УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp220104

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫМ УСЛОВИЕМ

***С.А. Загребина*[1]*, А.С. Конкина*[1]**

[1]Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

Статья содержит обзор результатов авторов в области неклассических моделей математической физики, для которых рассмотрены многоточечные начально-конечные условия, обобщающие условия Коши и Шоуолтера – Сидорова. Напомним, что неклассическими называют те модели математической физики, чьи представления в виде уравнений или систем уравнений в частных производных не укладываются в рамках одного из классических типов – эллиптического, параболического или гиперболического.

Абстрактные результаты проиллюстрированы конкретными многоточечными начально-конечными задачами в различных постановках для уравнений в частных производных, возникающих в последнее время в приложениях. В том числе рассмотрены неавтономная модель Чена – Гетина с комплексными коэффициентами, стохастическая эволюционная модель Девиса, макромодель транспортного потока на перекрестке, основанная на уравнениях Осколкова, рассмотренных в системе геометрических графов, учитывающих условие непрерывности, баланса потока и условие запрета на движение.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; разрешающие C_0-полупотоки операторов; разрешающие (полу)группы операторов; относительно спектральные проекторы; многоточечное начально-конечное условие; неавтономная модель Чена – Гетина; стохастическая модель Девиса; макромодель транспортного потока на перекрестке.

Посвящается юбилею профессора Г.А. Свиридюка

Введение

Неавтономная модель Чена – Гетина [21]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞; параметры λ, $d \in \mathbb{R}$. На интервале $(\tau_0, \tau_n) \subset \mathbb{R}$ рассмотрим неавтономную модель Чена – Гетина [4]

$$(\lambda - \Delta)u_t(x,t) = \nu(t)(\Delta u(x,t) - id\Delta^2 u(x,t)) + g(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (\tau_0, \tau_n), \tag{1}$$

$$\Delta u(x,t) = u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (\tau_0, \tau_n), \tag{2}$$

которая позволяет учесть изменение параметров системы с течением времени и в частном случае при $d = 0$ описывает процесс теплопроводности с «двумя температурами» [4], а также динамику давления жидкости в трещинновато-пористой среде [3] и процесс влагопереноса в почве [11]. Кроме того, если в случае $\lambda = 0$ в качестве искомой функции взять Δu, то из этого уравнения может быть получено линеаризованное классическое уравнение Гинзбурга – Ландау с учетом дифракции и отсутствием диффузионного воздействия [2]. Задача (1), (2) редуцируется к неавтономному уравнению вида

$$L\dot{u}(t) = a(t)Mu(t) + g(t), \tag{3}$$

где операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейный и непрерывный) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейный, замкнутый, плотно определенный в $\mathfrak{U}$), действующие в некоторых банаховых пространствах $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$.

Зафиксируем $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$; возьмем $\tau_0 = 0$ и $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\tau_{j-1} < \tau_j$, $j = \overline{1,n}$. Дополним уравнение (3) *многоточечным начально-конечным условием* [35]

$$\lim_{t\to\tau_0+} P_0(u(t)-u_0) = 0, \qquad P_j(u(\tau_j)-u_j) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где P_j – относительно спектральные проекторы.

Стохастическая модель Девиса [13]. Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим эволюционную модель Девиса, описывающую эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [6],

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u + f, \tag{5}$$

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.

Уравнение (5) вместе с условиями (6), где свободный член $f = f(t)$ отвечает детерминированному внешнему воздействию, удается редуцировать к эволюционному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \tag{7}$$

где операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ действуют в некоторых банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. Так же задачу (5), (6), где в качестве внешнего воздействия $f = f(t)$ выступает белый шум, а $u = u(t)$ является случайным процессом, можно привести к стохастическому уравнению соболевского типа [36]

$$Ldu = Mudt + NdW. \tag{8}$$

Здесь $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а $W = W(t)$ $\mathfrak{F}$-значный винеровский K-процесс.

Возьмем $\tau_0 = 0$ и $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\tau_{j-1} < \tau_j$, $j = \overline{1,n}$. Уравнение (8) можно дополнить многоточечным начально-конечным условием [13]

$$\lim_{t\to\tau_0+} P_0(u(t)-\xi_0) = 0, \ P_j(u(\tau_j)-\xi_j) = 0, \ j = \overline{1,n}, \tag{9}$$

где P_j – относительно спектральные проекторы, а

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\xi_{jk}\varphi_k, \ j = \overline{0,n}, \tag{10}$$

причем $\xi_{jk} \in \mathbf{L_2}$ гауссова случайная величина такая, что ряд (10) сходится. (Например, $D\xi_{jk} \le C_j$, $k \in \mathbb{N}$, $j = \overline{0,n}$).

Модель дорожного движения на перекрестке [38]. Пусть $\mathbf{\Gamma} = \{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_i, \ldots\}$ – конечное упорядоченное множество геометрических графов $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i(\mathcal{V}_i, \mathcal{E}_i)$. Каждый геометрический граф $\mathbf{G}_i$ имеет восемь ребер и соответствует периоду времени $[\tau_{i-1};\tau_i]$, $i \in \mathbb{N}$. Здесь $\mathcal{V}_i = \{V_{ij}\}$ – множество вершин графа $\mathbf{G}_i$, а

$\mathcal{E}_i = \{E_{ik}\}$ – множество ребер $\mathbf{G}_i$. В графе $\mathbf{G}_i$ каждому ребру E_{ik}, $k = \overline{0,8}$, поставлено в соответствие два числа – «длина» ребра $l_{ik} \in \mathbb{R}_+$ и его «ширина» $d_{ik} \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим уравнения Осколкова [14]

$$\lambda_i u_{ikt} - u_{iktxx} = \nu_i u_{ikxx} + f_{ik}, \tag{11}$$

заданные на каждом ребре E_{ik} каждого геометрического графа $\mathbf{G}_i$, где коэффициенты $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $\nu_i \in \mathbb{R}_+$. Здесь $u_{ik} = u_{ik}(x,t)$, $x \in [0, l_k]$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\equiv \{0\} \cup \mathbb{R}_+)$, $k = \overline{1,8}$, характеризует среднюю скорость транспортного потока на множестве ребер E_k графа $\mathbf{G}_i$. Усредненной силой, которая заставляет крутиться колеса транспортных средств, будем считать $f_{ik} = f_{ik}(x,t)$, $(x,t) \in [0, l_{ik}] \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Коэффициент λ равен единице, поделенной на коэффициент ретардации, которые могут принимать отрицательные значения, поэтому считаем $\lambda \in \mathbb{R}$. Вязкость транспортного потока, а именно, его способность «гасить» резкие перепады скорости, задает коэффициент ν, в силу физического смысла $\nu \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим теперь первое условие на скоростной режим при проезде перекрестка – скорость въезда транспортного средства на перекресток должна равняться скорости съезда, иначе на перекрестке возможны заторы или ДТП. Данное условие в математической модели является *условием непрерывности* [26]

$$\begin{gathered} u_{ik}(0,t) = u_{im}(l_{im},t) = u_{il}(0,t) = u_{in}(l_{in},t), \\ \forall E_{ik}, E_{il} \in E^{\alpha}(V_{ij}),\ \forall E_{im}, E_{in} \in E^{\omega}_{op}(V_{ij}). \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь через $E^{\alpha}(V_{ij})$ обозначено множество ребер графа $\mathbf{G}_i$, выходящих из вершины V_{ij}, а через $E^{\omega}_{op}(V_{ij})$ обозначено множество ребер графа $\mathbf{G}_i$, соответствующих въезду в вершину V_{ij} на разрешающий сигнал светофора.

Второе условие скоростного режима при проезде перекрестка – количество выезжающих на перекресток транспортных средств было равно количеству отъезжающих. В математической модели оно сформулировано как *условие баланса потоков* [26]

$$\sum_{E_{ik} \in E^{\alpha}(V_{ij})} d_{ik} u_{ikx}(0,t) - \sum_{E_{im} \in E^{\omega}_{op}(V_{ij})} d_{im} u_{imx}(l_{im},t) = 0. \tag{13}$$

Третье условие скоростного режима при проезде перекрестка – условие «запрета на движение» [15]

$$u_{ik}(l_{ik},t) = 0, \quad \forall E_{ik} \in E^{\omega}_{cl}(V_{ij}), \tag{14}$$

где $E^{\omega}_{cl}(V_{ij})$ обозначено множество ребер графа $\mathbf{G}_i$, соответствующих въезду в вершину V_{ij} на запрещающий сигнал светофора.

Для рассматриваемой модели сформулируем многоточечное начально-конечное условие [15]

$$P_i(u_i(x,\tau_j) - u_{ij}(x)) = 0,\ j = \overline{0,n},\ i \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

описывающее процедуру переключения светофора в моменты времени $t = \tau_j$, $j = \overline{0,n}$, где при четных i перекресток сопоставляется геометрическому графу $\mathbf{G_1}$, а при нечетных i – геометрическому графу $\mathbf{G_2}$ [15]. Дополним многоточечное начально-конечное условие (15) уравнениям вида

$$L_i u_{it} = M_i u_i + f_i,\ i \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

к которым редуцируется задача (11) – (14) в специальным образом выбранных пространствах.

