

**ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА.
НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА**

Н.А. Манакова¹, О.В. Гаврилова¹, К.В. Перевозчикова¹

¹Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
Российская Федерация

Статья имеет обзорный характер и содержит результаты исследования морфологии фазовых пространств полулинейных моделей соболевского типа. Представлены исследования тех математических моделей, чьи фазовые пространства лежат на гладких банаховых многообразиях с особенностями в зависимости от параметров задачи, а именно, модели ХOFFфа, модели Плотникова, модели распределенного брюсселятора и модели распространения нервного импульса. В первой части статьи приведены условия, при которых фазовые многообразия изучаемых моделей – простые гладкие банаховы многообразия, из чего вытекает единственность решения задачи Шоуолтера – Сидорова. Во второй части статьи приведены условия, при которых фазовые многообразия исследуемых моделей содержат особенности, из чего вытекает неединственность решения задачи Шоуолтера – Сидорова.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; фазовое пространство; морфология фазового пространства; банаховы многообразия; задача Шоуолтера – Сидорова; k-сборка Уитни.

Посвящается юбилею профессора Г.А. Свиридюка

Введение

Обширный класс моделей математической физики основан на полулинейных неклассических уравнениях или системах уравнений в частных производных, неразрешенных относительно производной по времени [17, 24]. Такие уравнения принято называть уравнениями соболевского типа [1, 4, 5, 16, 38, 40]. Уравнения представленного класса и начальные задачи для них не удается исследовать классическими методами в следствие возможного вырождения оператора при старшей производной, поэтому для их исследования требуется развитие новых и модификации уже известных методов исследования [31, 34, 35, 41, 42]. Представленная работа носит обзорный характер и содержит полученные ранее результаты исследований научной школы, созданной и возглавляемой профессором Г.А. Свиридюком, по изучению нелинейных уравнений или систем уравнений, фазовые пространства которых имеют особенности (*k*-сборку Уитни). Рассмотрим математические модели, основанные на уравнениях или системах уравнений соболевского типа:

– системе уравнений распределенного брюсселятора [2, 18, 37]

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2 w, \\ \varepsilon_2 w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 v - v^2 w, \end{cases} \quad (1)$$

– системе уравнений Фитц Хью – Нагумо [6–8, 21]

$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ \varepsilon_2 w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3, \end{cases} \quad (2)$$

– системе уравнений Плотникова [22, 23]

$$\begin{cases} v_t = v_{ss} - w_{ss}, \\ 0 = v + w_{ss} + \delta w - \beta w^3, \end{cases} \quad (3)$$

– уравнении Хоффа [12]

$$(\lambda + \Delta)v_t = \alpha_1 v + \alpha_2 v^3 + \dots + \alpha_k v^{2k-1}. \quad (4)$$

Все перечисленные выше системы уравнений будут рассмотрены в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , с однородным граничным условием Дирихле

$$v(s, t) = 0, w(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

в случае систем уравнений (1), (2), или с граничным условием Робена

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \lambda v\right) = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \lambda w\right) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6)$$

в случае системы уравнения (3), или с однородным граничным условием Дирихле

$$v(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (7)$$

в случае уравнения (4).

Математические модели (1), (5); (2), (5); (3), (6) и (4), (7) описывают процессы, протекающие в различных предметных областях (более подробно о процессах, моделируемых приведенными задачами, будет сказано в первой части статьи), но принадлежат к одному классу полулинейных моделей и будут исследованы в рамках абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \ker L \neq \{0\}. \quad (8)$$

Вектор-функцию $u \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$, которая удовлетворяет (8), будем называть решением уравнения. В силу вырожденности уравнения (8) решение задачи Коши

$$u(0) = u_0 \quad (9)$$

для него не существует при произвольном начальном значении $u_0 \in \mathfrak{U}$ [19, 36]. В работах [13, 27, 36, 39] было предложено рассматривать неклассические начальные условия, которые позволяют учесть возможное вырождение оператора L . Рассмотрим начальное условие Шоултера – Сидорова

$$L(u(0) - u_0) = 0, \quad (10)$$

которое является обобщением условия Коши и эквивалентно ему в случае невырожденного уравнения ($\ker L = \{0\}$). Рассмотрение условия (10) позволяет избежать трудностей изучения задачи Коши, однако возможна неединственность решения задачи (8), (10) [3, 19, 27]. Метод фазового пространства Г.А. Свиридюка [25, 28] позволяет

найти пути решения перечисленных проблем. Он заключается в редукции исходного сингулярного уравнения к регулярному

$$\dot{u}^1 = F(u),$$

определенному не на всем пространстве, а на некотором специальном образом построенном его подмножестве \mathfrak{M} , понимаемом как фазовое пространство (многообразие). Дальнейшее изучение структуры (простоты или наличия особенностей) фазового многообразия \mathfrak{M} позволяет не только находить достаточные условия существования решения задачи (8), (9), но и исследовать вопрос единственности решения задачи (8), (10).

К настоящему времени метод фазового пространства успешно применен к исследованию уравнения (8) в случае (L, p) -ограниченного, (L, p) -секториального и (L, p) -радиального оператора M [14, 15, 19, 32], а также в случае s -монотонного и p -коэрцитивного оператора N и фредгольмового оператора L [19, 26]. Перечисленные классы уравнений описывают широкий спектр неклассических моделей математической физики. В линейном случае ($N = \mathbb{O}$) применение метода фазового пространства позволило разработать теории вырожденных (полу)групп операторов и показать, что фазовое пространство основного уравнения совпадает с образом разрешающей (полу)группы операторов [30].

В обзорной статье [19] были приведены условия для абстрактного уравнения (8), при которых фазовым многообразием уравнения служит простое гладкое банахово многообразие, из чего следует единственность решения задачи (8), (10). Совсем иная ситуация получается в случае, когда фазовое многообразие уравнения (8) лежит на многообразии, содержащем особенность, например, k -сборку Уитни [3, 33, 34]. Будем говорить, что уравнение $G(q, u) = 0$ определяет k -сборку Уитни над открытым множеством $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, если существуют функции $g_0, g_1, \dots, g_k \in C^\infty(\mathcal{U}'; \mathbb{R})$ такие, что это уравнение эквивалентно уравнению

$$0 = g_0(u) + g_1(u)q + \dots + g_k(u)q^k + q^{k+1} \quad \forall u \in \mathcal{U}'.$$

В этом случае проекция u_0 на \mathfrak{M} вдоль $\ker L$ может иметь несколько образов, и соответственно задача (8), (10) будет иметь несколько решений. Этот феномен был впервые отмечен в [27].

