УДК 519.6 DOI: 10.14529/mmp220306

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ, ОРИЕНТИРОВАННОЙ НА ПРОБЛЕМУ ДЕМОНТАЖА РАДИАЦИОННО ОПАСНЫХ ОБЪЕКТОВ

***А.Г. Ченцов*[1,2], *А.А. Ченцов*[1]**
[1]Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация
[2]Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Рассматривается задача последовательного обхода мегаполисов при наличии условий предшествования и функций стоимости с зависимостью от списка заданий, не выполненных на текущий момент времени. Оптимизируется выбор маршрутного процесса, включающего перестановку индексов, траекторию и точку старта; оптимизируется также точка финиша. Используется аддитивный критерий, получаемый суммированием затрат на внешние (по отношению к мегаполисам) перемещения, затраты на проведение работ, связанных с посещением мегаполисов, а также оценки терминального состояния. Исследуется процедура построения оптимального решения на основе широко понимаемого динамического программирования. Постановка ориентирована на задачу демонтажа системы радиационно опасных источников; при этом допускается, что демонтированы будут не все источники (это возможно при получении работниками предельных доз радиации), что потребует эвакуации в условиях радиационного воздействия источников, оставшихся недемонтированными. Конкретный вариант критерия сводится к суммарной дозе радиации, получаемой работником как на этапе демонтажа, так и на этапе эвакуации. На основе теоретических конструкций построен алгоритм, реализованный на ПЭВМ; проведен вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: маршрут; трасса; условия предшествования; динамическое программирование.

Введение

В статье исследуется задача маршрутизации перемещений с условиями предшествования и функциями стоимости с зависимостью от списка заданий, не выполненных на текущий момент. По постановке требуется оптимизировать маршрутный процесс, включающий в виде своих компонент маршрут, определяемый в виде перестановки индексов, траекторию процесса и точку старта. По ходу дела оптимизируется также финишная точка. Постановка ориентирована на инженерную задачу о демонтаже радиационно опасных объектов. В последней требуется минимизировать дозовую нагрузку ликвидаторов при демонтаже некоторой части излучающих объектов. Причиной такого частичного осуществления демонтажа может быть получение существенной дозы радиации ликвидаторами, что требует их эвакуации, которая может осуществляться из одного из конечного набора пунктов. Перемещение в упомянутый пункт эвакуации также сопровождается воздействием радиации от источников, оставшихся не демонтированными. Мы стремимся минимизировать суммарную дозу, включая компоненту, соответствующую этапу эвакуации.

Заметим, что упомянутый конкретный вариант общей постановки может быть полезен в вопросах планирования работ по демонтажу. Это касается как аварийных ситуаций (Чернобыль, Фукусима), так и плановых работ, связанных с демонтажом энергоблоков АЭС, выведенных из эксплуатации. Речь идет о выборе достаточно большой группы излучающих объектов, которая может быть демонтирована одной сменой ликвидаторов. При этом экстремум дозовой нагрузки как раз и может служить критерием выбора. Исследуемая ниже проблема в какой-то мере может помочь в осуществлении такого планирования. Мы ориентируемся здесь на работу [1], где введены основные соотношения для доз радиации, требуемых в настоящем исследовании и связанных с перемещениями и проведением работ по демонтажу. Отметим здесь же монографию [2] и работу [3], посвященную исследованию задач большой размерности, связанных с демонтажом.

Исследуемая задача имеет, конечно, своим прототипом известную труднорешаемую (NP–трудную) задачу коммивояжера или TSP в англоязычной литературе (см. [4–9] и др.). Однако, наличие ограничений и усложненных функций стоимости (за счет зависимости от списка заданий), а также учет многовариантности перемещений после выполнения одного задания к выполнению другого приводит к существенному усложнению постановки не только на количественном, но и на качественном уровне. Возникает необходимость в разработке специальных теоретических методов. В этой связи актуальным представляется вариант динамического программирования (ДП), восходящий к [10, разд. 4.9] и являющий развитием подхода [8], применяемого при решении TSP. Именно этот вариант используется в настоящей работе: речь идет о построении на основе ДП оптимального алгоритма, реализованного на ПЭВМ.

1. Специальные обозначения и общая постановка задачи

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); в дальнейшем $\emptyset$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называется множество, все элементы которого сами являются множествами. Любым двум объектам x и y сопоставляется их неупорядоченная пара $\{x;y\}$ в виде множества, содержащего x, y и не содержащего никаких других элементов. Тогда для любого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ имеем синглетон, содержащий $z: \ z \in \{z\}$. Следуя [11, с. 67], любым двум объектам u и v сопоставляется упорядоченная пара (УП) $(u,v) \triangleq \big\{\{u\};\{u;v\}\big\}$ с первым элементом u и вторым элементом v. Для произвольной УП h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h, однозначно определяемые равенством $h = \big(\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h)\big)$. Для любых трех объектов x, y и z в виде $(x,y,z) \triangleq \big((x,y),z\big)$ имеем (см. [12, с. 17]) упорядоченный триплет с первым элементом x, вторым элементом y и третьим элементом z.

Каждому множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H и семейство $\mathcal{P}'(H)$ всех непустых п/м H; $\mathrm{Fin}(H)$ есть по определению семейство всех непустых конечных п/м H (если H — конечное множество, то $\mathrm{Fin}(H) = \mathcal{P}'(H)$). Для декартова произведения $A \times B$ двух множеств A и B используем стандартное определение [12, с. 16]; тогда для любых трех множеств P, Q и T полагаем, как и в [12, с. 17], что $P \times Q \times T \triangleq \big(P \times Q\big) \times T$, получая при этом, что $(s,t) \in P \times Q \times T$ при $s \in P \times Q$ и $t \in T$.