Уравнения вида (3) или (8) или (16) при условии, что $\ker L \neq \{0\}$, называются уравнениями неразрешенными относительно старшей производной (см. обзор в [5]). В последнее время широкое распространение получил термин *уравнения соболевского типа* (см., напр., [1, 25]), который впервые появился в работах Р. Шоуолтера [30, 31]. Данное исследование лежит в рамках теории вырожденных полугрупп операторов, которая создана Г.А. Свиридюком [25] и в настоящее время активно развивается, например в [18, 27, 29, 32, 34]. Более того, эта теория была перенесена в пространства случайных процессов [7–10]. Отметим, что неавтономная модель (1), (2) описывается уравнением (3), относящимся к относительно p-радиальному случаю [24, 25], т.е. операторы L и M порождают сильно непрерывную разрешающую полугруппу для однородного автономного уравнения (3) ($a(t) \equiv 1$). Отметим, что такой класс уравнений впервые был рассмотрен в работе [24]. Также отметим, что стохастическая модель (5), (6) описывается уравнением (8), относящимся к относительно p-секториальному случаю [23], т.е. операторы L и M порождают вырожденную аналитическую разрешающую полугруппу для однородного уравнения (8). Отметим, что такой класс уравнений впервые был рассмотрен в работе [23]. Кроме того, необходимо отметить, что модель транспортного потока (11) – (14) описывается уравнениями (16), относящимися к относительно p-ограниченному случаю [10,25], т.е. операторы L_i и M_i порождают вырожденную аналитическую разрешающую группу для однородного уравнения (16).

Отметим, что общая постановка многоточечной начально-конечной задачи (3), (4) или (8), (9) или (15), (16) была впервые приведена в [35]. Помимо уравнений соболевского типа первого порядка с многоточечным начально-конечным условием рассматривалось уравнение соболевского типа высокого порядка с этим условием [28]. Если $n = 1$, то условие вида (4) называется начально-конечным условием, и оно для автономного уравнения соболевского типа первого порядка было рассмотрено многими авторами (см. обзор в [12]), а для уравнений высокого порядка, например, в работе [33]. Оптимальное управление решениями уравнения соболевского типа первого порядка с начально-конечным условием исследовано напр. в [16, 17], а для уравнений соболевского типа высокого порядка в [33]. Отметим, что многоточечные начально-конечные условия являются также обобщением условия Шоуолтера – Сидорова [22], которое получим, если возьмем $n = 0$ (более подробно см. [12]).

Статья является обзорной, кроме введения и списка литературы, содержит девять частей. Список литературы отражает лишь вкусы и пристрастия авторов статьи, поэтому приносим читателям свои извинения за столь скромную библиографию к данной статье, которая не дает полного представления о вкладе Г.А. Свиридюка в развитие теории многоточечных начально-конечных задач для уравнений соболевского типа. В первой части приводятся необходимые сведения теории относительно p-радиальных операторов, впервые заложенной Г.А. Свиридюком [24] и развитой в дальнейшем его учениками [25]. Во второй части исследуется разрешимость однородных неавтономных уравнений (3). Результаты третьей и четвертой части почерпнуты в [21], в них приведены условия разрешимости многоточечной начально-конечной задачи (4) для уравнения (3) и полученные абстрактные результаты использованы для доказательства разрешимости неавтономной модифицированной модели Чена – Гетина (1), (2) с многоточечным начально-конечным условием (4). В пятом параграфе приводятся необходимые сведения теории относительно p-секториальных операторов, адаптированные к нашей ситуации и использованные для доказательства однозначной разрешимости детерминированного уравнения соболевского типа (7) с многоточечным начально-конечным условием (4) [37,39]. В шестом параграфе приводится результат о разрешимости абстрактного стохастического эволюционного уравнения с многоточечным начально-конечным условием, дополненный необходимыми вспомогательными сведениями теории случайных процессов [13,36]. В седьмом – полученный абстрактные результаты применяются для разрешимости стохастической модели Дэвиса с многоточечным начально-конечным условием [13]. В восьмом и девятом параграфе приводятся сведения о разрешимости многоточечной начально-конечной задачи уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченным оператором M [10,38] и полученные абстрактные результаты применяются для модели транспортного потока на перекрестке [14,15,38].

1. Относительно p-радиальные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейный и непрерывный), а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейный, замкнутый, плотно определенный в $\mathfrak{U}$). Следуя [24,25], множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ будем называть соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* оператора M. В [24,25] показано, что L-резольвентное множество является открытым, а поэтому L-спектр оператора M всегда замкнут. L-резольвентное множество оператора M может быть пустым множеством, например, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$. Предполагая, что $\rho^L(M) \neq \emptyset$, введем в рассмотрение оператор-функции комплексного переменного $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$, которые будем называть соответственно *L-резольвентой, правой* и *левой L-резольвентами* оператора M. Аналогично, оператор-функции $(p+1)$ комплексного переменного вида

$$R^L_{(\lambda,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}R^L_{\lambda_k}(M), \quad L^L_{(\lambda,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}L^L_{\lambda_k}(M), \qquad \lambda_k\in\rho^L(M) \quad (k=\overline{0,p}) \tag{17}$$

с областью определения $[\rho^L(M)]^{p+1}$, назовем соответственно *правой* и *левой (L,p)-резольвентами* оператора M. Также в силу результатов [24,25] все представленные оператор-функции голоморфны в своей области определения.

Определение 1. *[25] Оператор M называется p-радиальным относительно оператора L (коротко, (L,p)-радиальным), если*

(i) $\exists\alpha\in\mathbb{R} : (\alpha,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall\mu = (\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_p) \in (\alpha,+\infty)^{p+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \le \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k-\alpha)^n}.$$

Также введем обозначения

$$\mathfrak{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M),\ \mathfrak{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M),\ L_0 = L\Big|_{\mathfrak{U}^0},\ M_0 = M\Big|_{\operatorname{dom} M\cap\mathfrak{U}^0}.$$

Через $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) обозначим замыкание линеала $\mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathrm{im}\, L^L_{(\mu,p)}(M)$). Отметим, что при условии (L,p)-радиальности оператора M, существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

Определение 2. *Однопараметрическое семейство операторов $U^\bullet : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называется сильно непрерывной полугруппой (C_0-полугруппой) операторов, если*

(i) $U^sU^t = U^{s+t}$ $\forall s,t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(ii) U^t сильно непрерывен при $t > 0$ и существует $\lim\limits_{t\to 0+} U^t u = u$ для всех u из некоторого линеала плотного в $\mathfrak{U}$.

Определение 3. *Полугруппу $\{U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ назовем экспоненциально ограниченной с константами C и α, если $\exists C > 0$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \|U^t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \le Ce^{\alpha t}$.*

Теорема 1. [25] *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда существует вырожденная C_0-полугруппа*

$$\begin{gathered} U^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\left(L-\tfrac{t}{k}M\right)^{-1}L\right)^k = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\tfrac{k}{t}R^L_{\frac{k}{t}}(M)\right)^k, \quad t>0, \\ \left(F^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(L\left(L-\tfrac{t}{k}M\right)^{-1}\right)^k = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\tfrac{k}{t}L^L_{\frac{k}{t}}(M)\right)^k \;\; t>0\right), \end{gathered} \tag{18}$$

определенная на подпространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$ ($\tilde{\mathfrak{F}}$), где через $\tilde{\mathfrak{U}}$ ($\tilde{\mathfrak{F}}$) обозначим замыкание линеала $\mathfrak{U}^0 \dot{+} \mathrm{im}\, R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathfrak{F}^0 \dot{+} \mathrm{im}\, L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$). Более того, данная полугруппа экспоненциально ограничена с константами K, α из определения 1.

Замечание 1. [25] Единица полугруппы $\{U^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{U}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{F}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ является проектором $P = \lim\limits_{t\to 0+} U^t$ ($Q = \lim\limits_{t\to 0+} F^t$) вдоль $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) на подпространство $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$).

Введем в рассмотрение условие

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1, \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1. \tag{19}$$

Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\mathrm{dom} M_k \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0,1$. И введем в рассмотрение еще одно дополнительное условие

$$\text{существует оператор } \; L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1). \tag{20}$$

Замечание 2. Достаточным условием выполнения условий (19) и (20) является, например, сильная (L,p)-радиальность оператора M, $p \in \mathbb{N}_0$ [1]. Здесь и далее $\mathbb{N}_0 \equiv \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Теорема 2. [25] *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$, и выполнены условия* (19), (20). *Тогда*

(i) $L_k = L\Big|_{\mathfrak{U}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $\quad M_k = M\Big|_{\mathrm{dom}\, M_k} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $\mathrm{dom}\, M_k = \mathrm{dom}\, M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0,1$;

(ii) *оператор $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0)$ нильпотентен степени не выше p;*

(iii) *оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ является генератором C_0-полугруппы разрешающих операторов для уравнения вида $\dot{u} = Su$.*

2. Разрешающие C_0-полупотоки операторов для неавтономных эволюционных уравнений

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Определение 4. [19] Двухпараметрическое семейство $U(\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ будем называть *вырожденным сильно непрерывным в нуле полупотоком* (коротко, C_0-*полупотоком*) операторов, если выполнены следующие условия

(i) $U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s)$ для всех $0 \le s < \tau < t$;

(ii) $U(t,s)$ сильно непрерывны для всех $t, s > 0$ и для всех $s \ge 0$ существует $\lim\limits_{t\to s+0} U(t,s)u = u$ для всех u из линеала плотного в некотором подпространстве $\mathfrak{U}$.

