УДК 519.6 DOI: 10.14529/mmp220409

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

***Б.Г. Гребенщиков*[1], *А.Б. Ложников*[2,3]**
[1]Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
[2]Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация
[3]Уральский государственный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Статья посвящена исследованию свойств систем дифференциальных уравнений, содержащих большое (в частности, линейное) запаздывание. Системы с линейным запаздыванием имеют достаточно широкое применение в биологии, в частности, при моделировании распределения клеток в ткани организма; а также в теории нейронных сетей. Уравнения подобного типа встречаются также в задачах физики и механики, где важным моментом является асимптотическое поведение решения (в частности, асимптотическая устойчивость). При неустойчивости таких систем возникает задача стабилизации. Оптимальный алгоритм стабилизации основан на совокупности стабилизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений и в дальнейшем разностных систем. Данный алгоритм достаточно просто реализуется с использованием численных методов решения систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и решения матричных уравнений. Авторами составлена программа, позволяющая достаточно эффективно находить управляющее воздействие, осуществляющее стабилизацию некоторых систем.

Ключевые слова: запаздывание; устойчивость; стабилизация.

Введение

Рассматривается задача получения достаточных условий асимптотической устойчивости (а также неустойчивости) и в дальнейшем стабилизации систем с большим (в частности, с линейным) запаздыванием. Системы с линейным запаздыванием имеют достаточно широкое применение в биологии, в частности, в при моделировании распределения клеток в ткани организма; а также в теории нейронных сетей. Уравнения подобного типа встречаются в задачах физики и механики, где важным моментом является асимптотическое поведение решения (в частности, асимптотическая устойчивость).

Одним из методов исследования систем с линейным запаздыванием является замена аргумента $\tau = \ln(t)$. В результате замены запаздывание становится постоянным, но в правой части получающейся в результате замены системы появляется множителем экспонента. Методы исследования, предложенные авторами, существенно учитывают этот факт. Подобными же свойствами обладают и сингулярные системы с постоянным запаздыванием. Предложенные алгоритмы стабилизации могут быть использованы и для стабилизации некоторых более сложных систем.

1. Исследование асимптотических свойств некоторых систем с запаздыванием

Рассматривается следующая управляемая система с линейным запаздыванием:

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bx(\mu t) + Cu(t), \ \ \mu = \text{const}, \ \ 0 < \mu < 1. \tag{1}$$

Здесь A, B – постоянные матрицы размерности $[m \times m]$, C – постоянная матрица размерности $[m \times r]$, $x(t)$ – m-мерная вектор-функция времени t, $u(t)$ – r-мерная вектор-функция управляющего воздействия, $t \geq t_0 > 0$.

Решение системы (1) определено в момент времени t_0 вектор-функцией $\bar{\varphi}(t)$, заданной на отрезке $[\mu t_0, t_0]$. Заменой аргумента $\tau = \ln(t)$ сведем систему (1) к системе с постоянным запаздыванием $\sigma = -\ln(\mu)$

$$dz(\tau)/d\tau = e^{\tau}[Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma) + Cu(\tau)]. \tag{2}$$

Для начального момента времени τ_0 решение системы (2) однозначно определяется начальной вектор-функцией $\varphi(\eta) : \eta \in [-\sigma, 0]$. Пусть $u(t) \equiv 0$. Покажем, что при получении достаточных условий неустойчивости иногда эффективнее использовать систему (2), а именно, рассмотрим скалярный случай. Если для системы (1) взять функционал Ляпунова – Красовского в виде [1] $V(t, x(t)) = x^2(t) + \alpha \int_{\mu t}^{t} x^2(\theta)d\theta$, ($\alpha =$ const) и вычислить $dV(t, x(t))/dt$, то, в силу системы (1), получим соотношение

$$dV(t, x(t))/dt = (\alpha + 2a)x^2(t) + 2bx(t)x(\mu t) - \mu\alpha x^2(\mu t). \tag{3}$$

Квадратичная форма величин $x(t), x(\mu t)$, стоящая в правой части (3), достигает экстремума при $\alpha = -a$, положительно определена при $a > 0$, $|b| < \sqrt{\mu}a$. Так как функционал $V(t, x(t))$ является знакопеременным, то мы находимся в условиях теоремы Четаева – Шиманова [2] и получаем достаточные условия неустойчивости системы (1).