Непустым множествам S и T сопоставляем множество T^S всех отображений (функций) из S в T (см. [11, с. 76]), если $g \in T^S$ и $s \in S$, то $g(s) \in T$ есть, как обычно, значение отображения g в точке s. Ясно, что высказывания

$$g \in T^S, \ \ g: \ S \to T$$

отождествимы. Для непустых множеств A, B и $C \in \mathcal{P}'(A)$, а также отображения $h \in B^A$ в виде $h^1(C) \triangleq \big\{h(x) : \ x \in C\big\} \in \mathcal{P}'(B)$ имеем образ C при действии h. Условимся о толковании обозначений в случае функций нескольких переменных. Так, в случае непустых множеств S, T и R, отображения $u \in R^{S \times T}$, точек $s \in S$ и $t \in T$ имеем, как обычно, что $u(s,t) \triangleq u\big((s,t)\big) \in R$. Если S, T, P и R — непустые множества,

$\psi \in R^{S\times T\times P}$, $s \in S$, $t \in T$ и $p \in P$, то $\psi(s,t,p) = \psi\big((s,t,p)\big) = \psi\big(((s,t),p)\big) \in R$; если же $h \in S \times T$ и $l \in P$, то $\psi(h,l) = \psi\big((\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h)), l\big) \in R$, где $(h,l) \in S \times T \times P$. В качестве R часто используем вещественную прямую $\mathbb{R}$ и ее неотрицательную полуось $\mathbb{R}_+ \stackrel{\triangle}{=} \big\{\xi \in \mathbb{R} |\ 0 \le \xi\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$. Для всякого непустого множества H полагаем $\mathcal{R}_+[H] \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{R}_+)^H$, получая множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на H.

Пусть $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; ...\}$ и $\mathbb{N}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$. При $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{p,q} \stackrel{\triangle}{=} \big\{k \in \mathbb{N}_0 |\ (p \le k) \& (k \le q)\big\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$$

(случай $\overline{p,q} = \emptyset$ не исключается; $\overline{1,m} = \{k \in \mathbb{N} |\ k \le m\}$ при $m \in \mathbb{N}$).

Если K — непустое конечное множество, то $|K| \in \mathbb{N}$ есть его мощность, а $(\mathrm{bi})[K]$ есть по определению множество всех биекций [13, с. 86] дискретного интервала $\overline{1,|K|}$ на K. Ясно, что при $m \in \mathbb{N}$ в виде $(\mathrm{bi})[\overline{1,m}]$ реализуется множество всех перестановок интервала $\overline{1,m}$; при $\alpha \in (\mathrm{bi})[\overline{1,m}]$ в виде $\alpha^{-1} \in (\mathrm{bi})[\overline{1,m}]$ имеем перестановку, обратную к α:

$$\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k \ \ \forall k \in \overline{1,m}.$$

В дальнейшем часто используем индексную форму записи отображений (семейство с индексом [14, с. 11]). Функции, определенные на непустых конечных п/м $\mathbb{N}_0$, именуем кортежами. Отношением, как и принято в теории множеств (см. [11]), называем п/м декартова произведения двух множеств (итак, отношения, — суть множества УП).

2. Определения и обозначения общего характера

Настоящий раздел содержит краткое изложение конструкций [1,3,10,15,16], приводящих к некоторой стандартной задаче маршрутизации.

Фиксируем непустое множество X, его (непустое конечное) п/м $X^0 \in \mathrm{Fin}(X)$. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $2 \le N$ и

$$M_1 \in \mathrm{Fin}(X), ..., M_N \in \mathrm{Fin}(X); \tag{1}$$

множества (37) именуем мегаполисами, полагая, что

$$\big(X^0 \cap M_j = \emptyset \ \ \forall j \in \overline{1,N}\big) \& \big(M_p \cap M_q = \emptyset \ \ \forall p \in \overline{1,N}\ \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}\big) \tag{2}$$

(условия (2) типичны для задач маршрутизации). Фиксируем также (непустые) отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), ..., \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N). \tag{3}$$

С каждым отношением из (3) связываем два п/м соответствующего мегаполиса: при $j \in \overline{1,N}$

$$\big(\mathfrak{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) :\ z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)\big) \& \big(\mathbf{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_2(z) :\ z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)\big), \tag{4}$$

элементы множеств (4) рассматриваем соответственно как пункты прибытия в мегаполис и пункты отправления из него (см. [17, с. 222]). Полагая $\mathbb{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$, рассматриваем системы перемещений [17, (2.4),(2.5)], в которых задействованы отношения (3), множества (4) и перестановки из $\mathbb{P}$, именуемые ниже маршрутами. Пусть

$$\Big(\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{i=1}^{N} \mathfrak{M}_i\Big) \& \Big(\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} (\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i) \cup X^0\Big); \tag{5}$$

в (5) имеем множества из $\mathrm{Fin}(X)$, т.е. непустые конечные п/м X (первое множество в (5) несколько отличается от своего аналога в [17, с. 222]: $\mathbb{X}$ в (5) задается более экономным способом).