Теорема 3. [21] *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$, выполнены условия* (19), (20) *и функция $a \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, тогда двухпараметрическое семейство операторов при $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$,*

$$U(t,s)\Big|_{\mathfrak{U}^1} = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\left(L - \frac{1}{k}M\int\limits_s^t a(\zeta)d\zeta\right)^{-1} L\right)^k = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\mathbb{I}_{\mathfrak{U}} - \frac{1}{k}S\int\limits_s^t a(\zeta)d\zeta\right)^{-k}, \quad (21)$$

где $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$, $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0)$, является вырожденным C_0-полупотоком операторов.

Замечание 3. В пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ по аналогии с (21) также можно задать полупоток операторов следующей формулой:

$$F(t,s) = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(L\left(L - \frac{1}{k}M\int\limits_s^t a(\zeta)d\zeta\right)^{-1}\right)^k, \qquad s < t. \quad (22)$$

На интервале $(\tau, T] \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ рассмотрим задачу Коши

$$\lim_{t\to\tau+0} u(t) = u_\tau \quad (23)$$

для однородного неавтономного уравнения

$$L\dot{u}(t) = a(t)Mu(t), \quad (24)$$

где функция $a : [\tau, T] \to \mathbb{R}_+$ подлежит дальнейшему определению.

Определение 5. [25] *Решением* уравнения (24) будем называть вектор-функцию $u \in C([\tau,T];\mathfrak{U}) \cap C^1((\tau,T];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению на $(\tau,T]$. Решение уравнения (24) будем называть *решением задачи Коши* (23), (24), если оно дополнительно удовлетворяет условию (23).

Определение 6. [25] Замкнутое множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (24), если

(i) любое решение $u(t)$ уравнения (24) лежит в $\mathfrak{P}$ (поточечно);

(ii) для любого u_τ из $\mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи Коши (23) для уравнения (24).

Вместе с уравнением (24) будем рассматривать эквивалентное ему при $\varkappa \in \rho^L(M)$ уравнение

$$L(\varkappa L - M)^{-1}\dot{f} = a(t)M(\varkappa L - M)^{-1}f. \tag{25}$$

Теорема 4. [25] *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$, выполнены условия* (19), (20) *и функция $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Тогда фазовым пространством уравнения* (24) *является множество $\mathfrak{U}^1$, а фазовым пространством* (25) *– множество $\mathfrak{F}^1$.*

Определение 7. [20] *Полупоток операторов $U(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называется полупотоком разрешающих операторов (или просто разрешающим полупотоком) уравнения* (24), *если при любом $u_\tau \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U(t,\tau)u_\tau$ есть решение уравнения* (24) *(в смысле определения 5).*

В силу теорем 3 и 4 справедлива следующая

Теорема 5. [21] *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$, выполнены условия* (19), (20) *и функция $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Тогда семейство $\{U(t,s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : \ t,s \in \mathbb{R}_+\}$, заданное формулой* (21), *является разрешающим полупотоком уравнения* (24), *а семейство $\{F(t,s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}) : \ t,s \in \mathbb{R}_+\}$, заданное формулой* (22) *– разрешающим полупотоком уравнения* (25).

3. Решение многоточечной начально-конечной задачи для неавтономного эволюционного уравнения

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$, и выполнены условия (19), (20). На промежутке $(\tau_0, \tau_n]$ рассмотрим неоднородное уравнение

$$L\dot{u}(t) = a(t)Mu(t) + g(t) \tag{26}$$

с функцией $g : (\tau_0, \tau_n) \to \mathfrak{F}$. Рассмотрим дополнительно условие

$$\begin{cases} \sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{n} \sigma_j^L(M),\ n \in \mathbb{N},\ \text{причем } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset \text{ содержится в ограниченной} \\ \text{области } D_j \subset \mathbb{C} \text{ с кусочно гладкой границей } \partial D_j = \gamma_j \subset \mathbb{C}. \text{ Кроме того,} \\ \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset \text{ и } \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset \text{ при всех } j,k,l = \overline{1,n}, k \neq l. \end{cases} \tag{27}$$

В силу голоморфности относительных резольвент существуют проекторы, которые имеют вид

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} R_\mu^L(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} L_\mu^L(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}), \quad j = \overline{1,n},$$

$P_0 = P - \sum\limits_{j=1}^{n} P_j, \quad Q_0 = Q - \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j$, где P и Q определены в замечании 1.

Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{U}^{1j} = \operatorname{im} P_j$, $\mathfrak{F}^{1j} = \operatorname{im} Q_j$, $j = \overline{0,n}$. По построению

$$\mathfrak{U}^1 = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathfrak{U}^{1j} \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{F}^1 = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathfrak{F}^{1j}.$$

Через L_{1j} обозначим сужение оператора L на $\mathfrak{U}_j^1$, $j=\overline{0,n}$, а через M_{1j} обозначим сужение оператора M на $\operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}_j^1$, $j=\overline{0,n}$. Поскольку, как нетрудно показать, $P_j\varphi \in \operatorname{dom} M$, если $\varphi \in \operatorname{dom} M$, то область определения $\operatorname{dom} M_{1j} = \operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}_j^1$ плотна в $\mathfrak{U}_j^1$, $j=\overline{0,n}$.

Теорема 6. (Обобщенная спектральная теорема) [35]. *Пусть операторы* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *и* $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *причем оператор* M (L,p)*-радиален,* $p \in \mathbb{N}_0$, *и выполнены условия* (19), (20), (27). *Тогда*

(i) *операторы* $L_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $M_{1j} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $j=\overline{0,n}$;

(ii) *существуют операторы* $L_{1j}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{1j};\mathfrak{U}^{1j})$, $j=\overline{0,n}$.

Зафиксируем $u_j \in \mathfrak{U}$, $j=\overline{0,n}$; возьмем $\tau_0=0$ и $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\tau_{j-1}<\tau_j$, $j=\overline{1,n}$. Для них рассмотрим многоточечную начально-конечную задачу [37]

$$\lim_{t\to\tau_0+} P_0(u(t)-u_0)=0, \qquad P_j(u(\tau_j)-u_j)=0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{28}$$

для уравнения (26). Подействуем на уравнение (26) последовательно проекторами $\mathbb{I}-Q$ и Q_j, $j=\overline{0,n}$, и получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} H\dot{u}^0(t)=a(t)u^0(t)+M_0^{-1}g^0(t), \\ \dot{u}^{j1}(t)=a(t)S_{1j}u^{1j}(t)+L_{1j}^{-1}g^{1j}(t),\ j=\overline{0,n}, \end{cases}$$

где $H=M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен степени $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, операторы $S_{1j}=L_{1j}^{-1}M_{1j}\in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^{1j})$ причем спектр $\sigma(S_j)=\sigma_j^L(M)$; $g^0=(\mathbb{I}-Q)g$, $g^{1j}=Q_jg$, $u^0=(\mathbb{I}-P)u$, $u^{1j}=P_ju$, $j=\overline{0,n}$.

Определение 8. *Вектор-функцию* $u\in C([\tau_0,\tau_n];\mathfrak{U})\cap C^1((\tau_0,\tau_n];\mathfrak{U})$ *будем называть решением уравнения* (26), *если она на* (τ_0,τ_n) *обращает его в тождество. Решение* $u=u(t)$ *уравнения* (26) *называется решением многоточечной начально-конечной задачи* (26), (28), *если оно удовлетворяет условиям* (28).

Теорема 7. [21] *Пусть оператор* M (L,p)*-радиален,* $p\in\mathbb{N}_0$, *функция* $a \in C^{p+1}([\tau_0,\tau_n];\mathbb{R}_+)$, *и выполнены условия* (19), (20), (27), *тогда для любых векторов* $u_j\in\mathfrak{U}_j^1$ $(j=\overline{0,n})$ *и вектор-функции* $g:(\tau_0,\tau_n)\to\mathfrak{F}$ *такой, что* $Qg\in C((\tau_0,\tau_n),\mathfrak{F}^1)$ *и* $(\mathbb{I}_{\mathfrak{F}}-Q)g \in C^{p+1}((\tau_0,\tau_n),\mathfrak{F}^1)$ *существует единственное классическое решение* $u\in C([\tau_0,\tau_n];\mathfrak{U})\cap C^1((\tau_0,\tau_n];\mathfrak{U})$ *задачи* (26), (28) *вида*

$$u(t)=-\sum_{k=0}^{p} H^kM_0^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\right)^k\frac{g^0(t)}{a(t)}+\sum_{j=0}^{n}\left(U(t,\tau_j)P_jx_j-\int_t^{\tau_j}U(t,s)P_jL_{1j}^{-1}g^{1j}(s)ds\right). \tag{29}$$

4. Решения многоточечной начально-конечной задачи для неавтономной модели Чена – Гетина с комплексными коэффициентами

Пусть $\Omega\subset\mathbb{C}^m$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Редуцируем уравнение

$$(\lambda-\Delta)u_t(x,t)=\nu(t)(\Delta-id\Delta^2)u(x,t)+f(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega\times(\tau_0,\tau_n), \tag{30}$$

где $\lambda, d \in \mathbb{R}$, с краевыми условиями

$$\Delta u(x,t) = u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (\tau_0, \tau_n), \tag{31}$$

к уравнению (26).