Если же теперь рассмотреть функционал $V_\sigma(\tau, z(\tau)) = e^{-\tau}z^2(\tau) + \alpha \int_{\tau-\sigma}^{\tau} z^2(\theta)d\theta$ и вычислить $dV_\sigma(\tau, z(\tau))/d\tau$ в силу системы (2), аналогично получаем достаточные условия неустойчивости при $a > 0$, $|b| < a$ – более широкие. Применение функционалов типа $V_\sigma(\tau, z(\tau))$ позволяет получать достаточные условия неустойчивости и для некоторых нелинейных систем.

Справедливы более точные достаточные условия неустойчивости системы (2). Пусть λ – собственные числа матрицы A. Ранее доказано [3], что в случае существования величины λ_0: $\mathrm{Re}(\lambda_0) > \delta$: $\delta = \mathrm{const}$, $\delta > 0$, решение системы (2) неустойчиво при любой матрице B. В случае же неравенства $\mathrm{Re}(\lambda) < -H$, $H = \mathrm{const}$, $H > 0$, поведение решения зависит от собственных чисел ρ матрицы $-A^{-1}B$, а именно, если величины $|\rho|$ меньше единицы, то решение системы (2) экспоненциально устойчиво, если же найдется величина ρ_0: $|\rho_0| > 1$, то решение системы (2) неустойчиво [4]. Приведем еще некоторые свойства системы (2). Сведем данную систему к счетной системе дифференциальных уравнений на конечном промежутке времени $[\tau_0, \tau_0 + \sigma]$. Счетная система имеет вид [5]

$$\varepsilon_n dz_{n+1}(\tau)/d\tau = e^{\tau}[Az_{n+1}(\tau) + Bz_n(\tau)], \;\; z_{n+1}(\tau) = z(\tau + n\sigma), \tag{4}$$

$$z_{n+1}(\tau_0) = z_n(\tau_0 + \sigma), \;\; z_0(\tau) = \varphi(\tau - \sigma), \;\; \varepsilon_n = \mu^n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, рассмотрим теперь сингулярную систему

$$\varepsilon dy(\tau)/d\tau = Ay(\tau) + By(\tau - \sigma) \tag{5}$$

(ε – малое положительное число). Ей будет соответствовать счетная система

$$\varepsilon dy_{n+1}(\tau)/d\tau = Ay_{n+1}(\tau) + By_n(\tau), \;\; y_{n+1}(\tau_0) = y_n(\tau_0 + \sigma). \tag{6}$$

Получим для системы (5) достаточные условия устойчивости и неустойчивости.

Введем норму вектора $w = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}^\top : \|w\| = \max\limits_{1\leq k\leq m} |w_k|$ ($\top$ – значок транспонирования). Норму матрицы $S = \{s_{ij}\}$ определим в соответствии с нормой вектора. Наряду с такой нормой вектора введем норму вектор-функции на отрезке $[\tau_0, \tau_0+\sigma]$: $\|w(\tau)\|_\sigma = \max\limits_{\tau} \|w(\tau)\|$. При такой нормировке данное нормированное пространство будет банаховым пространством. Введем в данном пространстве оператор сдвига T_ε, определенный следующим образом:

$$T_\varepsilon f(s) = \exp\{A\tau\varepsilon^{-1}\}\left[\exp\{-A\tau_0\varepsilon^{-1}\}f(\tau_0+\sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\{-As\varepsilon^{-1}\}Bf(s)\varepsilon^{-1}ds\right].$$