Исследование случая, когда фазовое многообразие уравнения (8) лежит на гладком банаховом многообразии, имеющем особенности, началось с работы [3] для математических моделей реакции-диффузии. Г.А. Свиридюком и его ученицей Т.А. Бокаревой [3] были найдены условия существования особенностей типа k -сборок Уитни фазового пространства уравнений класса реакции-диффузии, а также было показано, что фазовое пространство системы уравнений распределенного брюсселятора (1) в случае $\varepsilon_1 = 0$ содержит 1-сборку Уитни (1-сборку Уитни также принято называть складкой). Г.А. Свиридюком и его учеником В.О. Казаком [32] были найдены условия, при которых фазовое многообразие уравнения Хоффа (4) является простым банаховым многообразием. Позже в работе Г.А. Свиридюка и его ученицы И.К. Тринеевой [33] были найдены условия на параметры уравнения Хоффа, при которых фазовое многообразие содержит 2-сборку Уитни. В работе Г.А. Свиридюка и его ученицы А.Ф. Гильмутдиновой [11] было показано, что фазовое многообразие системы

уравнений Плотникова может содержать особенности типа k -сборок Уитни, и найдены условия существования нескольких решений для задачи Шоултера – Сидорова. В работах Н.А. Манаковой и О.В. Гавриловой [9, 20] было продолжено исследование особенностей фазового многообразия моделей (1) и (2) и найдены условия при которых существует одно или несколько решений задачи Шоултера – Сидорова.

Статья содержит обзор работ Г.А. Свиридюка и его последователей по изучению морфологии фазовых пространств уравнений соболевского типа, выявлению особенностей фазового многообразия основного уравнения, из которых следует неединственность решения задачи Шоултера – Сидорова, и состоит из 2 основных частей. В первой части приведены условия на параметры изучаемых моделей, при которых фазовые многообразия являются простыми, из чего вытекает единственность решения задачи Шоултера – Сидорова. Во второй части приведены условия, при которых фазовое многообразие рассматриваемой модели содержит особенность (k -сборку Уитни), из чего вытекает неединственность решения задачи Шоултера – Сидорова.

1. Простые фазовые многообразия. Единственность решения

1.1. Вырожденная модель деформации двутавровой балки

В $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим вырожденное уравнение Хоффа (4), моделирующее выпучивание двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. При этом искомая функция $v = v(s, t)$, $(s, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, моделирует отклонение балки от вертикали, параметры $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, k$, характеризуют свойства материала балки, параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ характеризует нагрузку на балку. Рассмотрим условие Шоултера – Сидорова

$$(\lambda + \Delta)(v(s, 0) - v_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega, \quad (11)$$

с краевым условием (7) для уравнения (4).

Введем пространства $\mathfrak{H} = W_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{Y} = W_2^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{X} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{B} = L_{2k}(\Omega)$, построим операторы

$$(Lv, u) = \int_{\Omega} (\lambda v u - \nabla v \cdot \nabla u) ds, \quad \forall v, u \in \mathfrak{H},$$

$$(Mv, u) = \alpha_1 \int_{\Omega} v u ds, \quad \forall v, u \in \mathfrak{H},$$

$$(N(v), u) = \int_{\Omega} (\alpha_2 v^3 + \dots + \alpha_{k-1} v^{2k-3} + \alpha_k v^{2k-1}) u ds \quad \forall v, u \in \mathfrak{B}.$$

В силу предложенного построения операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{Y})$, причем оператор L фредгольмов, при этом при всех значениях $\alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M L -ограничен, а оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{H}; \mathfrak{Y})$, если $k = 1, 2$ при $n = 4$ или $k = 1, 2, 3$ при $n = 3$ или $k \in \mathbb{N}$ при $n = 1, 2$.

Обозначим через $\{\varphi_k\}$ собственные функции однородной задачи Дирихле для оператора $(-\Delta)$, занумерованные по неубыванию, а через $\{\nu_k\}$ соответствующие им соб-

ственные значения. Построим множество

$$\mathfrak{M} = \left\{ v \in \mathfrak{H} : \int_{\Omega} (\alpha_1 + \alpha_2 v^2 + \dots + \alpha_k v^{2k-2}) v \varphi_k ds = 0, \lambda = \nu_k \right\}.$$

Теорема 1. [32] Пусть $k = 1, 2$ при $n = 4$ или $k = 1, 2, 3$ при $n = 3$ или $k \in \mathbb{N}$ при $n = 1, 2$. Тогда

- (i) если $\ker L = \{0\}$, то фазовым пространством уравнения (4) служит все пространство \mathfrak{H} ;
- (ii) если $\ker L \neq \{0\}$, все коэффициенты $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, k$, одного знака, то фазовым пространством уравнения (4) служит простое многообразие \mathfrak{M} , моделируемое подпространством $\mathfrak{H}^1 = \{v \in \mathfrak{H} : (v, \varphi_k) = 0, \lambda = \nu_k\}$;
- (iii) если все коэффициенты $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, k$, одного знака, то существует и притом единственное решение задачи (4), (7), (11).

1.2. Модель Плотникова

В полуполосе $(a, b) \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим систему уравнений Плотникова (3) с краевым условием

$$(u_s - \lambda u)(a, t) = (u_s + \lambda u)(b, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (12)$$

и начальным условием Шоултера – Сидорова

$$v(0) = v_0. \quad (13)$$

Математическая модель (3), (12) является одной из моделей фазового поля в рамках мезоскопической теории в предположении, что время релаксации равно нулю. Параметры β и δ характеризуют фазовый переход. Здесь $u = \text{col}(v, w)$, $v = v(s, t)$, $w = w(s, t)$, $(s, t) \in (a, b) \times \mathbb{R}_+$, параметры $\lambda, \delta \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Введем банахово пространство $\mathfrak{H} = W_2^1(a, b) \times W_2^1(a, b)$, гильбертово пространство $\mathfrak{X} = L_2(a, b) \times L_2(a, b)$, скалярное произведение которого определим как

$$[u, \zeta] = \int_a^b v \xi ds + \int_a^b w \eta ds = (v, \xi) + (w, \eta),$$

где $\zeta = \text{col}(\xi, \eta)$, а через (\cdot, \cdot) обозначим скалярное произведение в $L_2(a, b)$. Обозначим через \mathfrak{Y} пространство, сопряженное к \mathfrak{X} относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$. Построим линейные операторы $L, M : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$:

$$[Lu, \zeta] = \int_a^b v \xi ds, \quad v, \zeta \in \mathfrak{X};$$

$$[Mu, \zeta] = - \int_a^b v_s \xi_s ds - \lambda (v(a)\xi(a) + v(b)\xi(b)) + \int_a^b w_s \xi_s ds + \lambda (w(a)\xi(a) + w(b)\xi(b)) -$$

$$-\int_a^b w_s \eta_s ds - \lambda(w(a)\eta(a) + w(b)\eta(b)), \quad v, \zeta \in \mathfrak{H}.$$

Отметим, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, а оператор $M \in Cl(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $\text{dom } M = \mathfrak{H}$. При этом оператор M L -секториален.

