УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp210411

ОДНОМЕРНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА В АЛГОРИТМАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ

***А.Л. Шестаков*[1], *А.В. Келлер*[1,2]**
[1]Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
[2]Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация

В статье предлагается использование цифрового одномерного фильтра Калмана в реализации численных алгоритмов решения задачи оптимальных динамических измерений для восстановления динамически искаженного сигнала при наличии помех. Математическая модель сложного измерительного устройства построена как система леонтьевского типа, начальное состояние которой отражает условие Шоуолтера – Сидорова. Основным положением теории оптимальных динамических измерений является моделирование искомого входящего сигнала как решение задачи оптимального управления с минимизацией функционал штрафа, в котором оценивается расхождение моделируемого и наблюдаемого выходящего (или наблюдаемого) сигнала. Наличие помех на выходе измерительного устройства приводит к необходимости использования в численных алгоритмах цифровых фильтров. Сглаживающие фильтры, применяющиеся при неизвестных вероятностных параметрах помех, недостаточно эффективны при фильтрации пикообразных сигналов на малом временном промежутке. Кроме того, динамика измерений актуализирует рассмотрение фильтров, реагирующих на быстро меняющиеся данные. В статье предлагается включение процедуры фильтрации наблюдаемого сигнала в ранее разработанные численные алгоритмы, что позволяет либо расширить их применение, либо упростить функционал штрафа.

Ключевые слова: оптимальное динамическое измерение; фильтр Калмана; алгоритм численного решения; система леонтьевского типа.

Введение

Основы теории оптимальных динамических измерений были заложены 10 лет назад, и все эти годы ее качественные и количественные методы активно развиваются [1]. Эта теория построена на синтезе методов теории оптимального управления, уравнений соболевского и леонтьевского типов, динамических измерений и автоматического управления. Измерительное устройство (ИУ) может представлять собой сложную систему, например, состоящих из нескольких датчиков, поэтому его адекватной математической моделью является система вида

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + D\eta, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t), u(t), y(t)$ – вектор-функции состояния ИУ, входного и выходного сигнала (наблюдаемого) соответственно, A и L ($detL = 0$) – квадратные матрицы, характеризующие ИУ, матрица B показывает взаимосвязь между входом системы и ее состоянием, матрицы C и D характеризуют взаимосвязь между состоянием системы и наблюдением, $\eta(t)$ – вектор-функция помех на выходе измерительной системы.

В качестве начального принимается условие Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L\right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0. \qquad (2)$$

В задаче (1), (2) матрица A – $(L;p)$-регулярна, $\alpha \in \rho^L(M)$ [1]. Результаты разрешимости задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения соболевского типа позволили развить численные методы решения начальных задач и задач оптимального управления, как для названных уравнений, так и систем леонтьевского типа [2]. Входной сигнал ищется как решение задачи оптимального управления, в ней минимизируется функционал штрафа, отражаюший оценку близости реального наблюдения, снимаемого с ИУ, и наблюдения, получаемого на основе математической модели ИУ (1), (2).

В последние годы методы теории оптимальных динамических измерений развиваются по нескольким направлениям: использование современных результатов теории уравнений соболевского типа [3], разработка новых математических моделей [4] и совершенствование существующих и разработка новых численных методов [5, 6]. В ряде работ были представлены результаты использования сглаживающих фильтров к данным наблюдения [7, 8]. Однако для такого рода фильтров необходимо на основе многочисленных вычислительных экспериментов подбирать параметры, при которых достигается эффективный компромисс между сглаживанием наблюдаемого сигнала, отработкой пикообразных участков и нивелированием эффекта запаздывания. В данной статье предлагается использование одномерного фильтра Калмана [9] в алгоритмах численного решения задачи оптимального динамического измерения. Этот фильтр широко используется в различных инженерных и эконометрических приложениях [10].