Тогда решение счетной системы (6) можно представить следующим образом:

$$y_{n+1}(\tau) = T_\varepsilon y_n(s).$$

Оператор T_ε является вполне непрерывным [5], следовательно, асимптотические свойства системы (5) зависят от собственных значений ν_j данного оператора. Комплексное число ν тогда и только тогда является собственным значением оператора T_ε, когда интегральное уравнение

$$\exp\{\nu A\tau\varepsilon^{-1}\}\exp\{-\nu A\tau_0\varepsilon^{-1}\}y(\tau_0+\sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau}\exp\{-\nu As\varepsilon^{-1}\}\varepsilon^{-1}By(s)ds = \nu y(\tau)$$

имеет нетривиальное решение [5]. Дифференцируя это соотношение по τ, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\nu}{\varepsilon}[Ay(\tau) + \nu^{-1}By(\tau)] = \nu\frac{dy(\tau)}{d\tau}.$$

Решением этого уравнения является выражение

$$y(\tau) = \exp\{\varepsilon^{-1}(A+\nu^{-1}B)(\tau-\tau_0)\}y(\tau_0),$$

откуда, ввиду граничных условий, имеем характеристическое уравнение

$$\det\left(\exp\left\{(A+B\nu^{-1})\frac{\sigma}{\nu}\right\} - \nu E\right) = 0. \tag{7}$$

(Здесь E – единичная матрица размерности $[m\times m]$). Пусть $\exists\lambda_0$: $\mathrm{Re}(\lambda_0) > 0$. Тогда, ввиду того, что $\nu_0 = \exp\{\lambda_0\varepsilon^{-1}\}$ является собственным числом матрицы $\exp\{\varepsilon^{-1}A\}$, в малой окрестности ν_0 уравнение (7) имеет вид

$$\det\left(\exp\left\{(A+O(\varepsilon))\frac{\sigma}{\varepsilon}\right\} - \nu E\right) = 0,$$

следовательно, по теореме Руше в малой окрестности точки ν_0 найдется корень уравнения (7) больше единицы по модулю, т.е. решение уравнения (5) неустойчиво. Пусть теперь для λ справедливо неравенство $\mathrm{Re}(\lambda) < -H$. Тогда, ввиду оценки $\|\exp\{\varepsilon^{-1}A(\tau-s)\}\| \le M\exp\{-\varepsilon^{-1}H(\tau-s)\}$, $M = \mathrm{const}$, $M>1$, $\tau_0 < s < \tau \le \tau_0+\sigma$, оператор T_ε удовлетворяет оценке $\|T_\varepsilon\| < M(1+\frac{\|B\|}{H})$, т.е. равномерно ограничен при любом ε. Следовательно, $|\nu_j| \le M(1+\frac{\|B\|}{H})$.

Сделав замену $\nu = e^{\sigma\gamma}$: $-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Im}(\gamma) \le \dfrac{\pi}{2}$, мы получаем из (7) характеристическое уравнение

$$\det\{A + Be^{-\sigma\gamma} - \gamma\varepsilon E\} = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим поведение корней этого уравнения в комплексной области

$$\bar{G}: \ \ 0 \leq \mathrm{Re}(\gamma) \leq \ln\left[M\left(1 + \frac{\|B\|}{H}\right)\right], \ \ -\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Im}(\gamma) \leq \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

(при достаточно малом $\varepsilon > 0$). Очевидно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в данной области корни уравнения (8) как угодно близки к корням вырожденного уравнения

$$\det\{A + Be^{-\sigma\gamma}\} = 0. \tag{10}$$

А в области $\bar{G}$ при условии отсутствия корней $|\rho| \geq 1$ все корни уравнения (8) имеют отрицательную вещественную часть. С другой стороны, ввиду произведенной замены, только в этой области и могли быть корни уравнения (8) с неотрицательной вещественной частью. Таким образом, решение системы (5) экспоненциально устойчиво. Наоборот, в случае существования корня ρ_0 следует, что в данной области найдется корень уравнения (8) с положительной вещественной частью, следовательно, система (5) неустойчива. Но данные достаточные условия устойчивости (и неустойчивости) совпадают с такими же условиями асимптотической устойчивости (а также неустойчивости) и для системы (2), полученных ранее в работах [3, 4].