Пусть $\mathfrak{Z} \triangleq (X \times X)^{\overline{0,N}}$ (множество всех кортежей в $X \times X$, определенных на $\overline{0,N}$). Если $\alpha \in \mathbb{P}$ и $x \in X^0$, то элементы множества

$$\mathcal{Z}_\alpha[x] \triangleq \Big\{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}|\ \big(z_0 = (x,x)\big)\&\big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}\ \ \forall t \in \overline{1,N}\big)\Big\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}) \qquad (6)$$

рассматриваем как траектории, стартующие из x и согласованные с α; (6) соответствует схеме [17, (2.4),(2.5)]. Конкретный выбор α может быть стеснен условиями предшестовавания, для введения которых зафиксируем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N}\times\overline{1,N})$ со свойством

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})\ \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 :\ \ \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall z \in \mathbf{K}_0. \qquad (7)$$

Условие (7) как правило выполняется в практических задачах; см. обсуждение в [10, разделы 2.2, 2.5]. В этой связи (см. [17, с. 222]) маршруты из множества

$$\mathbf{A} \triangleq \big\{\alpha \in \mathbb{P}|\ \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \ \forall z \in \mathbf{K}\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}) \qquad (8)$$

рассматриваем как допустимые по предшествованию; см. [10, (2.1.5),(2.2.53)]. Тогда при $x \in X^0$ элементы множества

$$\widetilde{\mathbf{D}}[x] \triangleq \Big\{\big(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}}\big) \in \mathbf{A}\times\mathfrak{Z}|\ (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]\Big\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A}\times\mathfrak{Z}) \qquad (9)$$

рассматриваем в качестве допустимых решений (ДР) со стартовой точкой x (заметим, что множество $\mathbf{A}$ (8) конечно). Наконец, элементы множества

$$\mathbf{D} \triangleq \Big\{\big(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}},x\big) \in \mathbf{A}\times\mathfrak{Z}\times X^0|\ \big(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}}\big) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x]\Big\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A}\times\mathfrak{Z}\times X^0) \qquad (10)$$

рассматриваем, как (допустимые) маршрутные процессы.

Функции стоимости. Пусть $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,N})$; множества — элементы $\mathfrak{N}$ — называем списками (заданий). Фиксируем в дальнейшем функции

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N}],\ c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1\times\mathfrak{N}], ..., c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_N\times\mathfrak{N}],\ f \in \mathcal{R}_+\Big[\bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i\Big]. \qquad (11)$$

Функция $\mathbf{c}$ оценивает внешние перемещения, функции $c_j,\ j \in \overline{1,N}$, оценивают работы, связанные с посещением мегаполисов и называемые внутренними, а f оценивает терминальное состояние маршрутного процесса. В этой связи заметим, что при $\alpha \in \mathbb{P}$, $x \in X^0$, $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$ и $\tau \in \overline{1,N}$ согласно (4)

$$\big(\mathrm{pr}_2(z_{\tau-1}) \in \mathbf{X}\big)\&\big(\mathrm{pr}_1(z_\tau) \in \mathbb{X}\big)\&\big(\alpha^1(\overline{\tau,N}) \in \mathfrak{N}\big),$$

а тогда (см. (11)) определено значение $\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{\tau-1}),\mathrm{pr}_1(z_\tau),\alpha^1(\overline{\tau,N})) \in \mathbb{R}_+$; кроме того, определено (см. (6)) значение $c_{\alpha(\tau)}(z_\tau,\alpha^1(\overline{\tau,N})) \in \mathbb{R}_+$. С учетом этого полагаем при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$, что

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \triangleq \sum_{t=1}^N \Big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}),\mathrm{pr}_1(z_t),\alpha^1(\overline{t,N})) + c_{\alpha(t)}(z_t,\alpha^1(\overline{t,N}))\Big] + f(\mathrm{pr}_2(z_N)). \qquad (12)$$

Мы используем (12) для определения критерия: в задаче

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \to \min,\ \ \big(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}}\big) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x], \tag{13}$$

имеем экстремум $\widetilde{V}[x]$ в виде наименьшего среди значений $\mathfrak{C}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}]$, $\big(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}}\big) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x]$, и (непустое конечное) множество решений

$$(\mathrm{sol})[x] \overset{\triangle}{=} \Big\{\big(\alpha^0,(z_t^0)_{t\in\overline{0,N}}\big) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x] \mid \mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_t^0)_{t\in\overline{0,N}}] = \widetilde{V}[x]\Big\} \in \mathrm{Fin}(\widetilde{\mathbf{D}}[x]). \tag{14}$$

В виде (13) имеем задачу маршрутизации с фиксированной точкой старта. В качестве основной, однако, мы рассматриваем задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \to \min,\ \ \big(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}},x\big) \in \mathbf{D}, \tag{15}$$

для которой определены экстремум $\mathbb{V}$ и (непустое конечное) множество решений — оптимальных маршрутных процессов **SOL**:

$$\mathbb{V} \overset{\triangle}{=} \min_{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}},x)\in\mathbf{D}} \mathfrak{C}_\alpha[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \min_{x\in X^0} \widetilde{V}[x] \in \mathbb{R}_+, \tag{16}$$

$$\mathbf{SOL} \overset{\triangle}{=} \Big\{\big(\alpha^0,(z_t^0)_{t\in\overline{0,N}},x^0\big) \in \mathbf{D} \mid\ \mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_t^0)_{t\in\overline{0,N}}] = \mathbb{V}\Big\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}). \tag{17}$$

Полезно ввести также задачу оптимизации точки старта

$$\widetilde{V}[x] \to \min,\ \ x \in X^0; \tag{18}$$

значением (экстремумом) задачи (18) является $\mathbb{V}$, а множество всех оптимальных решений (точек старта) есть

$$X^0_{\mathrm{opt}} \overset{\triangle}{=} \big\{x^0 \in X^0 \mid \widetilde{V}[x^0] = \mathbb{V}\big\} \in \mathrm{Fin}(X^0). \tag{19}$$

Задачи (13), (15), (18) являются очень общими и допускающими различные применения (см., в частности, [16], [18, гл. 4]), где рассматривалась задача об управлении инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ). Основным методом их решения является нестандартный вариант ДП, восходящий к [10, разд. 4.9]. В следующем разделе рассмотрим алгоритмический вариант процедуры на основе ДП; после этого мы коснемся специальной версии задачи (15), ориентированной на проблему демонтажа.