1. Модель оптимальных динамических измерений

Введем в рассмотрение пространства состояний ИУ $\aleph = \{x \in L_2((0,\tau), R^n) : \dot{x} \in L_2((0,\tau), R^n)\}$, наблюдений $\Upsilon = C[\aleph]$ и измерений $\mathfrak{A} = \{u \in L_2((0,\tau), R^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0,\tau), R^n)\}$. Моделируя ИУ в случае отсутсвия помех, будем рассматривать систему

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{cases} \qquad (3)$$

с начальным условием Шоуолтера – Сидорова (2). В $\mathfrak{A}$ выделим замкнутое выпуклое множество допустимых измерений $\mathfrak{A}_\partial \subset \mathfrak{A}$ в виде

$$\mathfrak{A}_\partial = \left\{ u \in \mathfrak{A} : \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \le d \right\}. \qquad (4)$$

Параметр d определяется исходя из физических свойств измеряемого процесса. Требуется найти такое $v \in \mathfrak{A}_\partial$ – оптимальное динамическое измерение – при котором достигается минимальное значение

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{A}_\partial} J(u) \qquad (5)$$

функционала штрафа

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| y^{(q)}(u,t) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt, \qquad (6)$$

где $y_0(t)$, $t \in [0, \tau]$ непрерывно-дифференцируемая функция (будем считать ее «реальным наблюдением»), построенная на основе наблюдаемых значений Y_{0i} на выходе измерительной системы. Представленную задачу (2) – (6) будем называть основной задачей оптимальных динамических измерений. Отметим, что при отсутствии помех искажение входного сигнала обусловлено только инерционностью измерительного устройства. Справедлива следующая

Теорема 1. [2] *Пусть L и A – квадратные матрицы порядка n, матрица A – $(L;p)$–регулярна, $detA \neq 0$. Тогда для любого $x_0 \in R^n$ существует единственное решение $v \in \mathfrak{A}_\partial$ задачи (2) – (6), при этом $x\,(v) \in \aleph$ удовлетворяет системе (3), условию (2) и определяется формулой*

$$x\,(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t) = \lim_{k\to\infty} \Bigg[\sum_{q=0}^{p} \left(A^{-1}\left(\left(kL_k^L\,(A)\right)^{p+1} - \mathbb{I}_n\right) L\right) \times$$

$$\times A^{-1}\left(\mathbb{I}_n - \left(kL_k^L\,(A)\right)^{p+1}\right)(Bu)^{(q)} + \left(\left(L - \tfrac{t}{k}A\right)^{-1} L\right)^k x_0 + \tag{7}$$

$$+\int_0^t \left(\left(L - \tfrac{t-s}{k}A\right)^{-1} L\right)^k \left(L - \tfrac{t-s}{k}A\right)^{-1} \times \left(kL_k^L\,(A)\right)^{p+1} Bu\,(s)\,ds\Bigg],$$

где $\lim\limits_{k\to\infty}\left(kL_k^L\,(A)\right)^{p+1}$ – проектор, $L^L\,(A)$ – левая резольвента A.

В [11] представлены численные методы, позволяющие решать данную задачу: метод многошагового покоординатного спуска с памятью и сплайн-метод.

2. Численный алгоритм с использованием одномерного фильтра Калмана

При решении задачи оптимального динамического измерения (1), (2), (4) – (6) построим дискретный одномерный фильтр Калмана для данных наблюдаемого выходящего сигнала Y_{0i}.

Отметим, что данные о выходном сигнале Y_{0i} получаем дискретно в моменты времени $t_i = 0, 1, \ldots, n$ через равные промежутки $t_{i+1} - t_i = \delta$, причем $t_0 = 0$ и $t_n = \tau$. Полагаем, что Y_{0i} и Y_i связаны следующим образом:

$$Y_{0i} = Y_i + \xi_i, \tag{8}$$

где $\xi_i \sim N(0, \sigma_\xi^2)$ – нормально распределенная случайная величина.