Отметим следующее. Если в счетной дифференциально-разностной системе (4) также ввести оператор сдвига $T_{n,\tau}$

$$T_{n,\tau}f(s) = \exp\left\{Ae^{n\sigma+\tau}\left[\exp\{-Ae^{n\sigma+\tau_0}\}f(\tau_0+\sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau}\exp\{-Ae^{n\sigma+s}\}Be^{n\sigma+s}f(s)ds\right]\right\},$$

то ее решение будет иметь вид $z_{n+1}(\tau) = T_{n,\tau}z_n(s)$, а для собственных значений p_n данного оператора получаем уравнение

$$\det\left(\exp\left\{\frac{t_0(1-\mu)}{\mu^{n+1}}\left(A + \frac{B}{p_n}\right)\right\} - p_nE\right) = 0$$

с аналогичными асимптотическими свойствами корней при больших n.

2. Методы стабилизации некоторых систем

1. Пусть $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, а система (1) неустойчива, или устойчива, но не асимптотически. Тогда данную проблему можно рассматривать как задачу оптимальной стабилизации разностной системы

$$y_{n+1} = -A^{-1}By_n - A^{-1}Cv_v = A_2y_n + C_1v_n \tag{11}$$

с минимизацией какого-либо функционала

$$Q = \sum_{j=1}^{\infty} y_j^\top Gy_j + v_j^\top Dv_j.$$

Здесь G и D – симметричные положительно определенные матрицы размерности, соответственно, $[m \times m]$ и $[r \times r]$. При условии полной управляемости системы (11) искомое управление имеет вид [6]

$$v_n^0 = [D + (C_1)^\top PC_1]^{-1}(C_1)^\top A_2y_n = A_1y_n.$$

P – симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$(A_2)^\top PA_2 - P + G - ((C_1)^\top PA_2)^\top [D + (C_1)^\top PC_1]^{-1}(C_1)^\top PA_2 = 0.$$

Переходя к системе (1), получаем асимптотически устойчивую систему

$$dx(t)/dt = Ax(t) + (B + CA_1)x(\mu t).$$

2. Пусть имеется собственное число λ_0. Стабилизируем систему без запаздывающих членов

$$dx_0(t)/dt = Ax_0(t) + Cu_0(t) \tag{12}$$

при законе стабилизации $u_1^0 = -C^\top \Gamma x_0(t)$, Γ – симметричная, положительно определенная матрица, удовлетворяющая нелинейному уравнению [7]

$$\Gamma A + A^\top \Gamma - 2\Gamma CC^\top \Gamma = -\beta\Gamma. \tag{13}$$

(β – положительная константа, ей мы можем распоряжаться). Известно [7], что при таком методе стабилизации справедливы соотношения

$$V(x_0(t), t) = x_0(t))^\top \Gamma x_0(t),\ \ dV(x_0(t), t)/dt = -\beta V(x^0(t), t).$$

Более того, при существовании A^{-1}, матрица Γ^{-1} удовлетворяет линейному уравнению

$$A\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}A^\top - 2CC^\top = -\beta\Gamma^{-1}.$$

Из данного уравнения следует, что Γ^{-1} стремится к нулевой матрице при $\beta \to \infty$. Следовательно, сама матрица Γ становится большой и ввиду закона управления в некоторых случаях матрица, обратная матрице $A_s = A - CC^\top\Gamma$ может оказаться такой, что собственные числа ρ_s матрицы $(A_s)^{-1}B$ будут по модулю меньше единицы при достаточно большом $\beta > 0$, т.е. возможна стабилизация системы (1) в один этап.

