

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ АНАЛИЗА ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ РАВНОВЕСИЙ ОРБИТАЛЬНОГО ГИРОСТАТА

А.В. Банциков, Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация

С помощью разработанного на базе пакета компьютерной алгебры *Mathematica* прикладного программного обеспечения исследована динамика вращательного движения по круговой орбите спутника-гиростата в ньютоновском центральном поле сил. Предполагая неустойчивость потенциальной системы, в пространстве введенных параметров найдены области с четной степенью неустойчивости по Пуанкаре. Рассмотрен вопрос о возможности гироскопической стабилизации неустойчивых относительных положений равновесия гиростата, когда вектор гиростатического момента системы лежит в одной из плоскостей, формируемых главными центральными осями инерции. Результаты исследования получены в символьном (аналитическом) виде на компьютере и путем проведения численного эксперимента с графической интерпретацией.

Ключевые слова: гироскопическая стабилизация; степень неустойчивости; системы неравенств; символьно-численное моделирование.

Введение

Классическая задача о влиянии структуры сил на устойчивость равновесий [1] механических систем начала развитие с 19-го века. Тем не менее, интерес к задаче не ослабевает и по настоящее время (см., например, [2]). В работе в качестве приложений использования пакета (системы) компьютерной алгебры (ПКА) исследуется динамика конкретной механической системы, а именно возможность гироскопической стабилизации неустойчивых равновесий спутника-гиростата, центр масс которого движется по круговой орбите с постоянной угловой скоростью.

Устойчивость относительных положений равновесия гиростата (с осесимметричным и произвольным эллипсоидом инерции) рассматривалась во многих публикациях. Так, например, в [3] находятся области в пространстве параметров, в которых имеется различное число положений равновесия системы, и анализируются достаточные условия их устойчивости по Ляпунову. Стабилизация равновесий по линеаризованным уравнениям возмущенного движения, представленная здесь, продолжает и дополняет исследования, выполненные ранее автором для осесимметричного гиростата (см., например, [4]).

1. Символьная модель и условия устойчивости

Для кинематического описания движения в центре масс вводятся две системы координат: орбитальная (ОСК) и жестко связанная с корпусом гиростата (ССК). Оси ССК направлены по главным центральным осям инерции. При определении взаимного расположения осей ОСК и ССК используются направляющие косинусы (см., например, [5]), задаваемые самолетными углами α, β, γ . Ниже A, B, C – моменты

инерции системы относительно осей ССК; h_j – проекции вектора гиростатического момента системы, деленные на ω (модуль орбитальной угловой скорости).

Программный комплекс (ПК), используемый в работе, предназначен для получения нелинейных и линеаризованных дифференциальных уравнений движения механических систем в символьном (аналитическом) виде на компьютере. Это ППО, функциональное описание и технология применения которого приведены в [6], представляет собой набор программ, написанных на языке программирования ПКА *Mathematica* и выполняемых в режиме интерпретации.

Рассмотрим положение относительного равновесия гиростата (состояния покоя относительно ОСК $\dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = 0$) в общем виде:

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \quad \beta = \beta_0 = \text{const}, \quad \gamma = \gamma_0 = \text{const}. \quad (1)$$

С помощью ПК получены: лагранжиан системы, нелинейные уравнения движения, а также условия существования равновесия (1).

Линеаризованные уравнения возмущенного движения в окрестности (1) имеют следующий вид:

$$M \ddot{q} + G \dot{q} + K q = 0, \quad (2)$$

где $q = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})^T$ – вектор отклонений координат от невозмущенного движения (1); M – симметричная положительно-определенная матрица кинетической энергии; G – кососимметричная матрица гироскопических сил; K – симметричная матрица потенциальных сил. Производные в (2) вычисляются по безразмерному времени $\tau = \omega t$. Структура и явный вид элементов матриц M, G, K , а также условия существования равновесия (1) представлены в [7].

Характеристическое уравнение системы (2): $\det(M\lambda^2 + G\lambda + K) = v_3\lambda^6 + v_2\lambda^4 + v_1\lambda^2 + v_0 = 0$ содержит λ в четных степенях. Алгебраические условия, обеспечивающие существование вещественных отрицательных корней относительно λ^2 (необходимые условия устойчивости), образуют систему неравенств:

$$\begin{cases} v_3 \equiv \det M > 0, & v_2 > 0, & v_1 > 0, & v_0 \equiv \det K > 0, \\ Dis \equiv v_2^2 v_1^2 - 4v_1^3 v_3 - 4v_2^3 v_0 + 18v_3 v_2 v_1 v_0 - 27v_0^2 v_3^2 > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Подчеркнем, что символьная линеаризация нелинейных уравнений движения в окрестности (1) (т.е. построение элементов матриц M, G, K из (2) в аналитическом виде), получение коэффициентов v_i и дискриминанта Dis из (3) проведены с помощью ПК.