Обозначим через $\{\nu_k\}$ собственные значения спектральной задачи

$$\begin{aligned} -\varphi_{ss} &= \nu\varphi, \quad s \in (a, b), \\ \varphi_s(a) &= \lambda\varphi(a), \quad \varphi_s(b) = -\lambda\varphi(b), \end{aligned} \tag{14}$$

занумерованные по неубыванию, а через $\{\varphi_k\}$ соответствующие собственные функции, ортонормированные в смысле скалярного произведения (\cdot, \cdot) . Построим нелинейный оператор

$$[N(u), \zeta] = \int_a^b (v + \delta w - \beta w^3)\eta ds$$

и положим $\text{dom } N = \mathfrak{B} = L_4(a, b) \times L_4(a, b)$. В силу предложенного построения при всех фиксированных значениях параметров $\beta, \delta \in \mathbb{R}$ оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$.

Построим пространство $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}_\alpha^1$, где $\mathfrak{X}_\alpha^1 = L_4(a, b) \times \{0\}$, $\mathfrak{X}_1^0 = \{0\} \times W_2^1(a, b)$, тогда выполняются плотные и непрерывные вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{X}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{Y}.$$

Построим фазовое многообразие \mathfrak{M} , которое примет вид

$$\mathfrak{M} = \left\{ u \in \mathfrak{X}_\alpha : \int_a^b v \eta ds = \int_a^b (w_s \eta_s - \delta w \eta + \beta w^3 \eta) ds + \lambda(w(a)\eta(a) + w(b)\eta(b)) \right\}.$$

Теорема 2. [11] Для всех фиксированных значений параметров $\beta, \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\delta \in (0, \nu_1)$,

(i) фазовым пространством уравнения (3) служит простое банахово C^∞ -многообразие \mathfrak{M} ;

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{X}_\alpha$ существует единственное решение задачи (3), (12), (13).

1.3. Вырожденная модель распределенного брюсселятора

В $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим вырожденную систему уравнений распределенного брюсселятора (1), моделирующую периодическую химическую реакцию, которая в случае $\varepsilon_2 = 0$ примет вид

$$\begin{cases} v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2 w, \\ 0 = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 v - v^2 w, \end{cases} \tag{15}$$

с граничным условием (5) и начальным условием Шоултера – Сидорова

$$v(0) = v_0. \tag{16}$$

Здесь функции $v = v(s, t)$ и $w = w(s, t)$ описывают концентрации реагентов, члены $\alpha_1 \Delta v$, $\alpha_2 \Delta w$ характеризуют диффузию реагентов (в силу закона Фика), $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – коэффициенты диффузии, параметры $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ описывают концентрации исходных реагентов, которые предполагаются постоянными.

Аналогично параграфу 1.2 введем в рассмотрение банахово пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 = \overset{\circ}{W}_2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2(\Omega)$, гильбертово пространство $\mathfrak{X} = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, скалярное произведение которого определим как $[u, \zeta] = (v, \xi) + (w, \eta)$, где $u = (v, w)$, $\zeta = (\xi, \eta)$, при этом (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Обозначим через \mathfrak{Y} пространство, сопряженное к \mathfrak{H} относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$. Построим линейные операторы $L, M : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{Y}$ следующим образом:

$$[Lu, \zeta] = (v, \xi), \quad u, \zeta \in \mathfrak{H},$$

$$[Mu, \zeta] = -\alpha_1(v_{s_i}, \xi_{s_i}) - \alpha_2(w_{s_i}, \eta_{s_i}), \quad u, \zeta \in \mathfrak{H}.$$

В силу задания операторы L, M обладают свойствами $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}, \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{Y})$.

Замечание 1. Заметим, что здесь и далее выполняется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам.

В силу предложенного построения при всех фиксированных значениях параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M будет L -секториальным. Далее построим нелинейный оператор

$$[N(u), \zeta] = (\beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2w, \xi) + (\beta_2v - v^2w, \eta)$$

и положим $\text{dom } N = \mathfrak{B} = L_4(\Omega) \times L_4(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = L_{\frac{4}{3}}(\Omega) \times L_{\frac{4}{3}}(\Omega)$. Для всех фиксированных значений параметров $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$.

Построим пространство $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}_\alpha^1$, где $\mathfrak{X}_1^0 = \{0\} \times \overset{\circ}{W}_2(\Omega)$, $\mathfrak{X}_\alpha^1 = \mathfrak{X}^\alpha \times \{0\}$, $\mathfrak{X}^\alpha = L_4(\Omega)$. Следует отметить, что при $n \leq 4$ справедливо плотное и непрерывное вложение

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{Y}.$$

Построим фазовое многообразие \mathfrak{M} , которое примет вид

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_2} = \{u \in \mathfrak{X}_\alpha : (\alpha_2 w_{s_i}, \eta_{s_i}) + (v^2 w, \eta) = (\beta_2 v, \eta)\}.$$

Теорема 3. [9] Для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$,

(i) фазовым пространством системы уравнений (15) служит простое C^∞ -многообразие $\mathfrak{M}_{\varepsilon_2}$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{X}_\alpha$ существует и единственно решение (5), (15), (16).

1.4. Вырожденная модель распространения нервного импульса

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим вырожденную систему уравнений Фитц Хью – Нагумо (2) в случае $\varepsilon_1 = 0$, которая примет вид

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3 \end{cases} \quad (17)$$

с граничным условием (5) и начальным условием

$$w(0) = w_0. \quad (18)$$

Математическая модель (2), (5) моделирует распространение волн возбуждения, лежащих в основе передачи нервных импульсов в биологической системе. Здесь $w = w(s, t)$ – функция, описывающая динамику мембранного потенциала, $v = v(s, t)$ – медленная восстанавливающая функция, связанная с ионными токами, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22} \in \mathbb{R}$ – фиксированные параметры, характеризующие: β_{11}, β_{12} – порог возбуждения и его скорость, α_1 – электропроводность среды, α_2 – реполяризацию среды.