Приведем конкретный пример. Рассмотрим управляемую систему второго порядка, где постоянные матрицы $A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}$ имеют вид

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix},\ \ B^{(2)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ \ C^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Здесь $a_1 = \text{const}$, $a_1 > 0$. Поскольку $\lambda_1 = \sqrt{a_1}$, $\lambda_2 = -\sqrt{a_1}$, то система без запаздывающих членов неустойчива. Производим стабилизацию системы без запаздывающих членов при достаточно большом β. Матрицы $\Gamma^{(2)}$ и $(A_s)^{-1}B^{(2)}$ будут иметь вид

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,5\beta(\beta^2 - 2a_1) & 0,5\beta^2 \\ 0,5\beta^2 & \beta \end{pmatrix},$$

$$(A_s)^{-1}B^{(2)} = \begin{pmatrix} (\beta b_{11} + b_{21})\delta_1 & (\beta b_{12} + b_{22})\delta_1 \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix},\ \ \delta_1 = \frac{1}{a_1 - 0,5\beta^2}.$$

Полагаем управление $u(t) = -(0,5\beta^2 x_1(t) + \beta x_2(t))$. Поскольку при $\beta^2 > 4a_1$ матрица $\Gamma^{(2)}$ является положительно определенной, а «предельная» матрица $(A_\infty)^{-1}B^{(2)} = \lim\limits_{\beta\to\infty}(A_s)^{-1}B^{(2)}$ имеет вид

$$(A_\infty)^{-1}B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix},$$

получаем, что при $|b_{12}| < 1$, при достаточно большом $\beta > 0$, возможна стабилизация системы в один этап.

Отметим, что вообще же, после стабилизации системы без запаздывающих членов далее производится стабилизация вырожденной (разностной) системы.

Следствие 1. *Предложенный алгоритм стабилизации применим и к стабилизации сингулярных систем* (2). *Если же при стабилизации таких систем использовать, например, алгоритм, предложенный в [8], то искомое управление* $u_\varepsilon(y)$ *имеет вид*

$$u_\varepsilon(y) = -D_1 c^\top \varepsilon^{-1} \left(P_1 \varepsilon^{-1} + \int_{-\sigma}^{0} P_1 \varepsilon^{-1} B y(s) ds \right),$$

где симметричная матрица P_1 *удовлетворяет уравнению*

$$P_1 \varepsilon (A + B) + \varepsilon (A^\top + B^\top) P_1 + \varepsilon^2 \int_{-\sigma}^{0} \bar{\varphi}(s) ds + \varepsilon^2 (C_3 + C_0) = P_1 K P_1. \tag{15}$$

В уравнении (15) D_1 – матрица, аналогичная матрице D, матрица $K = C D_1 C^\top$. Матрицами C_0, C_3 и вектор-функцией $\bar{\varphi}(s)$ мы можем распоряжаться (подробнее в [8]). Решать уравнение (15) можно в виде ряда по степеням ε. Очевидно, предложенный нами алгоритм более прост.

Рассмотрим теперь более сложную управляемую систему вида

$$dx(t)/dt = Ax(t) + \bar{A}x(t-\omega) + Bx(\mu t) + Cu(t),$$

$$\omega = \text{const}, \ \ \omega > 0, \ \ \mu = \text{const}, \ \ 0 < \mu < 1. \tag{16}$$

Предположим, что система без членов с линейным запаздыванием поточечно управляема. Известно [9], что рассматриваемая система

$$dx(t)/dt = Ax(t) + B_1 x(t-\sigma) + Cu(t)$$

тогда и только тогда поточечно управляема, когда эта система управляема в смысле Калмана [10] хотя бы при одном $0 \le m < +\infty$.