2. Параметрический анализ условий устойчивости

2.1. Исследуемые положения равновесия

В [5] с использованием алгоритмов построения базисов Гребнера определены все равновесные ориентации для трех частных случаев, связанных с расположением вектора гиростатического момента системы. Например, в случае $h_3 = 0, h_1 \neq 0, h_2 \neq 0$ (вектор находится в плоскости Oxy) существуют положения равновесия [7]:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 = \pi/2, & \gamma = \gamma_0 = 0, \\ \beta = \beta_0 = \text{const} : & h_2 \sin \beta_0 - \cos \beta_0 (h_1 + 4(A - B) \sin \beta_0) = 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 = 0, & \gamma = \gamma_0 = 0, \\ \beta = \beta_0 = \text{const} : & h_2 \sin \beta_0 - \cos \beta_0 (h_1 + (A - B) \sin \beta_0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Перейдем к параметризации задачи. Не нарушая общности, пусть $h_i > 0$, $i = 1, 2$, и для определенности $B > A > C$. Введем безразмерные параметры:

$$H_1 \equiv h_1/B; \quad H_2 \equiv h_2/B; \quad J_A \equiv A/B; \quad J_C \equiv C/B; \quad p_c \equiv \cos \beta_0; \quad p_s \equiv -\sin \beta_0. \quad (6)$$

Значения параметров лежат в интервалах:

$$H_i > 0, i = 1, 2; \quad 1/2 < J_A < 1, \quad 1 - J_A < J_C < J_A; \quad -1 < p_c < 1, \quad (p_c \neq 0, p_s \neq 0). \quad (7)$$

2.2. Гироскопическая стабилизация равновесия (4)

Используя (6), разрешим уравнение из (4) относительно H_1 : $H_1 = p_s (4(J_A - 1) - H_2/p_c)$. С учетом последнего соотношения, уравнения движения (2) для равновесия (4) через параметры (6) имеют матрицы

$$M = \begin{pmatrix} p_c^2 + p_s^2 J_A & 0 & -p_s J_A \\ 0 & J_C & 0 \\ -p_s J_A & 0 & J_A \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2(J_A - 1)p_c p_s & 0 \\ 2(J_A - 1)p_c p_s & 0 & H_2 - (J_C + J_A - 1)p_c \\ 0 & (J_C + J_A - 1)p_c - H_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$K = \begin{pmatrix} 3(J_C - p_s^2 - J_A p_c^2) & 0 & -3(J_C - 1)p_s \\ 0 & K_{22} & 0 \\ -3(J_C - 1)p_s & 0 & K_{33} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $K_{22} = 4(1 - J_A)p_c^2 + H_2/p_c$; $K_{33} = (1 - J_C)(2(p_c^2 - p_s^2) - 1) + H_2 p_c$.

Параметр p_s присутствует в коэффициентах характеристического уравнения системы только в четных степенях. Его исключаем, учитывая $p_c^2 + p_s^2 = 1$. Выпишем эти коэффициенты, зависящие от четырех параметров J_A, J_C, p_c, H_2 в явной форме:

$$v_2 = H_2^2 (J_A - (J_A - 1)p_c^2) + H_2 p_c ((J_A - 1)p_c^2 (6J_A + J_C - 2) - J_A (6J_A + J_C - 7)) +$$

$$+ p_c^2 (-(J_A - 1)p_c^2 (2(3J_A + 1)J_C + (1 - 3J_A)^2 - 3J_C^2) +$$

$$+ J_C (J_A (3J_A - 2) - 3) + 9J_A (J_A - 1)^2 + 3J_C^2);$$

$$v_1 = H_2^2 (J_A + 3J_C - 3 - 4(J_A - 1)p_c^2) + H_2 p_c (J_A (22 - 19J_C) - 3J_A^2 - 3(J_C - 7)(J_C - 1) +$$

$$+ (J_A - 1)p_c^2 (6J_A + 19J_C - 26)) + p_c^2 ((J_A - 1)p_c^2 (6J_A (5 - 7J_C) + 9J_A^2 - 3J_C^2 + 34J_C - 31) +$$

$$+ 3(J_C - 1)(J_C (3J_A - 2) + 9(J_A - 1)^2));$$

$$v_3 \equiv \det M = J_A J_C p_c^2; \quad v_0 \equiv \det K = 3(H_2 - 4(J_A - 1)p_c^3) *$$

$$* (H_2 (J_C - 1 - (J_A - 1)p_c^2) + p_c (J_C - 1) (4(J_A - 1)p_c^2 - 3J_A - J_C + 4)). \quad (9)$$