Введем банахово пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, гильбертово пространство $\mathfrak{X} = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Обозначим через \mathfrak{Y} пространство, сопряженное к \mathfrak{H} относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$. Построим линейные операторы $L, M : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{Y}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} [Lu, \zeta] &= (w, \eta), \quad x, \zeta \in \mathfrak{H}, \\ [Mu, \zeta] &= -\alpha_1(v_{s_i}, \xi_{s_i}) - \alpha_2(w_{s_i}, \eta_{s_i}). \end{aligned}$$

В силу построенной конструкции $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}, \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}, \mathfrak{Y})$. Отметим, что для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M L -секториален.

Далее построим нелинейный оператор

$$[N(x), \zeta] = (\beta_{12}w - \beta_{11}v, \xi) + (\beta_{22}w - \beta_{21}v - w^3, \eta)$$

и положим $\text{dom } N = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 = L_4(\Omega) \times L_4(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_1^* \times \mathfrak{B}_2^* = L_{\frac{4}{3}}(\Omega) \times L_{\frac{4}{3}}(\Omega)$. При всех фиксированных значениях параметров $\beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{11}, \beta_{21} \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$.

Построим пространство $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}_\alpha^1$, где $\mathfrak{X}_1^0 = W_2^1(\Omega) \times \{0\}$, $\mathfrak{X}_\alpha^1 = \{0\} \times \mathfrak{X}^\alpha$, $\mathfrak{X}^\alpha = L_4(\Omega)$. Следует отметить, что при $n \leq 4$ справедливо плотное и непрерывное вложение

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{X}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{X}.$$

Построим фазовое многообразие

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_1} = \{x \in \mathfrak{X}_\alpha : (\alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i}) + (\beta_{11}v, \xi) = (\beta_{12}w, \xi)\}. \quad (19)$$

Теорема 4. [20] Для всех фиксированных значений параметров $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_{21}, \beta_{22} \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}_+$, $n \leq 4$,

- (i) фазовым пространством системы уравнений (17) служит простое C^∞ -многообразие $\mathfrak{M}_{\varepsilon_1}$;
- (ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{X}_\alpha$ существует и единственно решение (5), (17), (18).

2. Фазовые многообразия с особенностями. Неединственность решения

2.1. Вырожденная модель Хоффа

В $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим уравнение Хоффа (4) в случае $k = 2$ с краевым условием (5) и начальным условием (11). Пространства $\mathfrak{H}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{X}, \mathfrak{B}$ и операторы L, M, N были

построены в п. 1.1. Построим проектор $\mathbb{I} - Q = (\cdot, \varphi_1)$, где $\varphi_1 \in \ker L$, $\|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)} = 1$, и множество

$$\mathfrak{M} = \{v \in \mathfrak{B} : (Mv + N(v), \varphi_1) = 0\}.$$

Замечание 2. Здесь и далее будем рассматривать только такие собственные функции φ_k спектральной задачи с однородным условием Дирихле для оператора $(-\Delta)$, которые соответствуют однократным собственным значениям ν_k , т.е. таким, для которых выполняется условие

$$\dim \ker(\nu \mathbb{I} + \Delta) = 1.$$

Построим подпространство $\mathfrak{B}^\perp = \{v^\perp \in \mathfrak{B} : (v^\perp, \varphi_1) = 0\}$ и представим вектор $v = q\varphi_1 + v^\perp$, тогда множество \mathfrak{M} C^∞ -диффеоморфно множеству

$$\mathfrak{M}_q = \left\{ (q, v^\perp) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{B} : q^3 \|\varphi_1\|_{\mathfrak{B}}^4 + 3q^2 \int_{\Omega} \varphi_1^3 v^\perp ds + q \left(\int_{\Omega} \varphi_1^2 (v^\perp)^2 ds + \alpha_1 \alpha_2^{-1} \right) + \int_{\Omega} \varphi_1 (v^\perp)^3 ds = 0 \right\}. \quad (20)$$

Выделим во множестве \mathfrak{M} подмножество

$$\mathfrak{M}' = \{v \in \mathfrak{B} : (M\varphi_1 + N'_v \varphi_1, \varphi_1) = 0\} \cap \mathfrak{M}.$$

Множество \mathfrak{M}' C^∞ -диффеоморфно множеству

$$\mathfrak{M}'_q = \left\{ (q, v^\perp) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{B}^\perp : 3q^2 \|\varphi_1\|_{\mathfrak{B}}^4 + 6q \int_{\Omega} \varphi_1^3 v^\perp ds + 3 \int_{\Omega} \varphi_1^2 (v^\perp)^2 ds + \alpha_1 \alpha_2^{-1} = 0 \right\} \cap \mathfrak{M}'. \quad (21)$$

Теорема 5. [33] Пусть $1 \leq n \leq 4$, $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, $\lambda = \nu_1$. Тогда

(i) любой вектор $\xi \in \ker L \setminus \{0\}$ не имеет $(M + N'_v)$ -присоединенных векторов, если $v \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$;

(ii) любой вектор $\xi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет точно один $(M + N'_v)$ -присоединенный вектор, если $v \in \mathfrak{M}' \setminus \mathfrak{B}^\perp$.

Рассмотрим уравнение Хоффа (4) при $k = 2$ в случае $\Omega = (0, l)$:

$$\lambda v_t + v_{sst} = \alpha_1 v + \alpha_2 v^3, \quad s \in (0, l), \quad t \in (0, T). \quad (22)$$

Для нашего случая задача Шоултера – Сидорова примет вид:

$$\lambda (v(s, 0) - v_0(s)) + (v_{ss}(s, 0) - v_0(s)) = 0, \quad s \in (0, l). \quad (23)$$

Построим фазовое многообразие уравнения

$$\mathfrak{M} = \{v \in \mathfrak{B} : (\alpha_1 v, \varphi_1) + (\alpha_2 v^3, \varphi_1) = 0\}. \quad (24)$$