При условии поточечной управляемости существует невырожденное преобразование [9]

$$\bar{y}(t) = \bar{A}_0 x_0(t) + \bar{A}_1 x_0(t+\omega) + \ldots + \bar{A}_{m-1} x_0(t + (m-1)\omega), \tag{17}$$

приводящее систему (12) к виду

$$d\bar{y}(t)/dt = \hat{A}\bar{y}(t) + \bar{C}u(t). \tag{18}$$

Здесь матрица $\hat{A}$ размерности $[m \times m]$ имеет вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \ldots & \ldots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

(вычисление коэффициентов α_{ij} и матрицы $\bar{C}$ приведено в [9]). Таким образом, наличие членов с постоянным запаздыванием в правой части можно преодолеть с помощью подстановки, предложенной в [9]. Поскольку преобразование (17) невырожденное, мы можем найти теперь величину

$$x_0(t) = \bar{B}_0\bar{y}(t) + \bar{B}_1\bar{y}(t-\omega) + ... + \bar{B}_{m-1}\bar{y}(t-(m-1)\omega). \tag{19}$$

Подставив выражение (19) в систему (16), получаем управляемую систему вида

$$d\bar{y}(t)/dt = \hat{A}\bar{y}(t) + B\sum_{j=0}^{m-1}\bar{B}_j\bar{y}(\mu t - j\omega) + \bar{C}u(t).$$

Сначала будем стабилизировать систему без членов с запаздыванием. Допустим, мы стабилизировали ее. Рассмотрим полученную теперь систему

$$d\bar{y}(t)/dt = \hat{A}_S\bar{y}(t) + B\sum_{j=0}^{m-1}\bar{B}_j\bar{y}(\mu t - j\omega) + \bar{C}u(t). \tag{20}$$

Пусть при $u(t) \equiv 0$ она неустойчива. Полагаем величину $\mu > 0$ достаточно малой.

Предложение 1. *Пусть $u(t) \equiv 0$. При достаточно малом $\mu > 0$ величина $\bar{y}'(t)$ асимптотически устойчива.*

Доказательство. Продифференцируем систему (20) по t (для достаточно больших t производные существуют). Получаем систему

$$d^2\bar{y}(t)/dt^2 = \hat{A}_S\bar{y}'(t) + \mu B\sum_{j=0}^{m-1}\bar{B}_j\bar{y}'(\mu t - j\omega). \tag{21}$$

Пусть $t \geq h$, (полагаем, что при выполнении этого равенства производная от $y(t)$ существует и непрерывна). Считая неоднородностью члены с линейным запаздыванием, запишем ее решение в форме Коши

$$\bar{y}'(t) = Y(t-h)\psi_1(t) + \mu\int_h^t Y(t-s)B\left[\sum_{j=0}^{m-1}\bar{B}_j\bar{y}'(\mu s - j\omega)\right]ds. \tag{22}$$

Здесь $Y(t-s)$ – матрица Коши системы без запаздывающих членов, $\psi_1(t)$ – начальная функция для $\bar{y}'(t)$. Ввиду того что система без запаздывающих членов, соответствующая системе (16), экспоненциально устойчива, справедлива оценка

$$\|Y(t-s)\| \leq k_0e^{-\bar{\beta}(t-s)},\ \ k_0 = \mathrm{const},\ \ k_0 \geq 1,$$

$$\bar{\beta} = \mathrm{const},\ \ \bar{\beta} > 0$$

Поскольку запаздывания имеют вид $\Omega_j = (1-\mu)t + j\omega \leq \bar{\Omega}(t)$, $\bar{\Omega}(t) = (1-\mu)t + (m-1)\omega$, $d\Omega(t)/dt = (1-\mu) < 1$, $1-\mu > 0$, то при

$$\frac{\mu\|B\|\bar{b}k_0}{\bar{\beta}} < 1,\ \ \bar{b} = \sum_{j=0}^{m-1}\|\bar{B}_j\| \tag{23}$$

решение системы (22) асимптотически устойчиво, при этом справедлива оценка [11]

$$\|y'(t)\| \leq \bar{M}\left(\frac{(1-\mu)t+(m-1)\omega}{(1-\mu)h+(m-1)\omega}\right)^{\chi},$$

$$\chi = \frac{\bar{\sigma}}{\mu-1}, \quad M = \mathrm{const}, \quad M \geq 1. \tag{24}$$