3. Динамическое программирование

Мы опускаем здесь этап вывода уравнения Беллмана, отсылая за подробностями к [19] (см. также [10, часть 3], [15], [18, §4.3] для задачи (13)). Мы совсем кратко напомним построения [17, разд. 4] для общей постановки.

Используем отображение $\mathbf{I}:\ \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, определенное в [10, часть 2]: при $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{I}(K) \overset{\triangle}{=} K \setminus \big\{\mathrm{pr}_2(z):\ z \in \Xi[K]\big\}, \tag{20}$$

где $\Xi[K] \overset{\triangle}{=} \big\{z \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(z) \in K)\&(\mathrm{pr}_2(z) \in K)\big\}$. В связи с (20) заметим, что $\mathbf{I}(\{t\}) = \{t\}\ \ \forall t \in \overline{1,N}$. Следуем [17, (4.1)]:

$$\mathfrak{G} \overset{\triangle}{=} \big\{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K}\ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\big\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{N}) \tag{21}$$

(ясно, что $\overline{1,N} \in \mathfrak{G}$). Множества семейства (21) называем существенными списками заданий, которые ранжируем по мощности:

$$\mathfrak{G}_s \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{G} |\ s = |K|\} \ \ \forall s \in \overline{1,N}. \tag{22}$$

При $\mathbf{K}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) :\ z \in \mathbf{K}\}$ имеем, как легко видеть, равенство

$$\mathfrak{G}_1 = \{\{t\} :\ t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}, \tag{23}$$

определяем простейшие (одноэлементные) существенные списки. Наряду с (23) имеем также очевидное равенство $\mathfrak{G}_N = \{\overline{1,N}\}$. Наконец (см. [20, (4.3)]),

$$\mathfrak{G}_{s-1} = \{K \setminus \{t\} :\ \ K \in \mathfrak{G}_s,\ t \in \mathbf{I}(K)\} \ \ \forall s \in \overline{2,N}. \tag{24}$$

Получили следующую рекуррентную процедуру $\mathfrak{G}_N \to \mathfrak{G}_{N-1} \to ... \to \mathfrak{G}_1$, регулярный шаг которой определяется в (24), а $\mathfrak{G}_N$ известно.

Следующий этап — построение слоев пространства позиций; позициями называем здесь УП вида (x, K), где $x \in X$, а $K \in \mathcal{P}(\overline{1,N})$. Итак, строим множества $D_0, D_1, ..., D_N$.

Полагая, что $\widetilde{\mathcal{M}}$ — объединение всех множеств $\mathbf{M}_j,\ j \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1$, конструируем $D_0 \stackrel{\triangle}{=} \{(x, \emptyset) :\ x \in \widetilde{\mathcal{M}}\}$; кроме того, полагаем $D_N \stackrel{\triangle}{=} \{(x, \overline{1,N}) :\ x \in X^0\}$, завершая построение крайних слоев.

Пусть $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathfrak{G}_s$; тогда вводим последовательно следующие множества:

$$J_s(K) = \{j \in \overline{1,N} \setminus K |\ \{j\} \cup K \in \mathfrak{G}_{s+1}\},$$
$$\mathcal{M}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{j \in J_s(K)} \mathbf{M}_j,\ \ \mathbb{D}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \{(x, K) :\ x \in \mathcal{M}_s[K]\}.$$

Тогда при $s \in \overline{1,N-1}$ слой D_s определяем правилом

$$D_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathfrak{G}_s} \mathbb{D}_s[K]. \tag{25}$$

Таким образом, все слои $D_0, D_1, ..., D_N$ построены; все они являются непустыми множествами (см. [10, предложения 4.9.2, 4.9.3] при несущественных изменениях технического характера). При этом [20, (4.11)]

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1} \ \ \forall s \in \overline{1,N}\ \forall (x, K) \in D_s\ \forall j \in \mathbf{I}(K)\ \forall z \in \mathbb{M}_j. \tag{26}$$

Соотношения (25), (26) показывают способ продвижения траекторий в слоях пространства позиций.