Уравнение, определяющее множество \mathfrak{M} , является кубическим уравнением общего вида $aq^3 + bq^2 + cq + d = 0$, здесь $a = \|\varphi_1\|_{\mathfrak{B}}^4$, $b = 3 \int_0^l \varphi_1^3 v^\perp ds$, $c = 3 \int_0^l \varphi_1^2 v^\perp ds + \alpha_1 \alpha_2^{-1}$, $d = \int_0^l \varphi_1 (v^\perp)^3 ds$, $p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$, $e = \frac{1}{2} \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right)$, $\Re s(r, v^\perp) = p^3 + e^2$,

$$R(q, v^\perp) = 3q^2 \|\varphi_1\|_{\mathfrak{B}}^4 + 6q \int_0^l \varphi_1^3 v^\perp ds + 3 \int_0^l \varphi_1^2 (v^\perp)^2 ds + \alpha_1 \alpha_2^{-1}.$$

Построим множества

$$\mathfrak{B}_+^\perp = \{v^\perp \in \mathfrak{B}^\perp : \Re s(q, v^\perp) > 0\},$$

$$\mathfrak{B}_-^\perp = \{v^\perp \in \mathfrak{B}^\perp : \Re s(q, v^\perp) < 0\}.$$

Теорема 6. [10] Пусть $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, $\lambda = \nu_1$. Тогда

- (i) множество \mathfrak{M}_r образует 2-сборку Уитни;
- (ii) для любого $v_0 \in \mathfrak{B}^\perp \cap \mathfrak{B}_-^\perp$ существуют три решения задачи (7), (22), (23);
- (iii) для любого $v_0 \in \mathfrak{B}^\perp \cap \mathfrak{B}_+^\perp$ существует одно решение задачи (7), (22), (23).

2.2. Модель Плотникова

В полуполосе $(a, b) \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим математическую модель Плотникова (3), (12) с условием Шоуолтера – Сидорова (13). Пространства \mathfrak{H} , \mathfrak{X} , \mathfrak{B} , \mathfrak{X}_α , \mathfrak{Y} и операторы L , M и N были построены в п. 1.2. Рассмотрим случай, когда $\delta = \nu_1$, где ν_1 – первое собственное значение спектральной задачи (14).

Если положить $v = v^\perp + r\varphi_1$, $w = w^\perp + q\varphi_1$, то фазовое многообразие \mathfrak{M} , построенное в п. 1.2, определяется системой из двух уравнений

$$\begin{cases} \int_a^b v^\perp \eta^\perp ds = \int_a^b (w_s^\perp \eta_s^\perp - \nu_1 w^\perp \eta^\perp + \beta (w^\perp + q\varphi_1)^3 \eta^\perp) ds + \\ + \lambda (w^\perp(a) \eta^\perp(a) + w^\perp(b) \eta^\perp(b)), \\ \beta^{-1} r = \int_a^b (w^\perp + q\varphi_1)^3 \varphi_1 ds, \end{cases} \quad (25)$$

где вместо η сначала подставлено η^\perp , а потом φ_1 . Здесь числа $r, q \in \mathbb{R}$, а φ_1 – собственная функция задачи (14), отвечающая собственному значению ν_1 и нормированная в смысле $L_2(a, b)$; векторы $v^\perp \in \mathfrak{B}_1^\perp$, $w^\perp, \eta^\perp \in \mathfrak{H}_2^\perp$, где $\mathfrak{B}_1^\perp = \{v \in \mathfrak{B}_1 : (v, \varphi_1) = 0\}$, $\mathfrak{H}_2^\perp = \{w \in \mathfrak{H}_2 : (w, \varphi_1) = 0\}$.

Перейдем к рассмотрению второго соотношения в (25), которое представим в виде

$$q^3 \|\varphi_1\|_{L_4}^4 + 3q^2 \int_a^b \varphi_1^3 w^\perp ds + 3q \int_a^b \varphi_1^2 (w^\perp)^2 ds + \int_a^b \varphi_1 (w^\perp)^3 - \beta^{-1} r = 0. \quad (26)$$

Уравнение (26) является кубическим уравнением общего вида $aq^3 + bq^2 + cq + d = 0$, где

$$a = \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4, b = 3 \int_{\Omega} w^{\perp} \varphi_1^3 ds, c = 3 \int_{\Omega} (w^{\perp})^2 \varphi_1^2 ds, \\ d = \int_{\Omega} \varphi_1 (w^{\perp})^3 ds - \beta_{21} r, p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}, e = \frac{1}{2} \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right), \quad (27) \\ \Re s(q, w^{\perp}) = p^3 + e^2.$$

Как хорошо известно из формул Кардано, уравнение (26) имеет от одного до трех действительных корней, причем оно имеет точно два корня, если вдобавок к нему выполняется

$$R(r, w^{\perp}) = r^2 \|\varphi_1\|_{L_4}^4 + 2r \int_a^b \varphi_1^3 w^{\perp} ds + \int_a^b \varphi_1^2 (w^{\perp})^2 = 0.$$

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{P} = \{u \in \mathfrak{M} : R(r, w^{\perp}) \neq 0\}$.

Для удобства дальнейшего рассмотрения введем следующие множества:

$$\mathfrak{H}_2^0 = \{w \in \mathfrak{H}_2 : R(r, w^{\perp}) = 0\},$$

$$\mathfrak{H}_2^+ = \{w \in \mathfrak{H}_2 : R(r, w^{\perp}) > 0\},$$

$$\mathfrak{H}_2^- = \{w \in \mathfrak{H}_2 : R(r, w^{\perp}) < 0\}.$$

Теорема 7. [11] При любых $\beta, \lambda \in \mathbb{R}_+$

(i) множество \mathfrak{M} образует 2-сборку Уитни;

(ii) для любого $v_0 \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{H}_2^-$ существует одно решение задачи (3), (12), (13);

(iii) для любого $v_0 \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{H}_2^+$ существуют три решения задачи (3), (12), (13).

2.3. Вырожденная модель распределенного брюсселятора

В $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим вырожденную систему уравнений распределенного брюсселятора (1) в случае $\varepsilon_1 = 0$, которая примет вид

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2 w, \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 v - v^2 w, \end{cases} \quad (28)$$

с краевым условием (5) и начальным условием

$$w(0) = w_0. \quad (29)$$

Пространства \mathfrak{H} , \mathfrak{X} , \mathfrak{B} , \mathfrak{Y} и операторы M и N были построены в п. 1.3. Отличительной особенностью данной задачи является задание оператора

$$[Lu, \zeta] = (w, \eta), \quad u, \zeta \in \mathfrak{H}.$$

Отметим, что для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M будет L -секториальным.