Исходя из классических теорем Томсона – Тета – Четаева [1], изучение вопроса об устойчивости начинается с анализа матрицы потенциальных сил. Главный диагональный минор первого порядка матрицы K из (8) на интервалах (7) отрицателен. Следовательно, матрица потенциальных сил не является положительно-определенной и равновесие (4) будет неустойчиво. Из теоремы о влиянии гироскопических сил следует, что гироскопическая стабилизация (ГС) возможна только для систем с четной степенью неустойчивости (ЧСН). Четность (нечетность) степени неустойчивости по Пуанкаре соответствует положительности (отрицательности) определителя матрицы потенциальных сил.

Поставим вопрос о возможности ГС неустойчивого равновесия (4) при условии $\det K > 0$. С помощью функции ПКА *Mathematica*:

$$\text{Reduce}[\{1/2 < J_A < 1, 1 - J_A < J_C < J_A, -1 < p_c < 1, p_c \neq 0, H_2 > 0, \det K > 0\}, \\ \{J_A, J_C, p_c, H_2\}, \text{Reals}],$$

предназначенной для поиска символьного (аналитического) решения системы неравенств, получена область с ЧСН. В силу громоздкости этого решения его представление здесь опущено. Анализ полученного решения позволяет сделать следующий вывод

Предложение 1. Область с ЧСН для равновесия (4) при значениях параметров J_A, J_C из (7) лежит в плоскости («прямоугольник без границ»): $-1 < p_c < 0 \wedge 0 < H_2 < 2$.

Для установления свойства ГС определим, в какой части области с ЧСН выполняются оставшиеся неравенства из (3). Получить аналитическое решение для всей системы неравенств (3) (с коэффициентами $v_i, i = \overline{0,3}$ из (9)) не удастся в силу большого числа параметров и сложности анализируемых полиномиальных выражений. Поэтому, для упрощения исследования, перейдем к символьно-численному анализу при фиксированных значениях одного или двух параметров. Например, пусть $J_A = 51/100$ и $J_C = 1/2$. Используя функцию *RegionPlot* из ПКА *Mathematica* для графического 2D-представления решения системы неравенств, построим области с ЧСН и ГС положения равновесия (4) в плоскости параметров p_c, H_2 :

$$\text{RegionPlot}[-1 < p_c < 0 \wedge 0 < H_2 < 2 \wedge v_0 > 0 \wedge v_1 > 0 \wedge v_2 > 0 \wedge \text{Dis} > 0, \\ \{p_c, -1, 0\}, \{H_2, 0, 2\}].$$

Полученный результат показан на рис. 1. Светлая часть заштрихованной области на рисунке – это область с ЧСН. Более темная ее часть показывает где возможна ГС. Вне выделенных областей система имеет нечетную степень (т.е. $\det K < 0$) и равновесие (4) неустойчиво.

Замечено, что при увеличении значения параметра J_A в интервале из (7) область ГС сужается и перестает существовать, начиная с $J_A = 4/5$.

Подводя общий итог символьно-численного моделирования, можно сформулировать

Предложение 2. Неустойчивое равновесие (4) может быть стабилизировано гироскопическими силами. Стабилизация возможна только для значений параметров (6) из интервалов: $1/2 < J_A < 4/5 \wedge 1 - J_A < J_C < J_A \wedge -1 < p_c < 0 \wedge 0 < H_2 < 2$.