Пусть $\mathfrak{U} = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{F} = L_2(\Omega)$, где $W_2^2(\Omega), \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ – пространства Соболева. Определим операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ формулами $L = \lambda - \Delta$, $M = \Delta - id\Delta^2$, где $\operatorname{dom} M = \{u \in W_2^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0,\, x \in \partial\Omega\}$.

Лемма 1. [17] *При любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$, оператор M $(L,0)$-радиален, и выполнены условия* (19), (20).

Утверждение леммы 1 следует из [17, Лемма 3.1] с учетом замечания 2.

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω. Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ занумерована по невозрастанию с учетом кратности. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную (в смысле $L_2(\Omega)$) последовательность соответствующих собственных функций, $\varphi_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{\mu_k = \frac{\lambda_k - id\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k},\, k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = \lambda\}\right\}.$$

Для того, чтобы контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ удовлетворял условию (27), достаточно взять $\gamma_j = \partial D_j$ $(j = \overline{0,n})$ так, чтобы $\bigcup\limits_{j=0}^{n} D_j \supset \sigma^L(M)$ и каждая из областей D_j $(j = \overline{1,n})$ содержала конечное число точек из $\sigma^L(M)$. Обозначим $\sigma_j^L(M) = \sigma^L(M) \cap D_j$ и построим проекторы

$$P_j = \sum_{k:\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \langle \cdot, \varphi_k \rangle\, \varphi_k, \qquad j = \overline{0,n}.$$

Зафиксируем $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$; возьмем $\tau_0 = 0$ и $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\tau_{j-1} < \tau_j$, $j = \overline{1,n}$. Будем в цилиндре $\Omega \times (\tau_0, \tau_n)$ искать решение уравнения (30), удовлетворяющее краевому условию (31) и условиям

$$P_j(u(x,\tau_j) - u_j(x)) = \sum_{k:\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \langle (u(\tau_j) - u_j), \varphi_k \rangle\, \varphi_k(x) = 0, \quad j = \overline{0,n} \tag{32}$$

многоточечной начально-конечной задачи. Из теоремы 7 и леммы 1 вытекает

Теорема 8. [21] *При любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$, $\nu \in C^1((\tau_0,\tau_n);\mathbb{R}_+)$, а также для любых $u_j \in \mathfrak{U}^{1j}$, $j = \overline{0,n}$; $f : (\tau_0,\tau_n) \to \mathfrak{F}$ такой, что выполнены условия*

$$(\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - Q)f \in H^1(\mathfrak{F}^0), \quad Q_j f \in L_2(\tau_0,\tau_n;\mathfrak{F}_j^1), \quad j = \overline{0,n}, \tag{33}$$

и для любых $u \in H^1(\mathfrak{U})$ существует единственное решение $u \in H^1(\mathfrak{U})$ многоточечной начально-конечной задачи (30), (31), (32), *которое имеет вид*

$$u(x,t) = -\sum_{\lambda_k = \lambda} \frac{\langle f(t), \varphi_k \rangle}{\nu(t)(\lambda_k - id\lambda_k^2)}\, \varphi_k(x) +$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{k:\mu_k\in\sigma_j^L(M)}\exp\left(\frac{\lambda_k-id\lambda_k^2}{\lambda-\lambda_k}\int\limits_{\tau_j}^{t}\nu(\zeta)d\zeta\right)\langle u_j,\varphi_k\rangle\varphi_k(x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k:\mu_k\in\sigma_j^L(M)}\int\limits_{\tau_j}^{t}\exp\left(\frac{\lambda_k-id\lambda_k^2}{\lambda-\lambda_k}\int\limits_{s}^{t}\nu(\zeta)d\zeta\right)\frac{\langle f(s),\varphi_k\rangle}{\lambda_k-id\lambda_k^2}\varphi_k(x)\,ds\right].$$

5. Детерминированное уравнение соболевского типа с (L,p)-секториальным оператором и многоточечным начально-конечным условием

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Определение 9. ([25], гл.3) Оператор M называется *p-секториальным относительно* оператора L с числом $p\in\mathbb{N}_0$ (короче, *(L,p)-секториальным*), если существуют константы $K\in\mathbb{R}_+$, $a\in\mathbb{R}$, $\Theta\in(\pi/2,\pi)$ такие, что сектор

$$S_{a,\Theta}^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg(\mu-a)|<\Theta,\ \mu\neq a\},\quad S_{a,\Theta}^L(M)\subset\rho^L(M),$$

причем

$$\max\left\{\left\|R_{(\mu,p)}^L(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})},\left\|L_{(\mu,p)}^L(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\right\}\le\frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}|\mu_k-a|}$$

при любых $\mu_k\in S_{a,\Theta}^L(M)$, $k=\overline{0,p}$. Здесь $R_{(\mu,p)}^L(M)$, $L_{(\mu,p)}^L(M)$ задаются формулами (17).

Лемма 2. [25] *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда существует аналитическая в секторе $\Sigma=\{\tau\in\mathbb{C}:|\arg\tau|<\Theta-\pi/2,\ \tau\neq0\}$, где Θ из определения 9, и равномерно ограниченная разрешающая полугруппа $\{U^t:t>0\}$ ($\{F^t:t>0\}$) уравнения (7), $f\equiv0$, причем задается она интегралами типа Данфорда – Тейлора*

$$U^t=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu\qquad\left(F^t=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}L_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu\right),$$

где $t\in\mathbb{R}_+$, контур $\Gamma\subset S_{a,\Theta}^L(M)$ такой, что $|\arg\mu|\to\Theta$ при $\mu\to\infty$, $\mu\in\Gamma$.

Лемма 3. [25] *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда $\lim\limits_{t\to0+}U^tu=u$ для любого $u\in\operatorname{im}R_{(\mu,p)}^L(M)$ и $\lim\limits_{t\to0+}F^tf=f$ для любого $f\in\operatorname{im}L_{(\mu,p)}^L(M)$).*

Введем в рассмотрение ядра $\ker U^{\cdot}=\mathfrak{U}^0$, $\ker F^{\cdot}=\mathfrak{F}^0$ и образы $\operatorname{im}U^{\cdot}=\mathfrak{U}^1$, $\operatorname{im}F^{\cdot}=\mathfrak{F}^1$ этих полугрупп. Нетрудно показать, что $\overline{\mathfrak{U}^0\oplus\mathfrak{U}^1}=\overline{\mathfrak{U}^0}\oplus\overline{\mathfrak{U}^1}=\mathfrak{U}^0\oplus\mathfrak{U}^1$, $\overline{\mathfrak{F}^0\oplus\mathfrak{F}^1}=\overline{\mathfrak{F}^0}\oplus\overline{\mathfrak{F}^1}=\mathfrak{F}^0\oplus\mathfrak{F}^1$. Нам потребуется более сильное утверждение (19), которое имеет место либо в случае сильной (L,p)-секториальности оператора M справа (слева), $p\in\mathbb{N}_0$, либо рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) [25]. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\operatorname{dom}M\cap\mathfrak{U}^k$), $k=0,1$.

Лемма 4. [25] *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда*

(i) $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{F}^0)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{F}^0)$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$,

(ii) операторы $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$, $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$.

И если оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева, $p \in \mathbb{N}_0$, то $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, а также проектор $P = s-\lim\limits_{t\to 0+} U^t$ $(Q = s-\lim\limits_{t\to 0+} F^t)$, расщепляющий пространство $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$ согласно (19), причем $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$ $(\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q)$.

Введем еще одно условие (20), которое имеет место в случае сильной (L,p)-секториальности оператора M, $p \in \mathbb{N}_0$. (Ранее было показано, что (19) вместе с условием (L,p)-секториальности оператора M, $p \in \mathbb{N}_0$, дает сильную (L,p)-секториальность оператора M справа (слева), $p \in \mathbb{N}_0$, а если к ним добавить условие (20), то получим сильную (L,p)-секториальность оператора M, $p \in \mathbb{N}_0$). Тогда оператор $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен степени p, а оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ секториален.

Наконец, введем еще одно важное условие на относительный спектр оператора M [37] –

$$\begin{cases} \sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{n} \sigma_j^L(M),\ n \in \mathbb{N},\ \text{причем } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset \text{ содержится в ограниченной} \\ \quad \text{области } D_j \subset \mathbb{C} \text{ с кусочно гладкой границей } \partial D_j = \Gamma_j \subset \mathbb{C}. \text{ Кроме того,} \\ \qquad \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset \text{ и } \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset \text{ при всех } j,k,l = \overline{1,n}, k \neq l. \end{cases} \tag{34}$$

Построим относительно спектральные проекторы [39]

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} R_\mu^L(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}),\ Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} L_\mu^L(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}),\ j = \overline{1,n}. \tag{35}$$

причем оказывается, что при условии сильной (L,p)-секториальности оператора M $P_jP = PP_j = P_j$ и $Q_jQ = QQ_j = Q_j$, $j = \overline{1,n}$. Значит, в данном случае существуют проекторы $P_0 = P - \sum\limits_{j=1}^{n} P_j$, $P_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $Q_0 = Q - \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j$, $Q_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Зафиксируем $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$; возьмем $\tau_0 = 0$ и $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\tau_{j-1} < \tau_j$, $j = \overline{1,n}$. Потребуем выполнения условий (19), (20), (34) и рассмотрим многоточечное начально-конечное условие [37]

$$\lim_{t\to\tau_0+} P_0(u(t) - u_0) = 0,\ P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{36}$$

для линейного уравнения соболевского типа (7). Вектор-функцию $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C([0,\tau];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (7), назовем его *решением*; решение $u = u(t)$ уравнения (7) назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи* (7), (36), если выполняется условие (36).