При использовании фильтра Калмана оптимальная оценка на момент времени t вычисляется в два шага: 1) прогноз по модели процесса; 2) коррекция по данным наблюдений. Обозначим $\hat{Y}_i$ – прогноз выходного сигнала на момент t_i по оценке в момент времени t_{i-1}. Для первых $N+1$ наблюдений будем считать, что $Y_i = Y_{0i}$, $i = 0, 1, ..., N$.

Все последующие рассуждения проведем для $i = N+1, N+2, ..., n$. Будем считать, что рассматриваем выходной сигнал вне его физической модели, в этом случае прогноз $\hat{Y}_i$ задается уравнением

$$\hat{Y}_i = Y_{i-1}. \tag{9}$$

Для получения наилучшего приближения к искомому значению Y_i находится средневзвешенное между наблюдением Y_{0i} и прогнозом $\hat{Y}_i$ на момент t_i, где весами являются значения K_i и $1 - K_i$, а K_i – коэффициент Калмана

$$Y_i = K_i Y_{0i} + (1 - K_i)\hat{Y}_i \quad \text{или} \quad Y_i = \hat{Y}_i + K_i (Y_{0i} - \hat{Y}_i). \tag{10}$$

Коэффициент Калмана рассчитывается по формуле:

$$K_i = \frac{\hat{P}_i}{\hat{P}_i + \sigma_\xi^2}, \tag{11}$$

где $\hat{P}_i$ – оценка дисперсии ошибки прогноза

$$\hat{P}_i = P_{i-1} + w_i. \quad P_N = const, \tag{12}$$

$$w_i = \frac{1}{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\left((Y_{0,i-m} - Y_{i-m-1}) - \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}(Y_{0,i-m} - Y_{i-m-1})\right)^2. \tag{13}$$

Заметим, что значение N подбирается эмпирически. Для следующего прогноза используем формулу пересчета

$$P_i = (1 - K_i)\hat{P}_i. \tag{14}$$

Полученные результаты фильтрации Y_i позволяют нам перейти к решению задачи (2) – (6), для них и найти ее решение с использованием одного из известных численных алгоритмов [11], аналогично [7, 8].

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).

Литература

1. Shestakov, A.L. The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology / A.L. Shestakov, A.V. Keller, A.A. Zamyshlyaeva, N.A. Manakova, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2020. – V. 7, № 1. – P. 3–23.
2. Keller, A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff Type / A.V. Keller // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 2. – P. 39–59.
3. Шестаков, А.Л. Динамические измерения в пространствах «шумов»/ А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013. – Т. 13, № 2. – С. 4–11.
4. Shestakov, A. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal with Respect to the Measuring Transducer Degradation / A.L. Shestakov, M. Sagadeeva, G. Sviridyuk // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – V. 8, № 41–44. – P. 2125–2130.
5. Keller, A.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals / A.V. Keller, A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, Yu.V. Khudyakov // Semigroups of Operators – Theory and Applications. – 2015. – V. 113. – P. 183–195.
6. Шестаков, А.Л. Алгоритм численного нахождения оптимального измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства / А.Л. Шестаков, С.А. Загребина, Н.А. Манакова, М.А. Сагадеева, Г.А. Свиридюк // Автоматика и телемеханика. – 2021. – Т. 1. – С. 55–67.
7. Shestakov, A.L. Optimal Dynamic Measurement Method Using Digital Moving Average Filter / A.L. Shestakov, A.V. Keller // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – V. 1864. – Article ID: 012073.

8. Keller, A.V. Optimal Dynamic Measurement Method Using the Savitsky – Golay Digital Filter / A.V. Keller // Differential Equations and Control Processes. – 2021. – № 1. – P. 1–15.

9. Kalman, R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems / R.E. Kalman // Journal of Basic Engineering. – 1960.– V. 82. – P. 35–45.