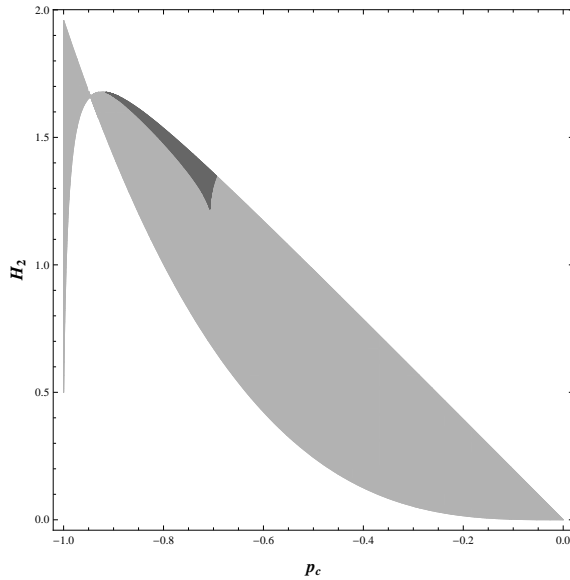


Рис. 1. Области с ЧСН и ГС равновесия (4) при $J_A = 51/100$, $J_C = 1/2$

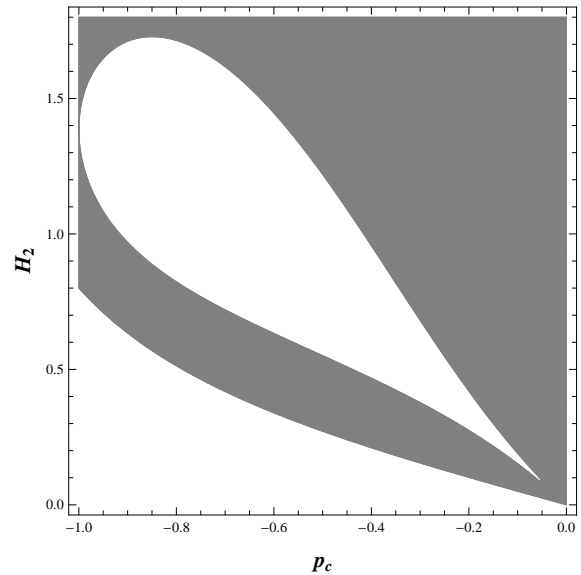


Рис. 2. Область ГС равновесия (5) при $J_A = 9/10$, $J_C = 4/5$

2.3. Гироскопическая стабилизация равновесия (5)

Алгоритм исследования сводится к повторению шагов, изложенных в предыдущем пункте, с соответствующими изменениями.

Матрица потенциальных сил для равновесия (5) имеет вид:

$$K = \begin{pmatrix} 3(p_s^2 + J_A p_c^2 - J_C) & 0 & 3(J_C - 1)p_s \\ 0 & H_2/p_c - (J_A - 1)p_c^2 & 0 \\ 3(J_C - 1)p_s & 0 & H_2 p_c - (J_C - 1)(p_c^2 + 3) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Установлено, что первый элемент матрицы K из (10) на интервалах (7) всегда положителен. Исходя из структуры матрицы K , область с ЧСН существует только при одновременном выполнении условий $K_{22} < 0$ и $\det K > 0$. В этом случае равновесие (5) будет неустойчиво. Решение, удовлетворяющее последним неравенствам, найдено с помощью вышеупомянутой функции *Reduce* и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & 1/2 < J_A < 1 \wedge 1 - J_A < J_C < J_A \wedge -1 < p_c < 0 \wedge \\ & \wedge H_2 > \frac{p_c (J_C - 1) (4J_C - J_A (p_c^2 + 3) + p_c^2 - 1)}{J_C - 1 - (J_A - 1) p_c^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу причин, указанных в пункте 2.2, пусть $J_A = 9/10$ и $J_C = 4/5$. Подставим эти значения в полученные для решения (5) коэффициенты и дискриминант характеристического уравнения. Область гироскопической стабилизации в плоскости параметров p_c , H_2 получена с помощью функции

$$\begin{aligned} & \text{RegionPlot}[-1 < p_c < 1 \wedge p_c \neq 0 \wedge H_2 > 0 \wedge K_{22} < 0 \wedge \det K > 0 \wedge \\ & \wedge v_1 > 0 \wedge v_2 > 0 \wedge \text{Dis} > 0, \{p_c, -1, 0\}, \{H_2, 0, 1.8\}] \end{aligned}$$

и представлена заштрихованной частью на рис. 2. В результате доказано следующее

Предложение 3. *Неустойчивое равновесие (5), значения параметров которого принадлежат области (11), может быть стабилизировано гироскопическими силами.*

Важно заметить, что вопрос о возможности гироскопической стабилизации не всегда решается положительно. Например, в [7] для случая $h_2 = 0$, $h_1 \neq 0$, $h_3 \neq 0$ рассмотрена устойчивость положения равновесия:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 = 0, & \gamma = \gamma_0 = \pi/2, \\ \beta = \beta_0 = \text{const} : & h_1 \cos \beta_0 + \sin \beta_0 (h_3 + (A - C) \cos \beta_0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

и получен следующий вывод

Замечание 1. Неустойчивое равновесие (12) не может быть стабилизировано гироскопическими силами.