Лемма 5. [39] *Пусть оператор M (L,p)-секториален, причем выполнены* (19), (20), (34). *Тогда $U^t = \sum\limits_{j=0}^{n} P_jU^t = \sum\limits_{j=0}^{n} U_j^t$, $F^t = \sum\limits_{j=0}^{n} Q_jF^t = \sum\limits_{j=0}^{n} F_j^t$, причем U_j^t и F_j^t можно* *представить в виде*

$$U_j^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu, \quad F_j^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} L_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu, \ j=\overline{1,n}. \tag{37}$$

Далее положим $\operatorname{im} P_j = \mathfrak{U}^{1j}$, $\operatorname{im} Q_j = \mathfrak{F}^{1j}$, $j=\overline{0,n}$. По построению $\mathfrak{U}^1 = \bigoplus\limits_{j=0}^{n}\mathfrak{U}^{1j}$ и $\mathfrak{F}^1 = \bigoplus\limits_{j=0}^{n}\mathfrak{F}^{1j}$. Обозначим через L_j (M_j) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{1j}$ $(\operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^{1j})$, $j=\overline{0,n}$. Нетрудно показать, что операторы $L_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $M_j \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $j=\overline{0,n}$, причем в силу (20) существует оператор $L_j^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{1j};\mathfrak{U}^{1j})$, $j=\overline{0,n}$. Также нетрудно показать, что оператор $S_0 = L_0^{-1}M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}_0)$ будет секториальным, а оператор $S_j = L_j^{-1}M_j : \mathfrak{U}^{1j} \to \mathfrak{U}^{1j}$, $j=\overline{1,n}$, – ограниченным. Теперь у нас все готово для доказательства однозначной разрешимости задачи (36) для уравнения (7), которое в силу (L,p)-секториальности оператора M, условий (19), (20), (34) редуцируется к виду

$$\begin{cases} G\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}f^0, \\ \dot{u}^{1j} = S_j u^{1j} + L_{1j}^{-1}f^{1j}, \ j=\overline{0,n}, \end{cases}$$

где $f^0 = (\mathbb{I}-Q)f$, $f^{1j} = Q_j f$, $u^0 = (\mathbb{I}-P)u$, $u^{1j} = P_j u$, $j=\overline{0,n}$, оператор $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$.

Теорема 9. [39] *Пусть оператор M (L,p)-секториален, $p \in \mathbb{N}_0$, причем выполнены условия* (19), (20), (34). *Тогда для любой вектор-функции $f^0 \in C([0,\tau];\mathfrak{F}^0) \cap C^{p+1}((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$, $f^1 \in C([0,\tau];\mathfrak{F}^1)$ и для любых $u_j \in \mathfrak{U}$, $j=\overline{0,n}$, существует единственное решение задачи (7), (36), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} G^q M_0^{-1} f^{0(q)}(t) + \sum_{j=0}^{n}\left(U_j^{t-\tau_j}u_j + \int\limits_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s}L_{1j}^{-1}Q_j f(s)ds\right). \tag{38}$$

6. Стохастическое эволюционное уравнение соболевского типа

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство. Рассмотрим вещественное сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ снабжено борелевской σ-алгеброй. Назовем *($\mathfrak{U}$-значной) случайной величиной* измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathfrak{U}$; пространство случайных величин будет обозначаться $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}(\Omega;\mathfrak{U})$. Выделим подпространство

$$\mathbf{L_2} \equiv \mathbf{L_2}(\Omega;\mathfrak{U}) = \left\{\xi \in \mathcal{V} : \int\limits_{\Omega} ||\xi(\omega)||^2 d\mathbf{P}(\omega) < +\infty\right\},$$

где $||\xi||^2 = \langle\xi,\xi\rangle$ в пространстве $\mathcal{V}$. Отметим, что все случайные величины из $\mathcal{V}$, имеющие нормальное распределение (т.е. *гауссовы*), содержаться в пространстве $\mathbf{L_2}$.

Рассмотрим два отображения – $f : \mathfrak{I} \to \mathcal{V}$, ставящее в соответствие каждому $t \in \mathfrak{I}$ случайную величину $\xi \in \mathcal{V}$, и $g : \mathcal{V} \times \Omega \to \mathfrak{U}$, ставящее в соответствие каждой паре (ξ, ω) точку $\xi(\omega) \in \mathfrak{U}$, где $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ – некоторый промежуток. *($\mathfrak{U}$-значный) случайный процесс* – это отображение $\eta : \mathfrak{I} \times \Omega \to \mathfrak{U}$, имеющее вид $\eta = \eta(t,\omega) = g(f(t),\omega)$. Отметим, что случайный процесс $\eta = \eta(t,\cdot)$, т.е если зафиксировать $t \in \mathfrak{I}$, является случайной величиной, а случайный процесс $\eta = \eta(\cdot,\omega)$, т.е. если зафиксировать $\omega \in \Omega$, будет называться*(выборочной) траекторией*. Назовем *непрерывным* случайный процесс η, если при почти всех (п.в.)) $\omega \in \Omega$ траектория $\eta(t,\omega)$ непрерывна на $\mathfrak{I}$.

Обозначим символом $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\mathfrak{I} \times \Omega; \mathfrak{U})$ пространство случайных процессов. Пространство непрерывных случайных процессов, чьи случайные величины принадлежат $\mathbf{L_2}$, обозначим $\mathbf{CL_2}$, т.е. $\eta \in \mathbf{CL_2}$, если $\eta(t,\cdot) \in \mathbf{L_2}$ при всех $t \in \mathfrak{I}$. Отметим, что $\mathbf{CL_2}$ является подпространством $\mathcal{P}$ и содержит, в частности, те случайные процессы, все траектории которых п.н. непрерывны, а все (независимые) случайные величины – гауссовы.

Рассмотрим оператор $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$. Его спектр $\sigma(K)$ положителен, т.е. $\sigma(K) \in \mathbb{R}_+$. Это возможно, когда $\sigma(K)$ положительно определен и самосопряжен. Последовательность собственных значений оператора K обозначим через $\{\lambda_k\}$. Пусть спектр $\sigma(K)$ дискретен, конечнократен и сгущается только к точке нуль, тогда $\{\lambda_k\}$ занумеруем по невозрастанию с учетом их кратности. Оператор K называется *ядерным*, если $\operatorname{Tr} K = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$. Отметим, что линейная оболочка множества $\{\varphi_k\}$ соответствующих собственных векторов оператора K плотна в $\mathfrak{U}$. Рассмотрим *броуновские движения*, иначе говоря последовательность $\{\xi_{jk}\}$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ независимых одномерных (стандартных) винеровских процессов $\xi_{jk}(t) \equiv \xi_{jk}(t,\omega)$, $\xi_{jk} : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Определение 10. [36] Случайный процесс

$$W(t) \equiv W(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\xi_{jk}\varphi_k,\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{39}$$

обладающий свойствами

(W1) $W(0) = 0$ п.в. на Ω, и траектории п.н. непрерывны на $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(W2) Траектории винеровского K-процесса п.н. ни в одной точке недифференцируемы $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и на любом промежутке $\mathfrak{I} \subset \overline{\mathbb{R}_+}$ имеют неограниченнную вариацию. называется *($\mathfrak{U}$-значным, ядерным) винеровским K-процессом.*

Теорема 10. [36] *При любом ядерном операторе $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и последовательности броуновских движений $\{\xi_{jk}\}$ винеровский K-процесс $W \in \boldsymbol{CL_2}$.*

Для разрешимости задачи (8), (9) нам понадобится еще одно условие

$$QN = N, \tag{40}$$

тогда формальное $u = u(t)$ решение многоточечной начально-конечной задачи для уравнения (8) будет иметь вид

$$u(t) = \sum_{j=0}^{m} \left[U^{t-\tau_j}\xi_j + L_{1j}^{-1}Q_jNW(t) + \int_{\tau_j}^{t} U^{t-s}L_{1j}^{-1}Q_jNdW(s) \right]. \tag{41}$$

Теорема 11. [13] *Пусть оператор M (L,p)-секториален, и выполнены условия* (19), (20), (34), (40). *Тогда для любых $\mathfrak{U}^1$-значных гауссовых случайных величин ξ_j, $j=\overline{0,n}$, не зависящих от $W(t)$ и удовлетворяющих условию* (10), *существует единственное сильное решение задачи* (8), (9), *которое к тому же имеет вид* (41).

Из теоремы в частности, вытекает, что решение $u=u(t)$ – гауссов случайный процесс.

7. Решения многоточечной начально-конечной задачи для эволюционной модели Девиса

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим теперь стохастическое эволюционное уравнение (5) с краевыми условиями

$$u(x,t)=\Delta u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+. \tag{42}$$

Наша цель – редукция (5), (42) к стохастическому уравнению (8). Первым шагом к данной цели будет определение ядерного оператора K. Для этого найдем функцию $u=u(x)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению Пуассона и условию Дирихле. Такой выбор обладает следующим недостатком. Поскольку собственные значения $\{\mu_k\}$ спектральной задачи

$$-\Delta\varphi_k=\mu_k\varphi_k, \tag{43}$$

в области Ω, имеют следующую асимптотику

$$\mu_k \sim k^{\frac{2}{d}},\ k\to\infty, \tag{44}$$

то оператор Грина задачи Дирихле для (43) будет ядерным, если только $d=1$.