10. Jazwinski, A.H. Stochastic Processes and Filtering Theory / A.H. Jazwinski. – New York: Academic Press, 1970.

11. Shestakov, A.L. Numerical Investigation of Optimal Dynamic Measurements / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, A.V. Keller, A.A. Zamyshlyaeva, Y.V. Khudyakov // Acta IMEKO. – 2018. – V. 7, № 2. – P. 65–72.

Александр Леонидович Шестаков, доктор технических наук, профессор, кафедра «Информационно-измерительная техника», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), rectorat@susu.ru.

Алевтина Викторовна Келлер, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), ведущий научный сотрудник, НИЛ «Неклассические уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), alevtinak@inbox.ru.

Поступила в редакцию 8 сентября 2021 г.

MSC 93E10 **DOI: 10.14529/mmp210411**

ONE-DIMENSIONAL KALMAN FILTER IN ALGORITHMS FOR NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL DYNAMIC MEASUREMENT

A.L. Shestakov[1]***, A.V. Keller***[1,2]
[1] South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
[2] Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation
E-mails: rectorat@susu.ru, sviridyukga@susu.ru, alevtinak@inbox.ru

The article proposes the use of a digital one-dimensional Kalman filter in the implementation of numerical algorithms for solving the problem of optimal dynamic measurements to restore a dynamically distorted signal in the presence of noise. The mathematical model of a complex measuring device is constructed as a Leontief-type system, the initial state of which reflects the Showalter–Sidorov condition. The main position of the theory of optimal dynamic measurements is the modeling of the desired input signal as a solution to the optimal control problem with minimization of the penalty functional, in which the discrepancy between the simulated and observed output (or observed) signal is estimated. The presence of noise at the output of the measuring device makes it necessary to use digital filters in the numerical algorithms. Smoothing filters used for unknown probabilistic parameters of interference are not effective enough for filtering peak-like signals over a short time interval. In addition, the dynamics of measurements actualizes the consideration of filters that respond to rapidly changing data. The article proposes the inclusion of the procedure for filtering the observed signal into previously developed numerical algorithms, which makes it possible to either expand their application or simplify the penalty functionality.

Keywords: optimal dynamic measurement; Kalman filter; numerical solution algorithm; Leontief type system.

References

1. Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2020, vol. 7, no. 1, pp. 3–23.
2. Keller A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff Type. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 39–59.
3. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyukov Y.V. Dinamic Measurement in Spaces of "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technologies, Automatic Control, Radioelectronics*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 4–11. (in Russian)
4. Shestakov A., Sagadeeva M., Sviridyuk G. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal with Respect to the Measuring Transducer Degradation. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, vol. 8, no. 41–44, pp. 2125–2130.
5. Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyukov Y.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals. *Semigroups of Operators – Theory and Applications*, 2015, pp. 183–195.
6. Shestakov A.L., Zagrebina S.A., Manakova N.A., Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A. An Algorithm for Numerically Finding the Optimal Measurement Distorted by Inertia, Resonances and Degradation of the Measuring Device. *Automation and Remote Control*, 2021, no. 1, pp. 55–67. (in Russian)
7. Shestakov A.L., Keller A.V. Optimal Dynamic Measurement Method Using Digital Moving Average Filter. *Journal of Physics: Conference Seriesthis*, 2021, vol. 1864, article ID: 012073.
8. Keller A.V. Optimal Dynamic Measurement Method Using the Savitsky–Golay Digital Filter. *Differential Equations and Control Processes*, 2021, vol. 2021, no. 1, pp. 1–15.
9. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 1960, vol. 82, pp. 35–45.
10. Jazwinski A.H. *Stochastic Processes and Filtering Theory.* New York: Academic Press, 1970.
11. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Khudyakov Y.V. Numerical Investigation of Optimal Dynamic Measurements. *Acta IMEKO*, 2018, vol. 7, no. 2, pp. 65–72.

Received September 8, 2021