Заключение

Представленные результаты моделирования и качественного анализа дифференциальных уравнений движения гиростата свидетельствуют о том, что применение средств компьютерной алгебры позволяет ускорить исследовательский процесс, а также повысить точность и наглядность вычислений.

Работа проводилась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00301).

Литература

1. Четаев, Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике / Н.Г. Четаев. – М.: Изд-во АН СССР, 1962.
2. Александров, А.Ю. Об устойчивости гироскопических систем / А.Ю. Александров, А.А. Косов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2013. – Вып. 2. – С. 3–13.
3. Гутник, С.А. Динамика спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента; положения равновесия и их устойчивость / С.А. Гутник, Л. Сантуш, В.А. Сарычев, А. Силва // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2015. – № 3. – С. 142–155.
4. Банщиков, А.В. Анализ устойчивости относительных равновесий вытянутого осесимметричного гиростата средствами символьно-численного моделирования / А.В. Банщиков, С.В. Чайкин // Космические исследования. – 2015. – Т. 53, № 5. – С. 414–420.
5. Гутник, С.А. Применение методов компьютерной алгебры для исследования стационарных движений спутника-гиростата / С.А. Гутник, В.А. Сарычев // Программирование. – 2017. – № 2. – С. 35–44.
6. Банщиков, А.В. Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем / А.В. Банщиков, Л.А. Бурлакова, В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко // Вычислительные технологии. – 2014. – Т. 19, № 6. – С. 3–18.
7. Banshchikov, A.V. Obtaining and Analysis of the Necessary Conditions of Stability of Orbital Gyrostat by Means of Computer Algebra / A.V. Banshchikov // Lecture Notes in Computer Science. – 2019. – V. 11661. – P. 57–66.

Андрей Валентинович Банщиков, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), bav@icc.ru.

Поступила в редакцию 1 апреля 2021 г.

MSC 70H14; 68W30

DOI: 10.14529/mmp210207

APPLICATION OF COMPUTER ALGEBRA FOR ANALYSIS OF GYROSCOPIC STABILIZATION OF EQUILIBRIUMS OF ORBITAL GYROSTAT

A. V. Banshchikov, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russian Federation, bav@icc.ru

Using the applied software developed on the basis of the computer algebra system *Mathematica*, the dynamics of the rotational motion along the circular orbit of a satellite-gyrostator in a Newtonian central field of forces are investigated. Assuming the instability of the potential system, the regions with an even degree of instability by Poincaré are found in the space of introduced parameters. The paper considers the question of the possibility of gyroscopic stabilization of unstable relative equilibrium positions of the gyrostator, when the vector of the gyrostatic moment of the system lays in one of the planes formed by the principal central axes of inertia. The research results were obtained in a symbolic (analytical) form on a computer and by means of a numerical experiment with graphic interpretation.

Keywords: gyroscopic stabilization; degree of instability; system of inequalities; symbolic-numerical modelling.

References

1. Chetaev N.G. *Ustoichivost' dvizheniya. Raboty po analiticheskoy mekhanike* [Stability of Motion. Works on Analytical Mechanics]. Moscow, AS USSR, 1962. (in Russian)
2. Aleksandrov A.Iu., Kosov A.A. [On Stability of Gyroscopic Systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series: Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2013, no. 2, pp. 3–13. (in Russian)
3. Gutnik S.A., Santos L., Sarychev V.A., Silva A. Dynamics of a Gyrostat Satellite Subjected to the Action of Gravity Moment. Equilibrium Attitudes and Their Stability. *Journal Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, no. 3, pp. 469–482.
4. Banshchikov A.V., Chaikin S.V. Analysis of the Stability of Relative Equilibriums of a Prolate Axisymmetric Gyrostat by Symbolic-Numerical Modelling. *Cosmic Research*, 2015, vol. 53, no. 5, pp. 378–384.
5. Gutnik S.A., Sarychev V.A. Application of Computer Algebra Methods for Investigation of Stationary Motions of a Gyrostat Satellite. *Programming and Computer Software*, 2017, vol. 43, no. 2, pp. 90–97.
6. Banshchikov A.V., Burlakova L.A., Irtegov V.D., Titorenko T.N. [Symbolic Computation in Modelling and Qualitative Analysis of Dynamic Systems]. *Computational Technologies*, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 3–18. (in Russian)

7. Banshchikov A.V. Obtaining and Analysis of the Necessary Conditions of Stability of Orbital Gyrostat by means of Computer Algebra. *Lecture Notes in Computer Science*, 2019, vol. 11661, pp. 57–66.

Received April 1, 2021