Для преодоления этого недостатка предлагается в качестве K взять оператор Грина следующей задачи

$$(-1)^m\Delta^m u=f, \tag{45}$$

$$(-1)^l\Delta^l u(x)=0,\ x\in\partial\Omega,\ l=\overline{0,m-1}. \tag{46}$$

Внимательно рассмотрев соответствующую спектральную задачу

$$(-1)^m\Delta^m\varphi_k=\nu_k\varphi_k \tag{47}$$

в области Ω с условиями (46), можно заметить, что собственные функции задач (43) и (47) одни и те же, однако собственные значения $\nu_k=\lambda_k^m$. Ввиду асимптотики (44)

$$\nu_k\sim k^{\frac{2m}{d}},\ k\to\infty,$$

поэтому путем подбора m можно рассматривать области любой размерности.

В дальнейшем мы считаем, что выбор подходящего числа $m\in\mathbb{N}$ сделан. (Должно быть $m\geq 2$, если мы хотим рассматривать трехмерные области). Положим $\lambda_k=\nu_k^{-1}$ и формулой (39) определим K-винеровский процесс, где $\{\varphi_k\}$ – собственные функции задач (46), (47). Пусть $\mathfrak{F}=W_2^l(\Omega), l\in\mathbb{N}_0$, и $\mathfrak{U}=\{u\in W_2^{l+2}(\Omega):u(x)=0,x\in\partial\Omega\}$. Заметим, что оператор Лапласа $-\Delta:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$ – топлинейный изоморфизм. Отметим еще, что оператор K определен на пространстве $\mathfrak{U}$ и является обратным к оператору

$(-1)^m\Delta^m : \mathcal{V} \to \mathfrak{U}$, который тоже является топлинейным изоморфизмом, $\mathcal{V} = \{u \in W_2^{l+2m}$: выполнено (46)$\}$. Операторы L и M зададим формулами $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta - \beta\Delta^2$,

$$\operatorname{dom} M = \mathfrak{U} \cap \{u \in W_2^4(\Omega) : \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

Очевидно, при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а при всех $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Лемма 6. [25] *При всех $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ оператор M сильно $(L, 0)$-секториален.*

Последовательность $\{\lambda_k\}$ занумерована по невозрастанию с учетом кратности. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную (в смысле $L_2(\Omega)$) последовательность соответствующих собственных функций, $\varphi_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.

Поскольку

$$(\mu L - M)u = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu\lambda - (\mu + \alpha)\lambda_k + \beta\lambda_k^2)\langle u, \varphi_k\rangle\varphi_k$$

при любых $u \in \operatorname{dom} M$, $\mu \in \mathbb{C}$, то

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle}{\beta\lambda_k^2 - \alpha\lambda_k + \mu(\lambda - \lambda_k)}\varphi_k.$$

При рассмотрении задачи ограничимся только значениями параметра λ, лежащими в спектре оператора Δ.

Итак, пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$, тогда получим

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\beta\lambda_k^2 - \alpha\lambda_k + \mu(\lambda - \lambda_k)} + \sum_{\lambda_{k=\lambda}} \frac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\beta\lambda^2 - \alpha\lambda},$$

$$R_\mu^L(M) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\mu + \lambda_k \frac{\beta\lambda_k - \alpha}{\lambda - \lambda_k}\right)^{-1} \langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k = L_\mu^L(M),$$

$$(\nu L - M)^{-1} L_\mu^L(M) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \left(\mu + \lambda_k \frac{\beta\lambda_k - \alpha}{\lambda - \lambda_k}\right)^{-1} \times \frac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\beta\lambda_k^2 - \alpha\lambda_k + \mu(\lambda - \lambda_k)},$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = \lambda_k$. Отсюда нетрудно получить сильную $(L, 0)$-секториальность оператора M.

Тогда L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = \lambda\}\right\}. \tag{48}$$

Поскольку спектр $\sigma(\Delta)$ отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$, то из (48) следует, что L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$. Понятно, что для такого множества можно подобрать контуры $\Gamma_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, n}$, которые бы удовлетворяли условию (34). Обозначим $\sigma_j^L(M) = \sigma^L(M) \cap D_j$ и построим проекторы

$$P_j = \sum_{k:\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \langle \cdot, \varphi_k\rangle\, \varphi_k, \qquad j = \overline{0, n}.$$

Простоты ради возьмем теперь оператор $N = Q$, тогда условие (10) очевидно выполняется. Обозначим через $\{\mu_k\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа Δ в области Ω с условием (6), занумерованную по невозрастанию с учетом их кратности, а через $\{\varphi_k\}$ – последовательность собственных функций. Тогда

$$u(t) = \sum_{j:\nu_j \in \sigma_j^L(M)} \left(\sum_{k=1}^{\infty}{}' e^{\nu_k t} \langle \xi, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\lambda - \mu_k} \int_{\tau_j}^{t} e^{\nu_k (t-s)} d\xi_{jk}(s) \varphi_k \right), \qquad (49)$$

где $\{\lambda_k\}$ – собственные значения специальными образом построенного ядерного оператора K. Штрих у знака суммы означает отсутствие членов таких, что $\lambda = \mu_k$.

Теорема 12. [13] *Пусть оператор M (L, p) – секториален, и выполнены условия* (19), (20), (34), (40). *Тогда для любых $\mathfrak{U}^1$-значных гауссовых случайных величин ξ_j, $j = \overline{0, n}$ не зависящих от W(t) и удовлетворяющих условию* (10), *существует единственное сильное решение задачи* (8), (9), *которое к тому же имеет вид* (49).

8. Решения многоточечной начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа с (L, p)-ограниченным оператором

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Пусть вдобавок оператор M (L, σ)-ограничен (терминология и результаты см. [25]), тогда существуют вырожденные аналитические группы разрешающих операторов

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \quad \text{и} \quad F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu,$$

определенные на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, причем $U^0 \equiv P$, $F^0 \equiv Q$ – проекторы. Здесь γ – контур, ограничивающий область D, содержащую L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M. Для вырожденной аналитической группы корректным является понятие ядра $\ker U^\cdot = \ker P = \ker U^t$ при любом $t \in \mathbb{R}$ и образа $\operatorname{im} U^\cdot = \operatorname{im} P = \operatorname{im} U^t$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathfrak{U}^0 = \ker U^\cdot$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} U^\cdot$, и $\mathfrak{F}^0 = \ker F^\cdot$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} F^\cdot$, тогда $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$. Обозначим еще через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(\operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^k)$, $k = 0, 1$.

Теорема 13. [25] (Теорема о расщеплении). *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда*

(i) операторы $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;
(ii) операторы $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$;
(iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Положим $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$. Справедливо

Следствие 1. [25] *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда для любого $\mu \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

Назовем оператор M (L,p)-*ограниченным*, $p \in \mathbb{N}_0$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$.

Введем в рассмотрение следующее условие:

$$\left\{\begin{array}{c} \sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{n} \sigma_j^L(M),\ n \in \mathbb{N},\ \text{причем}\ \sigma_j^L(M) \neq \emptyset,\ \text{существует} \\ \text{замкнутый контур}\ \gamma_j \subset \mathbb{C},\ \text{ограничивающий область}\ D_j \supset \sigma_j^L(M), \\ \text{такой, что}\ \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset,\ \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset\ \text{при всех}\ j,k,l = \overline{1,n}, k \neq l. \end{array}\right. \tag{50}$$

Тогда имеет место

Теорема 14. [10] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$, и выполнено условие (50). Тогда*

(i) существуют вырожденные аналитические группы $U_j^t = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma_j} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu$, $j = \overline{1,n}$.

(ii) $U^t U_j^s = U_j^s U^t = U_j^{s+t}$ *при всех* $s,\ t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$;

(iii) $U_k^t U_l^s = U_l^s U_k^t = \mathbb{O}$ *при всех* $s,\ t \in \mathbb{R}$, $k,\ l = \overline{1,n}$, $k \neq l$.

Положим $U_0^t = U^t - \sum\limits_{k=1}^{n} U_k^t$, $t \in \mathbb{R}$.

Замечание 4. Рассмотрим единицы $P_j \equiv U_j^0$, $j = \overline{0,n}$, построенных (в силу условия (50)) вырожденных аналитических групп $\{U_j^t : t \in \mathbb{R}\}$, $j = \overline{0,n}$. Очевидно, $PP_j = P_jP = P_j$, $j = \overline{0,n}$, и $P_kP_l = P_lP_k = \mathbb{O}$, $k,\ l = \overline{0,n}$, $k \neq l$. Аналогично мы можем построить проекторы $Q_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, $j = \overline{0,n}$, (детали см. в [10]), такие, что $QQ_j = Q_jQ = Q_j$, $j = \overline{0,n}$; $Q_kQ_l = Q_lQ_k = \mathbb{O}$, $k,\ l = \overline{0,n}$, $k \neq l$.

Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{U}^{1j} = \operatorname{im} P_j$, $\mathfrak{F}^{1j} = \operatorname{im} Q_j$, $j = \overline{0,n}$. По построению

$$\mathfrak{U}^1 = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathfrak{U}^{1j} \text{ и } \mathfrak{F}^1 = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathfrak{F}^{1j}.$$

Через L_{1j} обозначим сужение оператора L на $\mathfrak{U}^{1j}$, $j = \overline{0,n}$, а через M_{1j} обозначим сужение оператора M на $\operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^{1j}$, $j = \overline{0,n}$. Поскольку, как нетрудно показать, $P_j\varphi \in \operatorname{dom} M$, если $\varphi \in \operatorname{dom} M$, то область определения $\operatorname{dom} M_{1j} = \operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^{1j}$ плотна в $\mathfrak{U}^{1j}$, $j = \overline{0,n}$.

Теорема 15. [10] (Обобщенная спектральная теорема). *Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор M (L,σ)-ограничен, причем выполнено условие (50). Тогда*

(i) операторы $L_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $M_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $j = \overline{0,n}$;

(ii) существуют операторы $L_{1j}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{1j};\mathfrak{U}^{1j})$, $j = \overline{0,n}$.

Зафиксируем $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$; возьмем $\tau_j \in \mathbb{R}$ такие, что $\tau_{j-1} < \tau_j$, $j = \overline{1,n}$, вектор-функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{F})$ и в предположении выполнения условия (50) рассмотрим линейное неоднородое уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{51}$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (51), назовем *решением уравнения* (51). Решение $u = u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнения (51), удовлетворяющее условиям

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{0,n}, \tag{52}$$

назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи для уравнения* (51).

Теорема 16. [10] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \mathbb{N}_0$, причем выполнено условие (50). Тогда для любых $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{F})$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$, существует единственное решение задачи (51), (52), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t) + \sum_{j=0}^{n} U_j^{t-\tau_j} u_j + \sum_{j=0}^{n} \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} L_{j1}^{-1} Q_j f(s) ds.$$

9. Модификация математической модели транспортного потока на перекрестке

Рассмотрим уравнения Осколкова [36]

$$\lambda_i u_{ikt} - u_{iktxx} = \nu_i u_{ikxx} + f_{ik}, \tag{53}$$

заданные на каждом ребре E_{ik} каждого геометрического графа $\mathbf{G}_i$, где коэффициенты $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $\nu_i \in \mathbb{R}_+$. Здесь $u_{ik} = u_{ik}(x,t)$, $x \in [0,l_k]$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\equiv \{0\} \cup \mathbb{R}_+)$, $k = \overline{1,8}$, характеризует среднюю скорость транспортного потока на множестве ребер E_k графа $\mathbf{G}_i$. Усредненной силой, которая заставляет крутиться колеса транспортных средств, будем считать $f_{ik} = f_{ik}(x,t)$, $(x,t) \in [0,l_{ik}] \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Коэффициент λ равен единице, поделенной на коэффициент ретардации, которые могут принимать отрицательные значения, поэтому считаем $\lambda \in \mathbb{R}$. Вязкость транспортного потока, а именно, его способность «гасить» резкие перепады скорости, задает коэффициент ν, в силу физического смысла $\nu \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим теперь первое условие на скоростной режим при проезде перекрестка – скорость въезда транспортного средства на перекресток должна равняться скорости съезда, иначе на перекрестке возможны заторы или ДТП. Данное условие в математической модели является *условием непрерывности*

$$\begin{gathered} u_{ik}(0,t) = u_{im}(l_{im},t) = u_{il}(0,t) = u_{in}(l_{in},t), \\ \forall E_{ik}, E_{il} \in E^\alpha(V_{ij}),\ \forall E_{im}, E_{in} \in E^\omega_{op}(V_{ij}). \end{gathered} \tag{54}$$

Здесь через $E^\alpha(V_{ij})$ обозначено множество ребер графа $\mathbf{G}_i$, выходящих из вершины V_{ij}, а через $E^\omega_{op}(V_{ij})$ обозначено множество ребер графа $\mathbf{G}_i$, соответствующих въезду в вершину V_{ij} на разрешающий сигнал светофора.

Второе условие скоростного режима при проезде перекрестка – количество выезжающих на перекресток транспортных средств было равно количеству отъезжающих. В математической модели оно сформулировано как *условие баланса потоков*

$$\sum_{E_{ik} \in E^\alpha(V_{ij})} d_{ik} u_{ikx}(0,t) - \sum_{E_{im} \in E^\omega_{op}(V_{ij})} d_{im} u_{imx}(l_{im},t) = 0. \tag{55}$$

Третье условие скоростного режима при проезде перекрестка – условие «запрета на движение»

$$u_{ik}(l_{ik},t) = 0, \quad \forall E_{ik} \in E^{\omega}_{cl}(V_{ij}), \tag{56}$$

где $E^{\omega}_{cl}(V_{ij})$ обозначено множество ребер графа $\mathbf{G}_i$, соответствующих въезду в вершину V_{ij} на запрещающий сигнал светофора.

Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathbf{L_2}(\mathbf{G}_i) = \{g_i = (g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{ik}, \ldots) : g_{ik} \in L_2(0, l_{ik})\}$$

со скалярным произведением $\langle g, h \rangle_i = \sum\limits_{E_{ik}\in\mathcal{E}_i} d_{ik} \int\limits_0^{l_{ik}} u_{ik} v_{ik} dx$. Кроме того, рассмотрим пространство

$$\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) = \big\{u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{ik}, \ldots) : u_{ik} \in W^1_2(0, l_{ik})$$
$$\text{и выполнены (52), (56) в каждой вершине } V_{ij} \in \mathcal{V}_i\}$$

со скалярным произведением $[u, v]_i = \sum\limits_{E_{ik}\in\mathcal{E}_i} d_{ik} \int\limits_0^{l_{ik}} (u_{ikx} v_{ikx} + u_{ik} v_{ik})\, dx$. Отождествим $\mathbf{L_2}(\mathbf{G}_i)$ со своим сопряженным и через $\mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ обозначим сопряженное к $\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство. Отметим плотные и непрерывные вложения $\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) \hookrightarrow \mathbf{L_2}(\mathbf{G}_i) \hookrightarrow \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ и заметим, что в силу теорем вложения Соболева функции из $W^1_2(0, l_{ik})$ п.в. на $[0, l_{ik}]$ совпадают с абсолютно непрерывными функциями, поэтому пространства $\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$ определены корректно.

Возьмем $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ и формулой

$$\langle L_i u_i, v_i \rangle_i = \sum_{E_{ik}\in\mathcal{E}_i} d_{ik} \int\limits_0^{l_{ik}} (u_{ikx} v_{ikx} + \lambda_i u_{ik} v_{ik}) dx, \ \ u_i, v_i \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i),$$

зададим оператор $L_i \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i); \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i))$. Рассмотрим пространство

$$\mathfrak{A}(\mathbf{G}_i) = \big\{u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{ik}, \ldots) : u_{ik} \in C^2(0, l_{ik}) \cap C^1[0, l_{ik}]$$
$$\text{и выполнены условия (52), (56), в каждой вершине } V_{ij} \in \mathcal{V}_i\big\}.$$

Очевидны плотные и непрерывные вложения $\mathfrak{A}(\mathbf{G}_i) \hookrightarrow \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$, причем $\langle(\lambda_i u_i - u_{ixx}, v_i)\rangle_i = \langle L_i u_i, v_i \rangle_i$ при всех u_i, $v_i \in \mathfrak{A}(\mathbf{G}_i)$. Таким образом условия баланса потоков (55) «спрятаны» в смысле О.А. Ладыженской в определение операторов L_i.

Возьмем $\nu_i \in \mathbb{R}_+$, положим $M_i = \nu_i(\lambda_i \mathbb{I}_i - L_i)$, где $\mathbb{I}_i : \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) \to \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ является оператором вложения. Рассмотрим уравнение

$$L_i u_{it} = M_i u_i + f_i. \tag{57}$$

Лемма 7. [36] *Операторы $L_i : \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) \to \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ линейны и непрерывны, спектр $\sigma(L_i)$ является вещественным, дискретным, конечнократным и сгущается только к $-\infty$. Операторы $M_i : \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) \to \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ линейны и непрерывны.*

Следствие 2. *Операторы L_i – фредгольмовы, причем $\ker L_i = \{0\}$, если $0 \notin \sigma(L_i)$.*

Лемма 8. [36] *Пусть параметры $\nu_i \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, тогда оператор M_i $(L_i, 0)$-ограничен.*

Возьмем $\tau_j \in \overline{\mathbb{R}_+}$, $j = \overline{0,n}$, такие что $\tau_{j-1} < \tau_j$ для $j = \overline{1,n}$, $u_{ij} \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$, $j = \overline{0,n}$. Вектор-функцию $u_i \in C^1((\tau_{i-1},\tau_i);\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i))$, удовлетворяющую (57) при некотором $f_i \in \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$, назовем *решением уравнения* (57), удовлетворяющее многоточечному начально-конечному условию

$$P_i(u_i(\tau_j) - u_{ij}) = 0, \ j = \overline{0,n}, \tag{58}$$

где P_i – *относительно спектральные проекторы*, причем в момент времени τ_j скорость, которая была потоком к этому моменту становится начальной.