Построим пространство $\mathfrak{X}_{\alpha} = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}_{\alpha}^1$, где $\mathfrak{X}_{\alpha}^1 = \{0\} \times \mathfrak{X}^{\alpha}$, $\mathfrak{X}_1^0 = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \times \{0\}$, $\mathfrak{X}^{\alpha} = L_4(\Omega)$. В силу свойств оператора N и получившихся вложений справедливо $N \in C^{\infty}(\mathfrak{X}_{\alpha}; \mathfrak{Y})$.

Построим фазовое многообразие

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_1} = \{u \in \mathfrak{X}_\alpha : (\alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i}) = (\beta_1 - (\beta_2 + 1)v + v^2 w, \xi)\}. \quad (30)$$

Возьмем произвольную точку $u = (v, w) \in \mathfrak{X}_\alpha$, представим $u = (v^\perp + q\varphi_k, w^\perp)$, где $v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp$, $w^\perp \in (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$, $\mathfrak{H}_1^\perp = \{v \in \mathfrak{H}_1 : (v^\perp, \varphi_k) = 0\}$, $(\mathfrak{X}^\alpha)^\perp = \{w^\perp \in \mathfrak{X}^\alpha : (w^\perp, \varphi_k) = 0\}$. Тогда множество (30) может быть определено следующим образом

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_1} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1 v_{s_i}^\perp, \xi_{s_i}^\perp) = (\beta_1 - (\beta_2 + 1)v^\perp, \xi^\perp) + \\ \quad + (v^\perp + q\varphi_k)^2 w^\perp, \xi^\perp, \\ -(\beta_1, \varphi_k) = ((v^\perp + q\varphi_k)^2 w^\perp, \varphi_k) \end{array} \right. \right\}. \quad (31)$$

При этом первое соотношение в (31) получено в случае, когда подставлено $\xi = \xi^\perp$ в (30), а второе соотношение в случае $\xi = \varphi_k$.

Рассмотрим второе соотношение (31) и, преобразуя его, получим:

$$q^2 \int_{\Omega} w^\perp \varphi_k^3 ds + 2q \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2 ds + \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k ds + \int_{\Omega} \beta_1 \varphi_k ds = 0. \quad (32)$$

Заметим, что уравнение (32) является квадратным уравнением вида $ar^2 + br + c = 0$, где

$$a = \int_{\Omega} w^\perp \varphi_k^3 ds, \quad b = 2 \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2 ds, \quad c = \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k ds + \int_{\Omega} \beta_1 \varphi_k ds.$$

Построим функционал $\mathfrak{Res}(v^\perp) : \mathfrak{H}_1^\perp \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{Res}(v^\perp) = 4 \left(\int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2 ds \right)^2 - 4 \cdot \int_{\Omega} w^\perp \varphi_k^3 ds \cdot \left(\int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k ds + \int_{\Omega} \beta_1 \varphi_k ds \right)$$

и рассмотрим множество

$$(\mathfrak{H}_1^\perp)_+ = \{v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp : \mathfrak{Res}(v^\perp) > 0\}.$$

Для любого v^\perp , принадлежащего множеству $(\mathfrak{H}_1^\perp)_+$, уравнение (32) будет иметь два различных решения вида

$$q_- = \frac{-2 \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2 ds - \sqrt{\mathfrak{Res}(v^\perp)}}{2 \int_{\Omega} w^\perp \varphi_k^3 ds},$$

$$q_+ = \frac{-2 \int_{\Omega} (v^\perp)^2 w^\perp \varphi_k^2 ds + \sqrt{\mathfrak{Res}(v^\perp)}}{2 \int_{\Omega} w^\perp \varphi_k^3 ds}.$$

Построим множества

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_1-} = \left\{ u \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1 v_{s_i}^\perp, \xi_{s_i}^\perp) = (\beta_1 - (\beta_2 + 1)v^\perp + (v^\perp + q_- \varphi_1)^2 w^\perp, \xi^\perp), \\ v = q_-(v^\perp) \varphi_k + v^\perp \end{array} \right. \right\},$$

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_1+} = \left\{ u \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1 v_{s_i}^\perp, \xi_{s_i}^\perp) = (\beta_1 - (\beta_2 + 1)v^\perp + (v^\perp + q_+ \varphi_1)^2 w^\perp, \xi^\perp), \\ v = q_+(v^\perp) \varphi_k + v^\perp \end{array} \right. \right\}.$$

В том случае, когда начальные значения лежат во множестве $\mathfrak{M}_{\varepsilon_1} \setminus (\mathfrak{M}_{\varepsilon_{1+}} \cup \mathfrak{M}_{\varepsilon_{1-}})$, их принято называть точками складки Уитни фазового пространства. Наличие в фазовом многообразии особенностей предполагает, что уравнение может иметь несколько решений или не иметь их совсем. Построим множества

$$\begin{aligned} (\mathfrak{H}_1^\perp)_- &= \{v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp : \Re s(v^\perp) < 0\}, \\ (\mathfrak{H}_1^\perp)_0 &= \{v^\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp : \Re s(v^\perp) = 0\}. \end{aligned}$$

Теорема 8. [9] Для всех фиксированных параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$,

- (i) фазовое пространство $\mathfrak{M}_{\varepsilon_{1-}} \cup \mathfrak{M}_{\varepsilon_{1+}}$ содержит 1-сборку Уитни;
- (ii) для любого $u_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_+ \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ существует два решения задачи (5), (28), (29);
- (iii) для любого $u_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_0 \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ существует одно решение задачи (5), (28), (29);
- (iv) для любого $u_0 \in (\mathfrak{H}_1^\perp)_- \times (\mathfrak{X}^\alpha)^\perp$ задача (5), (28), (29) не имеет решения.

2.4. Вырожденная модель распространения нервного импульса

В $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим вырожденную систему уравнений Фитц Хью – Нагумо (2) в случае $\varepsilon_2 = 0$, которая примет вид

$$\begin{cases} v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ 0 = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3 \end{cases} \quad (33)$$

с граничным условием (5) и начальным условием

$$v(0) = v_0. \quad (34)$$

Пространства \mathfrak{H} , \mathfrak{X} , \mathfrak{B} , \mathfrak{Y} и операторы M и N были построены в п. 1.4. Отличительной особенностью данной задачи является задание оператора

$$[Lu, \zeta] = (v, \xi), \quad u, \zeta \in \mathfrak{H}. \quad (35)$$

Отметим, что для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M L -секториален.