Слои функции Беллмана. Рассмотрим теперь рекуррентную процедуру построения функций

$$v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0],\ v_1 \in \mathcal{R}_+[D_1], ..., v_N \in \mathcal{R}_+[D_N], \tag{27}$$

являющихся каждая сужением функции Беллмана на соответствующий слой пространства позиций. Используя определение D_0, полагаем, что

$$v_0(x, \emptyset) \stackrel{\triangle}{=} f(x) \ \ \forall x \in \widetilde{\mathcal{M}}. \tag{28}$$

Итак, функция v_0 определяется явным образом. Пусть $s \in \overline{1,N}$ и функция $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ уже построена; тогда с учетом (26) определяем $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ по правилу: если $(x,K) \in D_s$, то

$$v_s(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \big[\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z,K) + v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\big]. \tag{29}$$

Посредством (28), (29) определена рекуррентная процедура

$$v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_N. \tag{30}$$

Важное свойство процедуры (30) состоит в том, что (см. [17, предложение 1])

$$\widetilde{V}[x] = v_N(x, \overline{1,N}) \ \ \forall x \in X^0. \tag{31}$$

Свойство (31) позволяет (см. (16), (19)) определить $\mathbb{V}$ и X^0_{opt}:

$$\mathbb{V} = \min_{x \in X^0} v_N(x, \overline{1,N}), \ \ X^0_{\mathrm{opt}} = \big\{x^0 \in X^0 |\ v_N(x^0, \overline{1,N}) = \mathbb{V}\big\}. \tag{32}$$

В (32) прямо указано как именно (30) определяет глобальный экстремум и оптимальные точки старта. Наконец, совсем кратко рассмотрим вопрос о построении оптимального маршрутного процесса. Прежде всего фиксируем $x^0 \in X^0_{\mathrm{opt}}$, получая в силу (29) и (32) для $(x^0, \overline{1,N}) \in D_N$ следующую цепочку равенств

$$\mathbb{V} = v_N(x^0, \overline{1,N}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \big[\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\big]. \tag{33}$$

Полагаем $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x^0, x^0)$ и находим, используя (33), $\eta_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{M}_{\eta_1}$, для которых

$$\mathbb{V} = \mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}), \tag{34}$$

получая, в силу (26) следующее включение: $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}\big) \in D_{N-1}$. Вновь используя (29), получаем, что

$$\begin{gathered} v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_j(z, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; j\})\big]. \end{gathered}$$

С учетом этого находим $\eta_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{M}_{\eta_2}$, для которых

$$\begin{gathered} v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}), \end{gathered} \tag{35}$$

где $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}\big) \in D_{N-2}$. В случае $N = 2$ из (34), (35) сразу следует оптимальность УП $\big((\eta_i)_{i \in \overline{1,2}}, (\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,2}}\big)$ в задаче (13) при $x = x^0$. В общем же случае N, $N \geq 2$, процедуры выбора, подобные (34), (35) следует продолжать вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1,N}$ (см. [15]). В итоге будет получено решение

$$\big(\eta, (\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,N}}\big) \in (\mathrm{sol})[x^0], \tag{36}$$

где $\eta \triangleq (\eta_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A}$. Тогда (см. (14),(36)) $\big(\eta, (\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,N}}\big) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x^0]$ и при этом

$$\mathfrak{C}_\eta\big[(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,N}}\big] = \widetilde{V}[x^0] = \mathbb{V}. \tag{37}$$

В итоге $\big(\eta, (\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,N}}, x^0\big) \in \mathbf{SOL}$; см. (14), (17). Итак, мы получили оптимальный маршрутный процесс.

4. Конкретизация функций стоимости

В настоящем разделе мы возвращаемся к проблеме демонтажа радиационно опасных источников. Будем полагать далее, что X — плоскость. Мы обсудим и дополним конкретный вариант функций стоимости в [17, разд. 3]. Прежде всего мы, в отличие от [17] (см., впрочем, [17, замечание 1]), будем предполагать, что упомянутых источников больше, чем N. В этой связи фиксируем $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ такое, что $N < \mathbf{n}$.

Полагаем, что $\mathcal{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}})$, получая семейство всех непустых п/м $\overline{1, \mathbf{n}}$. Кроме того, мы фиксируем множество $Y^0 \in \mathrm{Fin}(X)$, рассматривая его элементы как возможные пункты эвакуации.

При $k \in \overline{1, \mathbf{n}}$ вводим функцию $\widetilde{\mathbf{c}}(\cdot, \cdot, k)$ вида

$$(x, y) \longmapsto \widetilde{\mathbf{c}}(x, y, k) : \ \mathbf{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}_+, \tag{38}$$

определяющую радиационное воздействие одиночного источника, локализованного в заданной точке $\mu_k \in X$. Эти точки $\mu_k, \ k \in \overline{1, \mathbf{n}}$, считаем фиксированными, причем точки $\mu_k, \ k \in \overline{1, N}$, связаны с соответствующими мегаполисами. Формулы, определяющие (38), приведены в [1] и учитывают различные возможности, возникающие на этапе внешних перемещений. Если $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbb{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то полагаем, что

$$\mathbf{c}(x, y, K) = \sum_{k \in K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}} \widetilde{\mathbf{c}}(x, y, \{k\}). \tag{39}$$

Тем самым определена функция $\mathbf{c}$. Если $j \in \overline{1, N}$ и $k \in \overline{1, \mathbf{n}}$, то вводим функцию

$$\widehat{c}_j(\cdot, k) = \big(\widehat{c}_j(z, k)\big)_{z \in \mathbb{M}_j} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_j], \tag{40}$$

оценивающую воздействие k-го источника на исполнителя при перемещениях последнего из $\mathrm{pr}_1(z)$ к μ_j и от μ_j к $\mathrm{pr}_2(z)$ для всякого $z \in \mathbb{M}_j$; формулы, оценивающие это воздействие, соответствуют описанию оценки внешних перемещений в [1] (имеются в виду два прямолинейных перемещения, на которых определяются [1] соответствующие дозы; учитываются также дозы, получаемые в статическом режиме непосредственно при демонтаже). При этом в виде мегаполисов имеем конечные плоские множества; полагаем, что при $j \in \overline{1, N}$ точка μ_j содержится в выпуклой оболочке M_j. Каждая из функций (40) получается суммированием трех функций; см. [17, (3.5)]. Итак, при $j \in \overline{1, N}$ фиксируем

$$\widehat{c}_j^{(1)} \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{M}_j \times \overline{1, N}], \ \ \widehat{c}_j^{(2)} \in \mathcal{R}_+[\overline{1, N}], \ \ \widehat{c}_j^{(3)} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}_j \times \overline{1, N}],$$