Лемма 9. [15] *При любых λ_i, $\nu_i \in \mathbb{R}_+$, $f_i \in \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ и $u_{0i} \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$ существует единственное решение задачи (57), (58).*

Теперь условиями $u_{m+1}(\tau_m) = u_m(\tau_m)$, $m = 1, 2, \ldots, i, \ldots$, «склеим» решения задач (57), (58), существование и единственность которых вытекает из леммы 8. С одной стороны, по определению $u_m(\tau_m) \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_m)$; с другой стороны, лемма 8 требует, чтобы $u_m(\tau_m) \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_{m+1})$. Поэтому в силу леммы 8 имеет место следующая

Теорема 17. [15] *При любых λ_i, $\nu_i \in \mathbb{R}_+$, $f_i \in \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ и $u_0 \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_1)$, таких, что $u_m(\tau_m) \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_{m+1}), m = 1, 2, \ldots, i, \ldots$, существует единственное решение задачи (53) – (56), (58).*

В заключение авторы считают своим приятным долгом поздравить нашего Учителя – профессора Георгия Анатольевича Свиридюка с семидесятилетним юбилеем и поблагодарить его за многолетнюю поддержку и интерес к нашим исследованиям, за доброжелательную и конструктивную критику и, при необходимости, за стимулирующее воздействие на нашу работоспособность.

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).

Литература / References

1. Alshin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow Up in Nonlinear Sobolev Type Equations.* Berlin, Walter de Gruyter, 2011. DOI: 10.1515/9783110255294
2. Aranson I.S., Kramer L. The World of the Complex Ginzburg–Landau Equation. *Reviews of Modern Physics*, 2002, vol. 74, no. 1, pp. 99–143.
3. Barenblatt G.I., Zheltov Iu.P., Kochina I.N. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303.
4. Chen P.J., Gurtin M.E. On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 1968, vol. 19, no. 4, pp. 614–627.
5. Demidenko, G.V., Uspenskii, S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest Order Derivative.* N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, 2003.
6. Dzektser E.S. [Generalization of the Equation of Motion of Ground Waters with free Surface]. *Doklad Akademia Nauk SSSR*, 1972, vol. 202, no. 5, pp. 1031–1033. (in Russian)
7. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of “Noises”. *Abstract and Applied Analysis*, 2015, article ID: 697410. DOI: 10.1155/2015/697410

8. Favini A., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of "Noises". *Mediterranian Journal of Mathematics*, 2016, vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI: 10.1007/s00009-016-0765-x
9. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive "White Noise". *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, vol. 15, no 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185
10. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 2018, article ID: 128.
11. Hallaire M. Soil Water Movement in the Film and Vapor Phase under the Influence of Evapotranspiration. Water and Its Conduction Insoils. *Proceedings of XXXVII Annual Meeting of the Highway Research Board, Highway Research Board Special Report*, 1958, no. 40, pp. 88–105.
12. Keller A.V., Zagrebina S.A. Some Generalizations of the Showalter–Sidorov Problem for Sobolev-Type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 5–23. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp150201
13. Konkina A.S. Multipoint Initial-Final Value Problem for the Model of Davis with Additive White Noise. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 144–149. DOI: 10.14529/mmp170212
14. Konkina A.S. Numerical Research of the Mathematical Model for Traffic Flow. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2019, vol. 12, no. 4, pp. 128–134. DOI: 10.14529/mmp190411
15. Konkina A.S., Mukhametyarova A.A. Macro Model of Transport Flow at the Crossroads. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2021, vol. 8, no. 4, pp. 37–44. DOI: 10.14529/jcem210405
16. Manakova N.A., Dyl'kov A.G. Optimal Control of the Solutions of the Initial-Finish Problem for the Linear Hoff Model. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 1–2, pp. 220–230. DOI: 10.1134/S0001434613070225
17. Manakova, N.A., Sviridyuk, G.A. An Optimal Control of the Solutions of the Initial-Final Problem for Linear Sobolev Type Equations with Strongly Relatively p-Radial Operator. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 213–224. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_13
18. Manakova N.A. Mathematical Models and Optimal Control of the Filtration and Deformation Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, vol. 8, no 3, pp. 5–24. DOI: 10.14529/mmp150301
19. Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A. The Nonautonomous Linear Oskolkov Model on a Geometrical Graph: The Stability of Solutions and the Optimal Control Problem. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 257–271. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_16
20. Sagadeeva M.A. Degenerate Flows of Solving Operators for Nonstationary Sobolev Type Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 22–30. DOI: 10.14529/mmph170103
21. Sagadeeva M.A., Zagrebina S.A., Manakova N.A. Optimal Control of Solutions of a Multipoint Initial-Final Problem for Non-Autonomous Evolutionary Sobolev Type Equation. *Evolution Equations and Control Theory*, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 473–488. DOI: 10.3934/eect.2019023

22. Sviridyuk G.A. A Problem of Showalter. *Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 2, pp. 338–339.

23. Sviridyuk G. A. Solvability of a Problem of the Thermoconvection of a Viscoelastic Incompressible Fluid, *Soviet Mathematics*, 1990, vol. 34, no. 12, pp. 80–86.

24. Sviridyuk G.A. Sobolev-Type Linear Equations and Strongly Continuous Semigroups of Resolving Operators with Kernels. *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics*, 1995, vol. 50, no. 1, pp. 137–142.

25. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, VSP, 2003.

26. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff Equations on Graphs. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 139–145.

27. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. An Optimal Control Problem for a Class of Linear Equations of Sobolev Type. *Russian Mathematics*, 1996, vol. 40, no. 12, pp. 60–71.

28. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A., Zagrebina S.A. Multipoint Initial-Final Problem for One Class of Sobolev Type Models of Higher Order with Additive White Noise. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018. vol. 11, no. 3, pp. 103–117. DOI: 10.14529/mmp180308

29. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Hudyakov Yu.V. Dinamic Measurement in Spaces of "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 4–11.

30. Showalter R.E. The Sobolev type Equations. *Applicable Analysis*, 1975, vol. 5, no. 1, pp. 15–22.

31. Showalter R.E. The Sobolev type Equations. II. *Applicable Analysis*, 1975, vol. 5, no 2, pp. 81–99.

32. Sukacheva T.G., Kondyukov A.O. On a Class of Sobolev-Type Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 5–21.

33. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. The Optimal Control over Solutions of the Initial-finish Value Problem for the Boussinesque–Löve Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 5 (264), pp. 13–24. (in Russian)

34. Zamyshlyaeva A.A. The Higher-Order Sobolev-Type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 5–28.

35. Zagrebina S.A., Sagadeeva M.A. The Generalized Splitting Theorem for Linear Sobolev type Equations in Relatively Radial Case. *The Bulletin of Irkutsk State University. Mathematics*, 2014, no. 7, pp. 19–33.

36. Zagrebina S.A., Soldatova E.A., Sviridyuk G.A. The Stochastic Linear Oskolkov Model of the Oil Transportation by the Pipeline. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 317–325. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_20

37. Zagrebina S.A., Konkina A.S. The Multipoint Initial-Final Value Condition for the Navier–Stokes Linear Model. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 132–136. DOI: 10.14529/mmp150111

38. Zagrebina S. A., Konkina A. S. Traffic Management Model. *Proceedings of 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing*, 2016, article ID: 7911712. DOI 10.1109/ICIEAM.2016.7911712

39. Zagrebina S., Sukacheva T., Sviridyuk G. The Multipoint Initial-Final Value Problems for Linear Sobolev-Type Equations with Relatively p-Sectorial Operator and Additive "Noise". *Global and Stochastic Analysis*, 2018, vol. 5, no. 2, pp. 129–143.

Софья Александровна Загребина, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математического и компьютерного моделирования», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), zagrebinasa@susu.ru.

Александра Сергеевна Конкина, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математического и компьютерного моделирования», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), konkinaas@susu.ru.

Поступила в редакцию 3 декабря 2021 г.

MSC 35K70, 60H30 **DOI: 10.14529/mmp220104**

THE NON-CLASSICAL MODELS OF MATHEMATICAL PHYSICS THE MULTIPOINT INITIAL-FINAL VALUE CONDITION

***S.A. Zagrebina*[1], *A.S. Konkina*[1]**
[1]South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: zagrebinasa@susu.ru, konkinaas@susu.ru

The article contains a review of the results obtained by the authors in the field of non-classical models of mathematical physics, for which we consider the multipoint initial-final value conditions that generalize Cauchy conditions and Showalter–Sidorov conditions. Recall that non-classical models of mathematical physics are models, whose representations in the form of equations or systems of equations in partial derivatives do not fit within the framework of one of the classical types: elliptic, parabolic or hyperbolic.

Abstract results are illustrated by concrete multipoint initial-final value problems for partial differential equations in various statements appeared recently in applications. Among them, we consider the non-autonomous Chen–Gurtin model with complex coefficients, the stochastic evolutionary Davis model, the macro model of transport flow at the crossroads based on the Oskolkov equations considered in the system of geometric graphs, taking into account the condition of continuity, balance of flows and the condition of the ban on traffic.

Keywords: Sobolev type equations; degenerate C_0-semiflow of solving operators; resolving (semi)groups of operators; relatively spectral projectors; multipoint initial-final value condition; non-autonomous Chen–Gurtin model; stochastic Davis model; macro model of traffic flow at a crossroad.

Received December 3, 2021