Построим пространство $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}_\alpha^1$, где $\mathfrak{X}_1^0 = \{0\} \times W_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{X}_\alpha^1 = \mathfrak{X}^\alpha \times \{0\}$. Для всех фиксированных значений параметров $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, 2}$, $n \leq 4$, оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{X}_\alpha; \mathfrak{Y})$.

Построим фазовое многообразие

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_2} = \left\{ u \in \mathfrak{X}_\alpha : -(v, \xi) = \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w + \frac{1}{\beta_{21}} w^3, \xi \right) + \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}, \xi_{s_i} \right) \right\}. \quad (36)$$

Рассмотрим случай $\beta_{22} = \alpha_2 \nu_1$, положим

$$\mathfrak{X}^{\alpha\perp} = \{v^\perp \in \mathfrak{X}^\alpha : (v^\perp, \varphi_1) = 0\}, \quad \mathfrak{H}_2^\perp = \{w^\perp \in W_2^1(\Omega) : (w^\perp, \varphi_1) = 0\}.$$

Если $v \in \mathfrak{X}^{\alpha\perp}$ и $w \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ представить в виде $v = v^\perp + r\varphi_1$ и $w = w^\perp + q\varphi_1$, где $r, q \in \mathbb{R}$, то множество

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_2} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} -v^\perp \xi^\perp ds = \int_{\Omega} \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w^\perp \xi^\perp + \frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w^\perp \xi_{s_i}^\perp + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \xi^\perp \right) ds, \\ -\beta_{21}r = \int_{\Omega} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \varphi_1 ds \end{array} \right. \right\}. \quad (37)$$

Перейдем к рассмотрению второго соотношения в (37) и, преобразуя его, получим:

$$q^3 \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4 + 3q^2 \int_{\Omega} w^\perp \varphi_1^3 ds + 3q \int_{\Omega} (w^\perp)^2 \varphi_1^2 ds + \int_{\Omega} \varphi_1 (w^\perp)^3 ds + \beta_{21}r = 0. \quad (38)$$

Уравнение (38) является кубическим уравнением общего вида $aq^3 + bq^2 + cq + d = 0$, где

$$a = \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4, \quad b = 3 \int_{\Omega} w^\perp \varphi_1^3 ds, \quad c = 3 \int_{\Omega} (w^\perp)^2 \varphi_1^2 ds, \\ d = \int_{\Omega} \varphi_1 (w^\perp)^3 ds - \beta_{21}r, \quad p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}, \quad e = \frac{1}{2} \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right), \\ \Re s(q, w^\perp) = p^3 + e^2, \\ R(q, w^\perp) = q^2 \|\varphi_1\|_{L_4(\Omega)}^4 + 2q \int_{\Omega} \varphi_1^3 w^\perp ds + \int_{\Omega} \varphi_1^2 (w^\perp)^2 ds.$$

Построим множества

$$\mathfrak{H}_2^0 = \{w \in \mathfrak{H}_2 : R(q, w^\perp) = 0\}, \quad \mathfrak{H}_2^+ = \{w \in \mathfrak{H}_2 : \Re s(q, w^\perp) > 0\}, \\ \mathfrak{H}_2^- = \{w \in \mathfrak{H}_2 : \Re s(q, w^\perp) < 0\}.$$

Теорема 9. [20] При любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{22} = \alpha_2 \nu_1$, $n \leq 4$,

- (i) фазовое пространство $\mathfrak{M}_{\varepsilon_2}$ содержит 2-сборку Уитни;
- (ii) для любого $v_0 \in \mathfrak{X}^\alpha \cap \mathfrak{H}_2^-$ существует одно решение задачи (5), (33), (34);
- (iii) для любого $v_0 \in \mathfrak{X}^\alpha \cap \mathfrak{H}_2^+$ существует три решения задачи (5), (33), (34).

Авторы сердечно поздравляют своего учителя, наставника, профессора Георгия Анатольевича Свиридюка с юбилеем и благодарят его за предоставленные возможности, безграничное терпение, щедрость и заботу.

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант FENU-2020-0022 (2020072Г3).

Литература / References

1. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-Up in Nonlinear Sobolev Type Equations*. Berlin, Walter de Gruyter, 2011. DOI: 10.1515/9783110255294
2. Borisov, V.G. Parabolic Boundary Value Problems with a Small Parameter Multiplying the Derivatives with Respect to t . *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1988, vol. 59, no. 2, pp. 287–302.

3. Bokareva T.A., Sviridyuk G.A. Whitney Folds in Phase Spaces of Some Semilinear Sobolev-Type Equations. *Mathematical Notes*, 1994, vol. 55, no. 3, pp. 237–242. DOI: 10.1007/BF02110776
4. Favini A., Sviridyuk G., Sagadeeva M. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of “Noises”. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, vol. 13, no. 6, pp. 4607–4621. DOI: 10.1007/s00009-016-0765-x
5. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 2018, article ID: 128, 10 p.
6. Field R.J., Koros E., Noyes R. Oscillations in Chemical Systems. II. Thorough Analysis of Temporal Oscillation in the Bromate-Cerium-Malonic Acid System. *Journal of the American Chemical Society*, 1972, vol. 94, no. 25, pp. 8649–8664.
7. Fisher R.A. The Wave of Advance of Advantageous Genes. *Annals of Human Genetics*, 1937, no. 7, pp. 353–369.
8. Fitzhugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, 1961, vol. 1, no. 6, pp. 445–466.
9. Gavrilova O.V. Numerical Study on the Non-Uniqueness of Solutions to the Showalter–Sidorov Problem for One Degenerate Mathematical Model of an Autocatalytic Reaction with Diffusion. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, vol. 6, no. 4, pp. 3–17. DOI: 10.14529/jcem190401
10. Gavrilova O.V., Nikolaeva N.G., Manakova N.A. [On the Non-Uniqueness of Solutions of the Showalter–Sidorov Problem for One Mathematical Model of the Deformation of an I-Beam]. *South Ural Youth School of Mathematical Modelling*, 2021, pp. 67–71. (in Russian)
11. Gil'mutdinova A.F. [On the Non-Uniqueness of Solutions of Showalter–Sidorov Problem for One Plotnikov Model]. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 9/1, pp. 85–90. (in Russian)
12. Hoff N.J. Creep Buckling. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1956, no. 7, pp. 1–20.
13. Keller A.V. Leontief Type Systems: Classes of Problems with Showalter–Sidorov Initial Condition and Numerical Solutions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 30–43. (in Russian)
14. Kondyukov A.O., Sukacheva T.G. Phase Space of the Initial-Boundary Value Problem for the Oskolkov System of Nonzero Order. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 5, pp. 823–829. DOI: 10.1134/S0965542515050127
15. Kondyukov A.O., Sukacheva T.G. Phase Space of a Model of Magnetohydrodynamics. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 4, pp. 502–509.
16. Korpusov M.O., Panin A.A., Shishkov A.E. On the Critical Exponent “Instantaneous Blow-Up” Versus “Local Solubility” in the Cauchy Problem for a Model Equation of Sobolev Type. *Izvestiya RAN: Mathematics*, 2021, vol. 85, no. 1, pp. 111–144. DOI: 10.4213/im8949
17. Kozhanov A.I. Boundary Value Problems for Fourth-Order Sobolev Type Equations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 425–432.
18. Lefever R. Symmetry-Breaking Instabilities in Dissipative System. *Journal of American Physics*, 1968, no. 48, pp. 1695–1700.
19. Manakova N.A., Sviridyuk G.A. Non-Classical Equations of Mathematical Physics. Phase Spaces of Semilinear Sobolev Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 31–51. DOI: 10.14529/mmph160304