для которых при $z \in \mathbb{M}_j$ и $k \in \overline{1, N}$

$$\widehat{c}_j(z, k) = \widehat{c}_j^{(1)}(\mathrm{pr}_1(z), k) + \widehat{c}_j^{(2)}(k) + \widehat{c}_j^{(3)}(\mathrm{pr}_2(z), k). \tag{41}$$

В (41) первое слагаемое определяет дозу радиации, получаемую (при действии k-го источника) исполнителем при прямолинейном перемещении из $\mathrm{pr}_1(z)$ в направлении к μ_j до точки, близкой к μ_j настолько, чтобы была возможность осуществить демонтаж μ_j (при $j \neq k$ можно рассматривать движение до μ_j). Второе слагаемое в (41) определяет дозу радиации от k-го источника непосредственно при демонтаже; эта доза определяется при $j \neq k$ расстоянием между μ_j и μ_k и временем, необходимым для осуществления демонтажа (данное время задается). Наконец, третье слагаемое в (41) определяет дозу от воздействия k-го источника при перемещении от μ_j к $\mathrm{pr}_2(z)$ (при

$j = k$ данное слагаемое зануляется). Для конкретного определения трех упомянутых значений используются формулы [1]; см. также [17, раздел 3] и, в частности, [17, (3.7)].

Обсудим теперь определение функции f, исходя из предположения, что источники $\mu_{N+1}, ..., \mu_{\mathbf{n}}$ на этапе эвакуации не демонтированы и продолжают оказывать радиационное воздействие на исполнителя. В этом случае мы используем для оценки этого воздействия аналоги функции (39). Мы полагаем при этом, что оцениваются перемещения из точек объединения всех множеств $\mathbf{M}_j,\ j \in \overline{1, N}$, в точки множества Y_0. Для терминальной компоненты f критерия имеет место представление, подобное (39). С целью его реализации мы рассмотрим, как и ранее, оценки воздействий, создаваемых отдельными источниками.

Итак, если $k \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$, то вводим функцию $c^*(\cdot, \cdot, k) \in \mathcal{R}_+\big[\big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\big) \times Y_0\big]$ вида

$$(x, y) \longmapsto c^*(x, y, k) :\ \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\Big) \times Y_0 \to \mathbb{R}_+, \tag{42}$$

определяющую дозу радиации, создаваемую k-м источником при перемещении из точки множества, являющегося объединением всех $\mathbf{M}_j,\ j \in \overline{1, N}$, в точку множества Y_0. Конкретное определение значений реализуется формулами [1] для внешних перемещений (с использованием штрафов при прохождении через какой-то источник «по пути»). Тогда при $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i$ полагаем, что

$$f(x) \overset{\triangle}{=} \min_{y \in Y_0} \sum_{k=N+1}^{\mathbf{n}} c^*(x, y, k); \tag{43}$$

заметим здесь же, что точка множества Y_0, доставляющая минимум в правой части (43), может рассматриваться как оптимальная для x точка эвакуации. Посредством (42) и (43) завершается определение терминальной компоненты критерия (12).

5. Вычислительный эксперимент

Рассматриваемый в данной работе алгоритм решения задачи обхода мегаполисов был реализован в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке программирования C++ и работающей в 64-х разрядной операционной системе Windows, начиная с версии 7. Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке; для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления результатов (мегаполисов и траектории движения по ним), увеличения отдельных участков графика и сохранения в файл графического формата bmp. Исходные данные и результаты работы программы хранятся в текстовом файле специальной структуры. Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с центральным процессором Intel Core i7, объемом ОЗУ 64 гБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1. Рассмотрим пример работы программы.

На плоскости заданы 35 мегаполисов, являющиеся 6-элементыми множествами в виде равномерных «сеток» на окружностях, и источники излучения внутри контуров соответствующих окружностей. Имеется 8 источников излучения, не подлежащих демонтажу данным исполнителем:

$$(-70, -100); (-5, -70); (-10, 15); (35, 70); (90, 20); (95, -20); (40, -55); (-50, 40).$$

Заданы множество X^0 возможных точек начала процесса демонтажа:

$$X^0 = \big\{(90,35);(0,0);(90,-35);(-90,35);(-70,-80)\big\}$$

и множество Y^0 возможных пунктов эвакуации исполнителя после выполнения работ:

$$Y^0 = \big\{(-70,45);(-40,-45);(-10,-50);(90,0);(40,50);(90,-100)\big\}.$$

Количество адресных пар (мощность множества $\mathbf{K}$) равно 49.

В модельном примере принимается, что скорость перемещения вне мегаполисов (внешние перемещения) в 4 раза больше, чем при перемещении на этапе выполнения внутренних работ и при покидании мегаполиса (внутренние перемещения). При вычислении дозы радиации, получаемой исполнителем, в качестве расстояния используется евклидова метрика.

Интенсивности излучения подлежащих демонтажу источников находятся в пределах от 1,3 до 4,9. Интенсивности излучения не подлежащих демонтажу источников находятся в пределах от 1,5 до 4,7. Время выполнения демонтажа находится в пределах 1,1 до 1,7. Размеры (радиусы) «ближних» зон источников излучения находятся в пределах от 1,1 до 1,4.

