A. A General Scheme for Constructing Inversion Algorithms for Cone Beam CT. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003, no. 21, pp. 1305–1321.
9. Simonov E.N., Avramov D.V. *K voprosu polucheniya obemnykh izobrazhenij v rentgenovskoy komp'yuternoy tomografii* [On the Issue of Obtaining Volumetric Images in X-Ray Computed Tomography]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technology, Automatic Control, Radio Electronics*, 2015. vol. 15, no. 4, pp. 50–57. (in Russian)
10. Simonov E.N., Avramov M.V., Avramov D.V. [Volumetric Rendering Method for Visualizing Three-Dimensional Data in X-Ray Computed Tomography]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technology, Automatic Control, Radio Electronics*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 5–12. (in Russian) DOI: 10.14529/ctcr160401
11. Simonov E.N., Avramov M.V. Review of Image Reconstruction Methods in X-Ray Computed Tomography with Cone-Beam Geometry. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technology, Automatic Control, Radio Electronics*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 29–37. (in Russian) DOI: 10.14529/ctcr180203
12. Smith B.D. Cone-Beam Tomography: Recent Advances and Tutorial Review. *Optical Engineering*, 1991, no. 29, pp. 524–534.
13. Bronnikov V., Duifhuis G. Wavelet-Based Image Enhancement in X-Ray Imaging and Tomography. *Applied Optics*, 1998, no. 37, pp. 4437–4448.
14. Kirillov A. On a Problem of I.M. Gelfand. *Doklady Akademii Nauk SSSR: Mathematics*, 1961, no. 2, pp. 268–269.
15. Tuy Heang K. An Inversion Formula for Cone-Beam Reconstruction. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1983, no. 43, pp. 546–552.
16. Bronnikov A.V. Cone-Beam Reconstruction by Backprojection and Filtering. *Journal of the Optical Society of America A*, 2000, vol. 17, no. 11, pp. 1993–2000.
17. Hermen G. *Vosstanovlenie izobrazhenij po proekciyam: Osnovy rekonstruktivnoj tomografii* [Reconstruction of Images from Projections: Fundamentals of Reconstructive Tomography]. Moscow, Mir, 1983. (in Russian)

Поступила в редакцию 28 марта 2020 г.