20. Manakova N.A., Gavrilova O.V. About Nonuniqueness of Solutions of the Showalter–Sidorov Problem for One Mathematical Model of Nerve Impulse Spread in Membrane. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 161–168. DOI:10.14529/mmp180413
21. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon. *IRE Transactions on Nuclear Science*, 1962, no. 50, no. 10, pp. 2061–2071.
22. Plotnikov P.I., Starovoitov V.N. The Stefan Problem with Surface Tension as a Limit of the Phase Field Model. *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 3, pp. 395–405.
23. Plotnikov P.I., Klepacheva A.V. The Phase Field Equations and Gradient Flows of Marginal Functions. *Siberian Mathematical Journal*, 2001, vol. 42, no. 3, pp.551–567.
24. Pyatkov S.G. Boundary Value and Inverse Problems for Some Classes of Nonclassical Operator-Differential Equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 3, pp. 489–502. DOI: 10.1134/S0037446621030125
25. Sviridyuk G.A. The Manifold of Solutions of an Operator Singular Pseudoparabolic Equation. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1986, vol. 289, no. 6, pp. 1–31. (in Russian)
26. Sviridyuk G.A. A Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equation. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1989, vol. 33, no. 2, pp. 62–73.
27. Sviridyuk G.A. About One Showalter Problem. *Differential Equations*, 1989, vol. 23, no. 2, pp. 338–339.
28. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Phase Spaces of a Class of Operator Semilinear Equations of Sobolev Type. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 188–195.
29. Sviridyuk G.A. Solvability of the Viscoelastic Thermal Convection Problem of Incompressible Fluid. *Russian Mathematics*, 1990, no. 12, pp. 65–70.
30. Sviridyuk G.A. Sobolev-Type Linear Equations and Strongly Continuous Semigroups of Resolving Operators with Kernels. *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics*, 1995, vol. 50, no. 1, pp. 137–142.
31. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control for a Class of Degenerate Linear Equations. *Doklady Mathematics*, 1999, vol. 59, no. 1, pp. 157–159.
32. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation. *Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, no. 1–2, pp. 262–266. DOI: 10.1023/A:1013919500605
33. Sviridyuk G.A., Trineeva I.K. A Whitney Fold in the Phase Space of the Hoff Equation. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2005, vol. 49, no. 10, pp. 49–55.
34. Sviridyuk G.A., Karamova A.F. On the Crease Phase Space of One Non-Classical Equations. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 10, pp. 1476–1581. DOI: 10.1007/s10625-005-0300-5
35. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff Equations on Graphs. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 139–145. DOI: 10.1134/S0012266106010125.
36. Sviridyuk G.A., Zargebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russian)
37. Thompson J.M.T. *Instabilities and Catastrophes in Sciences and Engineering*. Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, John Wiley and Sons, 1982.
38. Uvarova M.V., Pyatkov S.G. Some Boundary Value Problems for the Sobolev-Type Operator-Differential Equations. *Mathematical Notes of SVFU*, 2019, vol. 26, no. 3, pp. 71–89.

39. Zagrebina S.A., Konkina A.S. The Multipoint Initial-Final Value Condition for the Navier–Stokes Linear Model. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 132–136. DOI: 10.14529/mmp150111
40. Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V. The Cauchy Problem for the Sobolev Type Equation of Higher Order. *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 5–14. DOI: 10.14529/mmp180101
41. Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V., Tsyplenkova O.N. Mathematical Models Based on Boussinesq–Love Equation. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, vol. 8, no. 110, pp. 5477–5483.
42. Zamyshlyayeva A.A., Keller A.V., Syropiatov M.B. Stochastic Model of Optimal Dynamic Measurements. *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 147–153. DOI: 10.14529/mmp180212

Наталья Александровна Манакова, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), manakovana@susu.ru.

Ольга Витальевна Гаврилова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), gavrilovaov@susu.ru.

Ксения Владимировна Перевозчикова, старший преподаватель кафедры «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), vasiuchkovakv@susu.ru.

Поступила в редакцию 3 декабря 2021 г.

MSC 46E35, 35Q99

DOI: 10.14529/mmp220105

SEMILINEAR MODELS OF SOBOLEV TYPE. NON-UNIQUENESS OF SOLUTION TO THE SHOWALTER–SIDOROV PROBLEM

N.A. Manakova¹, O.V. Gavrilova¹, K.V. Perevozchikova¹

¹South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: manakovana@susu.ru, gavrilovaov@susu.ru, vasiuchkovakv@susu.ru

The article is of a survey nature and contains the results of a study about the morphology of the phase spaces of semilinear models of Sobolev type. The paper presents studies of the mathematical models whose phase spaces belong to smooth Banach manifolds with singularities depending on the parameters of the problem, namely, the Hoff model, the Plotnikov model, the distributed brusselator model, and the nerve impulse propagation model. In the first part of the article, we present conditions under which the phase manifolds of the considered models are simple smooth Banach manifolds, which implies the uniqueness of a solution to the Showalter–Sidorov problem. In the second part of the article, we present conditions under which the phase manifolds of the considered models contain singularities, which implies the non-uniqueness of a solution to the Showalter–Sidorov problem.

Keywords: Sobolev type equations; phase space; morphology of phase space; Banach manifold; Showalter–Sidorov problem; k-assembly Whitney.

Received December 3, 2021