Результаты работы программы:

Величина совокупных затрат: 254,693.

Выбрана начальная точка: (−90,35).

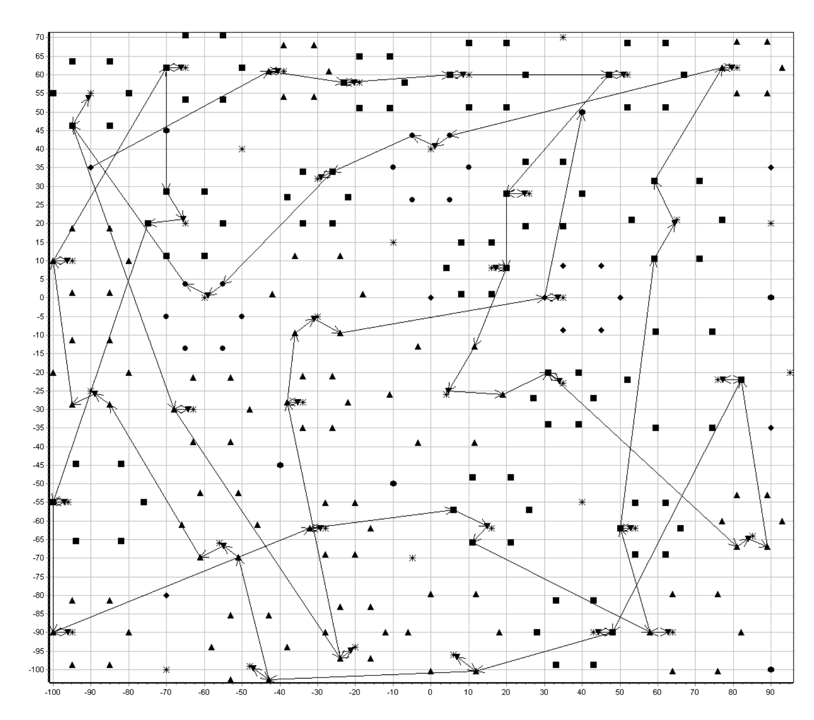
Первый пункт посещения мегаполисов: $\big((-43,61);(-43,61)\big) \in M_{30} \times M_{30}$.

Последний пункт посещения мегаполисов: $\big((30,-0);(30,-0)\big) \in M_{35} \times M_{35}$.

Выбрана точка эвакуации: (40,50).

Время вычисления: 37 час 23 мин 13 сек.

График траектории движения по мегаполисам приведен на рисунке.



Маршрут и трасса обхода мегаполисов

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-08-00873).

Литература

1. Ченцов, А.Г. Модельный вариант задачи о последовательной утилизации источников излучения (итерации на основе оптимизирующих вставок) / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2017. – Т. 50. – С. 83–109.
2. Коробкин, В.В. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций / В.В. Коробкин, А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, А.Г. Ченцов. – М.: Новые технологии, 2012.
3. Chentsov, A.G. Optimization «In Windows» for Routing Problems with Constraints A.A. Chentsov, A.G. Chentsov, A.M. Grigor'ev // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – V. 1090. – P. 470–485.
4. Gutin, G. The Traveling Salesman Problem and Its Variations / G. Gutin, A.P. Punnen. – Berlin: Springer, 2002.
5. Cook, W.J. In Pursuit of the Traveling Salesman. Mathematics at the Limits of Computation / W.J. Cook. – Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2012.
6. Гимади, Э.Х. Экстремальные задачи на множествах перестановок / Э.Х. Гимади, М.Ю. Хачай. – Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
7. Литл, Дж. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере / Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел // Экономика и математические методы. – 1965. – Т. 1, № 1. – С. 94–107.
8. Беллман, Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере / Р. Беллман // Кибернетический сборник. – 1964. – № 9. – С. 219–228.
9. Хелд, М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения / М. Хелд, Р.М. Карп // Кибернетический сборник. – 1964. – № 9. – С. 202–218.
10. Ченцов, А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории / А.Г. Ченцов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2008.
11. Куратовский, К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. – М.: Мир, 1970.
12. Дьедонне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. – М.: Мир, 1964.
13. Кормен, Т. Алгоритмы: Построение и анализ. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – МЦНМО, 2002.
14. Варга, Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга. – М.: Наука, 1977.
15. Ченцов, А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ / А.Г. Ченцов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2013. – № 1. – С. 59–82.
16. Ченцов, А.Г. Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов / А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 11. – С. 96–117.
17. Ченцов, А.Г. О задаче последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования и функциями стоимости с зависимостью от списка заданий / А.Г. Ченцов, А.А. Ченцов, А.Н. Сесекин // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2020. – Т. 26, № 3. – С. 219–234.
18. Петунин, А. А. Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы / А.А. Петунин, А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов. – Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2020.
19. Ченцов, А.Г. Одна задача маршрутизации работ в условиях повышенной радиации / А.Г. Ченцов, А.А. Ченцов, А.Н. Сесекин // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2021. – Т. 58. – С. 94–126.

20. Chentsov, A.G. The Routing Problems with Optimization of the Starting Point: Dynamic Programming / A.G. Chentsov, P.A. Chentsov // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2019. – Т. 54. – С. 102–121.

Александр Георгиевич Ченцов, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация); Уральский федеральный университет, профессор (г. Екатеринбург, Российская Федерация), chentsov@imm.uran.ru.