Решение системы (22) мажорируется вектор-функцией – решением уравнения первого порядка

$$d\hat{y}(t)/dt = -\bar{\beta}\hat{y}(t) + p(t)\hat{y}(t-\Omega(t)),$$

$$p(t) = \left\{\bar{\beta} - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\Omega}}\right\}\exp\left\{-\bar{\sigma}\int_{t-\bar{\Omega}(t)}^{t}\frac{ds}{\bar{\Omega}(s)}\right\}.$$

Здесь константа $\bar{\sigma} > 0$ выбирается таким образом, чтобы при всех $t \geq t_0$ величина $p(t) > \|B\|bk_0$ (подробнее в [11]). Таким образом, $\|y'(t)\| \to 0$, причем справедлива оценка (24). □

Предложение 2. *При достаточно малых* $\mu > 0$ *системой первого приближения для системы* (20) *является система*

$$dy^0(t)/dt = Ay^0(t) + B\left[\sum_{j=0}^{m-1}\bar{B}_j\right]y^0(\mu t). \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $x(\mu t - \vartheta)$, где $\varphi = \mathrm{const}$ $(\varphi > 0)$, производная этой вектор-функции удовлетворяет оценке (24). Из формулы Лагранжа для каждой i-й компоненты следует равенство $x_i(\mu t - \varphi) = x_i(\mu t) - \varphi\mu x_i'(\theta_i\mu t + (1-\theta_i)(\mu t - \varphi))$, $\theta_i = \mathrm{const}$, $0 < \theta_i < 1$. Ввиду оценки (24) для достаточно больших t имеем асимптотическое равенство

$$x(\mu t - j\omega) = x(\mu t) + O(\mu)\sup_{\mu t - j\omega \leq \eta \leq \mu t}\|x(\mu t - \eta)\|. \tag{26}$$

Но тогда системой первого приближения является система (25) (данное утверждение следует из работы [12]). □

Отсюда вытекает, что задача стабилизации системы (20) сведена к успокоению разностной системы [6]

$$\bar{y}(t) = -(\hat{A}_s)^{-1}[B\sum_{j=0}^{m-1}\bar{B}_j\bar{y}(\mu t - j\omega) + \bar{C}\bar{u}(t)] = \sum_{j=0}^{m-1}R_j\bar{y}(\mu t - j\omega) + \hat{C}\bar{u}(t). \tag{27}$$

Литература

1. Красовский, Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н.Н. Красовский. – М.: Физматгиз, 1959.
2. Шиманов, С.Н. О неустойчивости движения систем с запаздываниями по времени / С.Н. Шиманов // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 1. – С. 55–63.
3. Гребенщиков, Б.Г. Асимптотическое поведение решений одной стационарной системы с запаздыванием / Б.Г. Гребенщиков, В.И. Рожков // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 5. – С. 751–758.
4. Гребенщиков, Б.Г. О неустойчивости некоторых систем с линейным запаздыванием / Б.Г. Гребенщиков, С.И. Новиков // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 2. – С. 3–13.

5. Репин, Ю.М. Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при запаздываниях / Ю.М. Репин // Ученые записки Уральского университета. – 1960. – Вып. 23. – С. 31–34.
6. Фурасов, В.Д. Устойчивость и стабилизация дискретных процессов / В.Д. Фурасов. – М.: Наука, 1982.
7. Фурасов, В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация / В.Д. Фурасов. – М.: Наука, 1977.
8. Ким, А.В. Линейно-квадратичная задача управления для систем с запаздыванием по состоянию. Точные решения уравнений Риккати / А.В. Ким, А.Б. Ложников // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 7. – С. 15–31.
9. Марченко, В.М. К теории канонических форм систем управления с запаздыванием / В.М. Марченко // Математический сборник. – 1978. – Т. 105, № 3. – С. 403–412.
10. Зубов, В.И. Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М.: Наука, 1975.
11. Рожков, В.И. Оценки решений некоторых систем дифференциальных уравнений с большим запаздыванием / В.И. Рожков, А.М. Попов // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, № 2. – С. 271–278.
12. Гребенщиков, Б.Г. Об устойчивости по первому приближению систем с запаздыванием, линейно зависящих от времени / Б.Г. Гребенщиков // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 214–218.