Алексей Александрович Ченцов, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация), chentsov.a@binsys.ru.

Поступила в редакцию 6 апреля 2022 г.

MSC 90C27 **DOI: 10.14529/mmp220306**

ON ONE ROUTING PROBLEM ORIENTED ON THE PROBLEM OF DISMANTLING RADIATION-HAZARDOUS OBJECTS

***A.G. Chentsov*[1,2], *A.A. Chentsov*[1]**
[1]N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russian Federation
[2]Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation
E-mail: chentsov@imm.uran.ru, chentsov.a@binsys.ru

We consider a problem of sequential visiting of megalopolises under the preceding conditions and costs functions depending on the list of tasks currently unfulfilled. Selection of a routing process involving index permutation, trajectory and starting point is optimized; point of finish is optimized also. We use additive criterion consisting in summary costs of external (as for megalopolises) movings, costs of works related to visiting of megalopolises and assessments of the terminal state. Procedure of construction of optimal solution based on widely understood dynamic programming is investigated. The statement is focused on the problem of dismantling the system of radiation–hazardous sources; at the same time, it is assumed that not all sources are dismantled (it is possible when workers receive maximum doses of radiation), which requires evacuation in conditions of radiation exposure of sources that remain undismantled. A specific variant of the criterion is reduced to the summary dose of radiation received by an employee both at the stage of dismantling and at the stage of evacuation. An algorithm based on the theoretical constructions is proposed and realized on personal computer; a computational experiment is completed.

Keywords: route; trace; preceding conditions; dynamic programming.

References

1. Chentsov A.A., Chentsov A.G. [A Model Variant of the Problem About Radiation Sources Utilization (Iterations Based on Optimization Insertions)]. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, no. 50, pp. 83–109. (in Russian) DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-08
2. Korobkin V.V., Sesekin A.N., Tashlikov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizacii i ih prilozheniya v zadachah povysheniya bezopasnosti i ehffektivnosti ehkspluatacii atomnyh stanciy* [Methods of Routing and Their Appendix in Problems of Increase of Efficiency and Safety of Operation of Nuclear Power Plants]. Moscow, Novye tekhnologii, 2012. (in Russian)

3. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Grigor'ev A.M. Optimization "in Windows" for Routing Problems with Constraints. *Communications in Computer and Information Science*, 2019, vol. 1090, pp. 470–485. DOI: 10.1007/978-3-030-33394-2_36
4. Gutin G., Punnen A.P. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations.* Berlin, Springer, 2002.
5. Cook, W.J. *In Pursuit of the Traveling Salesman. Mathematics at the Limits of Computation.* Princeton, Princeton University Press, 2012.
6. Gimadi Je.H., Khachay M.Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvah perestanovok* [Extremal Problems on Sets of Permutations]. Ekaterinburg, UMC UPI, 2016. (in Russian)
7. Liitle D, Murty K. Sweeney D., Karel C. An Algorithm for Traveling for the Traveling Salesman Problem. *Economics and Mathematical Methods*, 1965, vol. 1, no. 1, pp. 94–107. (in Russian)
8. Bellman R. [Application of Dynamic Programming to the Traveling Salesman Problem]. *Kiberneticheskij sbornik*, 1964, no. 9, pp. 219–228. (in Russian)
9. Held M., Karp M. [Application of Dynamic Programming to the Problem of Ordering]. *Kiberneticheskij sbornik*, 1964, no. 9, pp. 202–218. (in Russian)
10. Chentsov A.G. *Jekstremal'nye zadachi marshrutizacii i raspredelenija zadanij: voprosy teorii* [Extremal Problems of Routing and Distribution of Tasks: Questions of Theory]. Moscow, Izhevsk, RHD, 2008. (in Russian)
11. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* [Set Theory]. Moscow, Mir, 1970. (in Russian)
12. Dieudonne J. *Osnovy sovremennogo analiza* [Foundations of Modern Analysis]. Moscow, Mir, 1964. (in Russian)
13. Kormen T., Lejzerson Ch., Rivest R. *Algoritmy: Postroenie i analiz* [Introduction to Algorithms]. Moscow, MCNMO, 1999. (in Russian)
14. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differencial'nymi i funkcional'nymi uravneniyami* [Optimal Control of Differential and Functional Equations]. Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)
15. Chentsov A.G. [To Question of Routing of Works Complexes]. *Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2013, no. 1, pp. 59–82. (in Russian)
16. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Routing under Constraints: Problem of Visit to Megalopolises. *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 11, pp. 1957–1974.
17. Chentsov A.G., Chentsov A.A., Sesekin A.N. On the Problem of Sequential Traversal of Megalopolises with Precedence Conditions and Cost Functions Depending on a List of Tasks. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 219–234. (in Russian) DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-219-234
18. Petunin A.A, Chentsov A.G., Chentsov P.A. *Optimal'naya marshrutizatsiya instrumenta mashin figurnoi rezki s chislovym programmnym upravleniem. Matematicheskie modeli i algoritmy* [Optimal Tool Routing for CNC Shape Sheet Cutting Machines. Mathematical Models and Algoritms]. Ekaterinburg, Ural University, 2020. (in Russian)
19. Chentsov A.G., Chentsov A.A., Sesekin A.N. One Task of Routing Jobs in High Radiation Conditions. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 58, pp. 94–126. (in Russian) DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-06
20. Chentsov A.G., Chentsov P.A. The Routing Problems with Optimization of the Starting Point: Dynamic Programming. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 102–121. (in Russian) DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-08

Received April 6, 2022