Борис Георгиевич Гребенщиков, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), grebenshchikovbg@susu.ac.ru.

Андрей Борисович Ложников, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация); доцент, кафедра прикладной математики, Уральский федеральный университет (г. Екатеринбург, Российская Федерация), ABLozhnikov@yandex.ru.

Поступила в редакцию 1 июля 2022 г.

MSC 93D15 **DOI: 10.14529/mmp220409**

METHODS FOR STUDYING THE STABILITY AND STABILIZATION OF SOME SYSTEMS WITH LARGE DELAY

B.G. Grebenshchikov[1]**, *A.B. Lozhnikov***[2,3]
[1]South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
[2]Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation
[3]Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation
E-mail: grebenshchikovbg@susu.ac.ru, ABLozhnikov@yandex.ru

The article is devoted to the study of the properties of systems of differential equations containing a large (in particular, linear) delay. Systems with linear delay have a fairly wide application in biology, in particular, in modelling the distribution of cells in body tissues, as well as in the theory of neural networks. Equations of this type are also found in problems of physics and mechanics, where an important point is the asymptotic behavior of the solution (in particular, the asymptotic stability). When such systems are unstable, the problem of stabilization arises. The optimal stabilization algorithm is based on an union of stabilization of systems of ordinary differential equations and further difference systems. This algorithm is quite simply implemented using numerical methods for solving systems of differential equations with a delay and solving matrix equations. We developed a program that allows quite effectively find a control effect that stabilizes some systems.

Keywords: delay; stability; stabilization.

References

1. Krasovskii N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* [Some Problems in the Theory of Stability of Motion]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 211 p. (in Russian)
2. Shimanov S.N. [On the Instability of the Movement of Systems with Time Delays]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1960, vol. 24, no. 1, pp. 55–63. (in Russian)
3. Grebenshchikov B.G., Rozhkov V.I. Asymptotic Behavior of the Solution of a Stationary System with Delay. *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 5, pp. 640–647.
4. Grebenshchikov B.G., Novikov S.I. On the Instability of a System with Linear Delay that is Reducible to a Singularly Perturbed System. *Russian Mathematics*, 2010, vol. 54, no. 2, pp. 1–10. DOI: 10.3103/S1066369X10020015
5. Repin Yu.M. [On the Conditions of Stability of Systems of Linear Differential Equations with Delays]. *Uchenye zapiski Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta*, 1960, issue 23, pp. 31–34. (in Russian)
6. Furasov V.D. *Ustoychivost' i stabilizatsiya diskretnykh protsessov* [Stability and Stabilization of Discrete Processes]. Moscow, Nauka, 1982. 192 p. (in Russian)
7. Furasov V.D. *Ustoychivost' dvizheniya, otsenki i stabilizatsiya* [Stability of Motion, Estimation and Stabilization]. Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)
8. Kim A.V., Lozhnikov A.B. A Linear-Quadratic Problem for Systems with Delay in the State. Exact Solutions of Riccati Equations. *Automation and Remote Control*, 2000, vol. 61, no. 7, pp. 1076–1090.
9. Marchenko V.M. [On the Theory of Canonical Forms of Control Systems with Delay]. *Matematicheskiy sbornik*, 1978, vol. 105, no. 3, pp. 403–412. (in Russian)
10. Zubov V.I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on Control Theory]. Moscow, Nauka, 1975.
11. Rozhkov V.I., Popov A.M. [Estimates of Solutions of Some Systems of Differential Equations with a Large Delay]. *Differential Equations*, 1971, vol. 7, no. 2, pp. 271–278. (in Russian)
12. Grebenshchikov B.G. Stability with Respect to the First Approximation of Systems with Linearly Time-Dependent Delay. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 159–162.

Received July 1, 2022